IL CALCOLO INFINITESIMALE IN ITALIA AGLI INIZI DEL XVIII SECOLO

Nella storia del pensiero matematico, il XVIII secolo è caratterizzato, in modo particolare, dallo sviluppo di ricerche connesse al moderno calcolo infinitesimale e alle sue applicazioni alla fisica. Notevoli progressi si hanno anche in molti altri settori, specie nell'algebra, nella geometria analitica e nella trigonometria, grazie alla loro stretta connessione con il nuovo calcolo. Il moderno calcolo infinitesimale nasce nel Seicento, quando Newton e Leibniz, indipendentemente l'uno dall'altro, ne stabiliscono i metodi fondamentali.

Ma è nel corso del Settecento che i procedimenti del nuovo calcolo vengono perfezionati e arricchiti. I matematici ne estendono enormemente il campo d'applicazione, aprendo così la strada all'analisi moderna: ad esempio al calcolo delle variazioni e alla teoria delle equazioni differenziali.

In Inghilterra si era diffuso il calcolo differenziale nella forma datagli da Newton, mentre nell'Europa continentale si era invece affermata la versione leibniziana del calcolo.

Nell'ambiente scientifico italiano, legato a una tradizione geometrica che ha come maggiori esponenti i fratelli Ceva e Vicenzo Viviani, il calcolo leibniziano però inizia a farsi strada solo agli inizi del Settecento.

La prima diffusione dell'analisi infinitesimale in Italia si deve alle numerosissime opere di Guido Grandi (1671-1742), corrispondente di Leibniz, nonché a Gabriele Manfredi, autore del primo lavoro sul calcolo infinitesimale mai pubblicato in Italia, il *De constructione aequationum differentialium primi gradus* (Bologna, 1707). A questa diffusione contribuiscono largamente anche Jacopo Riccati (1676-1754), noto per i suoi studi sulle equazioni differenziali, e Maria Gaetana Agnesi (1718-1799), autrice delle *Istituzioni analitiche*, pubblicato nel 1748.

GUIDO GRANDI E IL CALCOLO INFINITESIMALE

Guido Grandi *(1671-1742)*

Il matematico italiano che per primo pubblicò opere nelle quali vengono usati il calcolo differenziale ed integrale fu Guido Grandi.

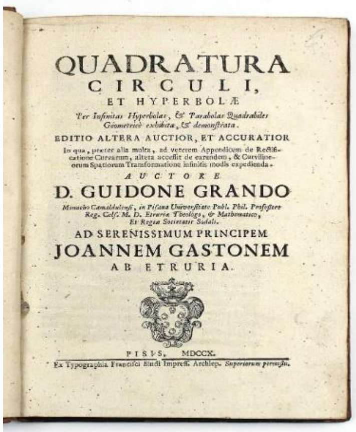
Dal 1700 Grandi iniziò lo studio dell'analisi su fonti francesi e tedesche.
La prima opera pubblicata del Grandi, la *Geometrica demonstratio Vivianeorum problematum* (1699), riguarda il problema proposto dal Viviani sugli *Acta Eruditorum* del 1692, del quale Leibniz, Giacomo Bernoulli e il Viviani stesso avevano dato delle soluzioni:

"Trovare una mezza sfera, ed assegnar sulla superficie curva di essa non quadrabile una porzione che sia uguale al quadrato della data retta AB".

Leibniz e Bernoulli avevano risolto il problema con l'ausilio dei metodi infinitesimali, Grandi riprende la soluzione del Viviani data con i metodi classici e cerca di migliorarla integrandola con dimostrazioni basate sui metodi degli indivisibili di Cavalieri e Torricelli.
Segue la discussione di altri sette problemi, dello stesso tipo del primo, dove si chiede di trovare porzioni di solidi o delle superfici non quadrabili in modo che i nuovi oggetti ottenuti siano quadrabili.

