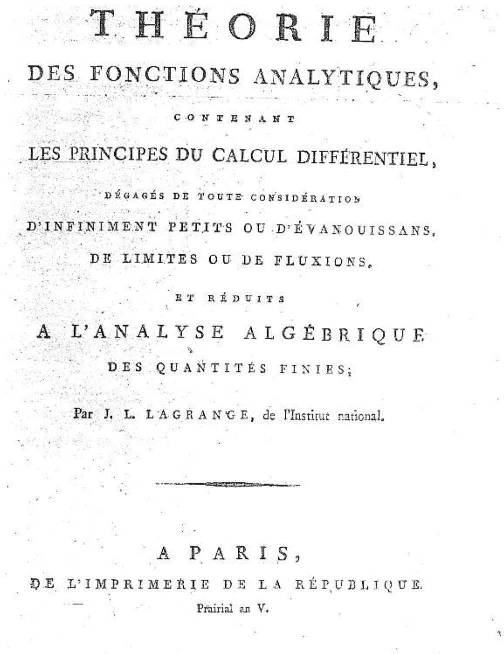
La *THÉORIE DES FONCTIONS ANALYTIQUES*

Pubblicata a Parigi nel 1797, fu una delle opere più studiate da intere generazioni di allievi; dimostra la preferenza di Lagrange per una base algebrica per il calcolo, eliminando qualsiasi tipo di visione infinitesimale.



THÉORIE
DES FONCTIONS ANALYTIQUES,
CONTENANT
LES PRINCIPES DU CALCUL DIFFÉRENTIEL,
DÉGAGÉS DE TOUTE CONSIDÉRATION
D'INFINIMENT PETITS OU D'ÉVANOUISSANS,
DE LIMITES OU DE FLUXIONS,
ET RÉDUITS
A L'ANALYSE ALGÉBRIQUE
DES QUANTITÉS FINIES;
Par J. L. LAGRANGE, de l'Institut national.

A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE DE LA RÉPUBLIQUE.
Prairial an V.

Lagrange voleva dare al calcolo infinitesimale tutto il rigore delle dimostrazioni degli antichi, incorporandolo dentro un'unica concezione della matematica, basata sull' "éspirit de l'analyse".

Per fare ciò, Lagrange interpretò l'algoritmo diretto (ovvero l'algoritmo della differenziazione) come una regola per trasformare le funzioni tale che, se applicata reiteratamente a una funzione $y = f(x)$, forniva, a parte i fattori numerici, i coefficienti dello sviluppo di $f(x+h)$ in serie di potenze di h.
Tali coefficienti vennero chiamati da Lagrange funzioni derivate e indicati con $f^{(k)}(x)$ con
$k = 1, 2, 3, \ldots$

Per ottenere il suo obiettivo Lagrange avrebbe dovuto mostrare che le funzioni derivate sostituivano i quozienti differenziali di Leibniz $\frac{d^k y}{dx^k}$; cioè che per ogni funzione $y = f(x)$ esistono infinite funzioni, con $k = 1, 2, 3, \ldots$ che rappresentano, a parte i fattori numerici, i coefficienti dello sviluppo di $f(x+h)$ in serie di potenze di h, e che formalmente coincidono coi quozienti differenziali.

Pur conscio che esistevano delle eccezioni, giudicate tuttavia non rilevanti, secondo Lagrange ogni funzione $f(x)$ poteva essere espressa nella forma:

$$f(x+h) = f(x) + ph + qh^2 + rh^3 + sh^4 + \cdots$$

dove i coefficienti $p, q, r, \ldots$ (chiamate "funzioni derivate") contengono la x ma sono indipendenti da h.

Per ottenere i coefficienti $p, q, r, \ldots$ procede nel seguente modo: pone

$f(x+h) = fx + hP$ (*)

dove P è una funzione di x e h . A questo punto reitera il procedimento e pone:

$$P = p + hQ$$

dove p è il valore di P per $h = 0$ e Q è una funzione di x e h. Analogamente si avrà:

$Q = q + hR$ $R = r + hs$ ecc.

Sostituendo nella (*) ottiene:

$$f(x+h) = fx + hP = fx + hp + h^2Q = fx + hp + h^2q + h^3R = \cdots$$

Si tratta a questo punto di mostrare come le “funzioni derivate” $p, q, r, \dots$ dipendono dalla funzione primitiva fx.

Per questo sostituisce in $f(x+h)$ dapprima $h+o$ al posto di h, poi $x+o$ al posto di x (con o indeterminata indipendente da h). Naturalmente si deve ottenere lo stesso risultato.

Con la prima sostituzione si ottiene:

(1) $$fx + p(h+o) + q(h+o)^2 + r(h+o)^3 + \cdots$$

e sviluppando:

$$fx + ph + qh^2 + rh^3 + sh^4 + \cdots + po + 2qho + 3rh^2o + 4sh^3o + \cdots$$

Con la seconda sostituzione, sostituendo $x+o$ ad x; $fx, p, q,$ diventano:

$$fx + f'xo + \cdots \qquad p + p'o + \cdots \quad q + q'o + \cdots$$

e quindi si ha:

(2) $$fx + ph + qh^2 + rh^3 + sh^4 + \cdots + f'xo + p'ho + q'h^2o + r'h^3o + \cdots$$

Uguagliando la (1) con la (2) si ottiene:

$$p = f'x$$
$$2q = p'$$
$$3r = q'$$

e dunque:

$$f(x+h) = fx + f'xh + \frac{f''x}{2}h^2 + \frac{f'''x}{2 \cdot 3}h^3 + \cdots$$

La prima funzione derivata $f'x$ si chiamerà derivata prima, la seconda funzione derivata $f''x$ derivata seconda, e così via.

La teoria di Lagrange rappresenta il tentativo di ridurre qualsiasi funzione reale alla forma polinomiale, in modo da limitare l'uso non solo di funzioni trascendenti ma anche di funzioni irrazionali e frazionarie.
In altre parole, la teoria di Lagrange viene definita “algebrica” in quanto riconduce l’analisi (sia finita che infinitesimale) all’algebra che risulta così alla base di tutta la matematica.
Lagrange ebbe difficoltà ad imporre la sua teoria e il fallimento del suo progetto segnò, almeno sul continente, la fine del programma di analisi settecentesca iniziato da Eulero.