Un maggiore ricorso ad algoritmi infiniti si trova nella seconda opera di Grandi: la *Geometrica demonstratio theorematum Hugenianorum* dedicata alla dimostrazione e al commento dei risultati che Huygens in appendice al *Traité de la lumière* del 1690 aveva dato, relativamente alla curva logaritmica.
In questo libro sono riportati i risultati di Huygens: si tratta di quindici teoremi riguardanti proprietà della curva logaritmica, dei quali Grandi ne dà la dimostrazione in modo notevolmente prolisso.
Nel 1703, a Pisa, Grandi pubblicò la *Quadratura circoli et hyperbolae (La quadratura del cerchio e dell'iperbole),* l'opera di maggior interesse riguardo al calcolo infinitesimale. Qui non si trovano particolari contributi originali, ma i risultati già dimostrati da altri sono oggetto di una autonoma rielaborazione e risistemazione. La prima parte dell'opera si occupa della quadratura del cerchio che viene ottenuta mediante la somma della serie

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots,$$



Frontespizio *Quadratura circoli et hyperbolae (1703)*

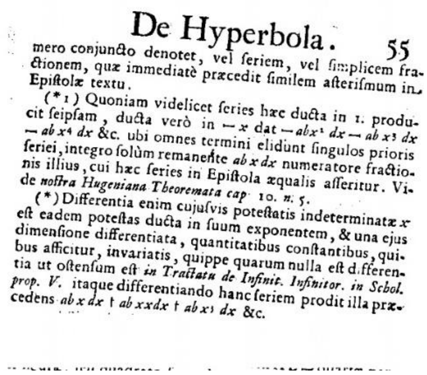
peraltro già trovata da Leibniz.
La seconda parte è invece dedicata all'iperbole e la quadratura di una regione iperbolica è ricondotta alla serie

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 8}+\cdots+\frac{1}{n\cdot 2^n}+\cdots$$

Quanto ai metodi differenziali, nella prefazione Grandi scrive:
Ma ho anche inserito di quando in quando anche i dx, dy caratteristici del calcolo differenziale e il loro modo di essere differenziati e sommati. E così, se anche li avessi potuti introdurre anche nei miei opuscoli precedenti! Ma allora i segreti di quel metodo mi erano inaccessibili, mentre ora, provata la loro utilità e fecondità, perché non inserirli tra gli altri metodi a me familiari? Inoltre il significato dei simboli è molto chiaro, poiché non significa altro se non una differenza infinitamente piccola tra le stesse x e y, e facilmente troverai esposte le regole stesse del calcolo se osserverai e sfoglierai attentamente questo trattato, nel caso in cui tu non volessi ricorrere al chiarissimo L'Hospital che le spiega in modo più completo nel trattato degli infinitamente piccoli.
L'utilizzo dei metodi differenziali resta in effetti piuttosto sporadico. Un'occasione per esporne alcuni rudimenti è costituita da una lettera ricevuta da Gabriele Manfredi sulla quadratura dell'iperbole che viene inserita nella seconda parte dell'opera. Per chiarire il procedimento esposto da Manfredi, Grandi infatti aggiunge una serie di note in cui spiega i passaggi e descrive le regole del nuovo calcolo nello scolio alla prop. V al Trattato:
"Infatti la "differenza" di una qualunque potenza dell'incognita x è la stessa potenza moltiplicata per il suo esponente e "differenziata" di una sua dimensione, lasciando invariate le costanti per cui è moltiplicata, costanti in verità per le quali la "differenza" è nulla, come è dimostrato nel *Tractatus de infinitis infinitorum et infinite parvorum* nello scolio alla prop. V, e dunque differenziando questa serie

$$\left[\frac{abxx}{2}+\frac{abx^3}{3}+\frac{abx^4}{4}+\frac{abx^5}{5}+\frac{abx^6}{6}ecc.\right]$$

si ottiene quella precedente $abxdx + abxxdx + abx^3dx$ ecc."


De Hyperbola. 55
mero conjuncto denotet, vel seriem, vel simplicem fractionem, quæ immediatè præcedit similem asterismum in Epistolæ textu.
(*1) Quoniam videlicet series hæc ducta in 1. producit seipsam, ducta verò in − x dat − abx² dx − ab x³ dx − ab x⁴ dx &c. ubi omnes termini elidunt singulos prioris seriei, integro solùm remanente ab x dx numeratore fractionis illius, cui hæc series in Epistola æqualis asseritur. Vide *nostra Hugeniana Theoremata cap* 10. *n.* 5.
(*) Differentia enim cujusvis potestatis indeterminatæ x est eadem potestas ducta in suum exponentem, & una ejus dimensione differentiata, quantitatibus constantibus, quibus afficitur, invariatis, quippe quarum nulla est differentia ut ostensum est *in Tractatu de Infinit. Infinitor. in Schol. prop. V.* itaque differentiando hanc seriem prodit illa præcedens *ab x dx* + *ab xxdx* + *ab x³ dx* &c.

Scolio alla prop. V del *Tractatus de infinitis infinitorum, et infinite parvorum ordinibus disquisitio geometrica* (1710)

Nonostante gli evidenti limiti riscontrabili nelle sue opere, Guido Grandi è il personaggio chiave per lo studio della diffusione dei metodi del calcolo differenziale e integrale in Italia nei primi anni del XVIII secolo.

GABRIELE MANFREDI E LA MATEMATICA ALL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

Gabriele Manfredi (1681-1761)

Verso la fine del '600 si formò a Bologna un sodalizio di giovani studiosi interessati alle nuove scoperte nel campo della matematica e dell'astronomia; ne fecero parte i fratelli Eustachio e Gabriele Manfredi, Vittorio Francesco Stancari, Giuseppe Verzaglia.

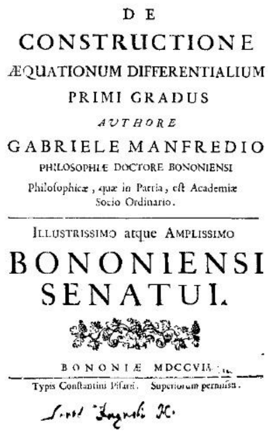
Nonostante il periodo di grave crisi che l'Università di Bologna stava attraversando, questo gruppo di giovani studiosi riuscirono a impadronirsi dei metodi della geometria cartesiana e ad affrontare con successo le tecniche del calcolo infinitesimale, lavorando modernamente ai problemi esposti nelle riviste scientifiche.

Così gli scritti matematici di Gabriele Manfredi hanno una freschezza e una modernità che invano si cercherebbe in tutta l'opera di Grandi.

Nel 1707 arrivò a pubblicare il *De constructione aequationum differentialium primi gradus,* opera che gli procurò notevole fama in Europa.

Il *De Constructione* è suddiviso in sei sezioni e l'autore si propone di raccogliere e di presentare in modo ordinato i risultati relativi alle equazioni differenziali del primo ordine sparsi nella letteratura matematica.

Fu, infatti, il primo libro in assoluto dedicato all'integrazione delle equazioni differenziali. In particolare venne descritto il procedimento generale per le equazioni omogenee $y' = f(x,y)$, in cui il secondo membro $f(x,y)$ è una funzione omogenea di grado zero, ossia una funzione del solo rapporto y/x. In questo caso, ponendo $y = wx$, si ottiene per w un'equazione a variabili separabili.


DE
CONSTRUCTIONE
ÆQUATIONUM DIFFERENTIALIUM
PRIMI GRADUS
AUTHORE
GABRIELE MANFREDIO
PHILOSOPHIÆ DOCTORE BONONIENSI
Philosophiæ, quæ in Patria, est Academiæ Socio Ordinario.
ILLUSTRISSIMO atque AMPLISSIMO
BONONIENSI SENATUI.
BONONIÆ MDCCVII.
Typis Constantini Pisarii. Superiorum permissu.

Frontespizio *De constructione aequationum differentialium primi gradus* (1707)

Il *De Constructione* ottenne l'apprezzamento generale dell'ambiente scientifico: gli Acta Eruditorum del 1708 e il Giornale de' letterati d'Italia lo recensirono molto favorevolmente; Leibniz e Giovanni Bernoulli lo lodarono.

JACOPO RICCATI E LA MATEMATICA ALL'UNIVERSITA' DI PADOVA

Diversamente dall'Università di Bologna, l'Università di Padova agli inizi del 700 godette di un periodo di notevole efficienza. La Repubblica veneta con una politica accorta di buoni stipendi, di agevolazioni e anche di tolleranza religiosa, riusciva ad assicurarsi come docenti alcuni dei migliori scienziati italiani e stranieri.

Iacopo Riccati (1676-1754)

Nell'ambiente veneziano e padovano del primo settecento avviene la maturazione scientifica di Jacopo Riccati.

La sua formazione matematica più moderna cominciò con la lettura dei *Principia* di Newton, a cui si dedicò aiutato da Stefano degli Angeli; ben presto familiarizzò con i metodi della geometria cartesiana come attestano due suoi lavori databili intorno al 1705, inseriti nella raccolta delle sue opere: *De solutione aequationum analiticarum et problematum geometricarum per curvas simplicissimas; De modo construendi non ineleganter Problemata plus quam solida.*

Nel 1710 Riccati era già introdotto nello studio del calcolo differenziale ed integrale, e ne diede un notevole contributo, soprattutto nella prima fase del suo sviluppo.

Nel 1714 sul Giornale de' letterati d'Italia fu pubblicata una sua memoria contenente critiche alle osservazioni di Giovanni Bernoulli sul lavoro di Hermann sul problema inverso delle forze centrali. Giovanni Bernoulli aveva rilevato che la soluzione di Hermann non era la più generale perché nell'integrazione dell'equazione del moto

$$\frac{-ddx}{x} = \frac{(ydx - xdy)^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

erano state omesse le costanti di integrazione. Hermann accettò le osservazioni, mentre Riccati ne contestò la validità e mostrò anche come separare le variabili con una sostituzione. A Riccati rispose Nicola Bernoulli, professore a Padova, in sostegno di quanto asserito da Giovanni Bernoulli.

Riccati replicò con un articolo in cui è messo in evidenza il suo metodo di separazione parziale delle variabili per integrare certe equazioni differenziali. Riccati fornisce vari esempi; si riporta il primo per dare un'idea del metodo. Sia

$$\frac{x^3dy + y^3dx}{(xx + yy)\sqrt{xx + yy - x^2y^2}} = dz$$

dove "la quantità z è una funzione arbitraria di x ovvero di y".

Riccati raggruppa i differenziali in modo che una parte di essi sia un differenziale esatto

$$\frac{x^3y^3}{(xx+yy)\sqrt{xx+yy-x^2y^2}}\left[\frac{dx}{x^3}+\frac{dy}{y^3}\right]=dz$$

ora posto $\frac{dx}{x^3}+\frac{dy}{y^3}=-dp$ risulta $p=\frac{1}{2xx}+\frac{1}{2yy}$ e sostituendo si perviene all'equazione a variabili separate.

$$\frac{-dp}{2p\sqrt{2p-1}}=dz.$$

La polemica tra Nicola Bernoulli e Riccati proseguì come è solito per le polemiche scientifiche su teorie nuove.

Un'altra questione che Riccati propose fu un problema che questi propose sugli Acta Eruditorum relativamente all'equazione differenziale (detta poi di Riccati):

$x^m dx + x^n y^r dy = y^s dy,$

per la quale trovò alcuni valori degli esponenti che rendono l'equazione risolubile.

La determinazione di tutti i valori degli esponenti per i quali l'equazione di Riccati è riconducibile ad un'equazione a variabili separabili fu compiuta più tardi da Daniel Bernoulli ed Eulero.

Gran parte dei risultati più significativi ottenuti da Riccati furono raccolti in un trattato composto attorno al 1723; successivamente rielaborato e inserito nelle Opere del Riccati (pubblicate postume nel 1761-1765) con il titolo: *Della separazione delle indeterminate nelle equazioni differenziali del primo grado, e della riduzione delle equazioni differenziali del secondo grado e d'altri gradi ulteriori*. Il trattato è diviso in tre parti e reca due appendici.

Nella prima parte vengono esposti i metodi inventati da diversi autori per separare le variabili nelle equazioni differenziali del primo ordine.

Frontespizio Opere del Conte Iacopo Riccati, Tomo Primo (1761-1765)

Nella seconda parte vengono sviluppati i metodi di Riccati per separare le variabili; i principali sono due: quello della separazione parziale delle variabili e quello degli esponenti indeterminati.

La parte terza contiene alcuni metodi per integrare mediante separazione di variabili equazioni di ordine superiore.

Nelle due appendici sono esposte delle osservazioni per ridurre l'ordine delle equazioni differenziali del secondo ordine e del terzo ordine.

MARIA GAETANA AGNESI, LA PRIMA DONNA MATEMATICA DELL’ETA’ MODERNA

Verso la metà del Settecento apparvero in Italia alcuni libri di introduzione al calcolo infinitesimale, più elementari del *De Constructione* di Gabriele Manfredi che presupponeva la conoscenza dei fondamenti dell’analisi. Tra questi, spicca il trattato in due volumi scritto dalla prima donna matematica dell’età moderna: le *Istituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana* di Maria Gaetana Agnesi, pubblicato nel 1748. Si tratta di un’opera volutamente elementare, in quanto nelle intenzioni dell’autrice era indirizzata alla preparazione dei giovani studenti.

INSTITUZIONI
ANALITICHE
AD USO
DELLA GIOVENTU' ITALIANA
DI D.NA MARIA GAETANA
AGNESI
MILANESE
Dell' Accademia delle Scienze di Bologna.
TOMO I.

IN MILANO, MDCCXLVIII.
NELLA REGIA-DUCAL CORTE.
CON LICENZA DE' SUPERIORI.

Frontespizio delle *Instituzioni analitiche* di Maria Gaetana Agnesi (1748)

L’Agnesi scrisse nell’introduzione:

Non avvi alcuno il quale informato essendo delle Matematiche cose non sappia altresì quanto, in oggi spezialmente, sia necessario lo studio dell'analisi e quali progressi si sieno con questa fatti, si facciano tuttora, e possano sperarsi nell'avvenire; che però non voglio né debbo trattenermi qui in lodando questa scienza, che punto non ne abbisogna, e molto meno da me. Ma quanto è chiara la necessità di lei, onde la Gioventù ardentemente s'invogli di farne acquisto, grandi altrettanto sono le difficoltà che vi s'incontrano, sendo noto e fuor di dubbio che non ogni città, almeno nella nostra Italia, ha persone che sappiano o vogliano insegnarla e non tutti hanno il modo di andar fuori della Patria a cercarne i maestri.

Con l'intenzione dunque di raccogliere e riordinare con chiarezza e semplicità, omettendo tutto il superfluo, sono redatti i due tomi. Il primo s'intitola *Dell'analisi delle quantità finite*, e si apre con l'esposizione degli elementi di algebra; si passa quindi alla teoria delle equazioni algebriche e alla geometria analitica piana per chiudere con i metodi di ricerca dei massimi e minimi. Il secondo è diviso nei tre libri *Del calcolo differenziale*, *Del calcolo integrale*, *Del metodo inverso delle tangenti*. Esso è dedicato al calcolo differenziale e integrale, agli sviluppi in serie, alle equazioni differenziali del primo e del secondo ordine. L'Agnesi studia molte curve piane, affette anche da singolarità complicate, argomento che sarà ripreso, con molta maggiore originalità e organicità, da Gabriel Cramer.

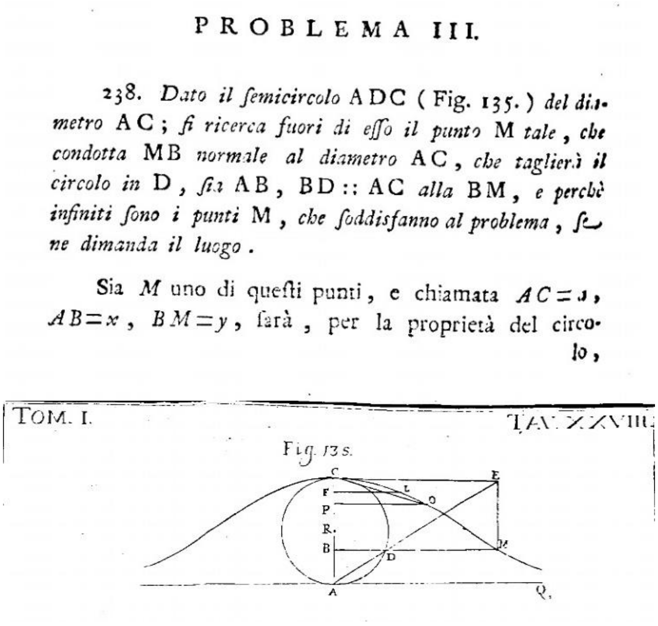
In particolare, andarono sotto il nome di "curva" o "versiera" di Agnesi curve diverse, sebbene analoghe alla cubica piana razionale di equazione $xy^2 = a^2(a - x)$, già nota a

Pierre de Fermat, studiata e denominata più tardi da Guido Grandi e che l'Agnesi divulgò nel tomo primo della sua opera.

L'Agnesi scriveva:

Dato il semicircolo ADC del diametro AC si ricerca fuori di esso il punto M tale che condotta MBnormale al diametro AC che taglierà il circolo in D, sia $AB : BD = AC : BM$, e perché infiniti sono i punti M che soddisfanno al problema, se ne dimanda il luogo.

Sia M uno di questi punti, e chiamata $AC = a$, $AB = x$, $BM = y$, sarà per la proprietà del circolo, $BD = \sqrt{ax - xx}$, e per la condizione del problema, sarà $AB : BD = AC : BM$, cioè $x : \sqrt{ax - xx} = a : y$, però $y = \frac{a\sqrt{ax-xx}}{x}$, o sia $y = \frac{a\sqrt{a-x}}{\sqrt{x}}$, equazione della curva da descriversi, che dicesi la *Versiera*.


PROBLEMA III.

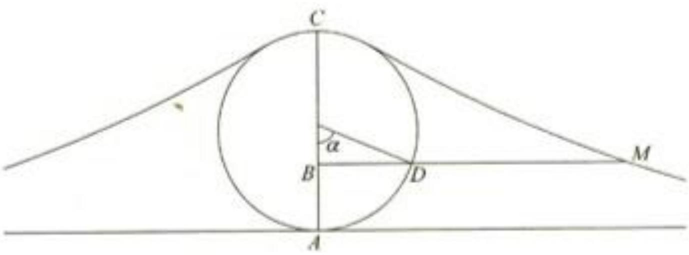
238. *Dato il semicircolo* ADC (Fig. 135.) *del diametro* AC ; *si ricerca fuori di esso il punto* M *tale, che condotta* MB *normale al diametro* AC, *che taglierà il circolo in* D, *sia* AB, BD :: AC *alla* BM, *e perchè infiniti sono i punti* M, *che soddisfanno al problema, se ne dimanda il luogo.*

Sia M uno di questi punti, e chiamata $AC = a$, $AB = x$, $BM = y$, sarà, per la proprietà del circolo,

Problema III, Istituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana, tomo I (1748)

Eliminate le radici, l'equazione della versiera è dunque $xy^2 = a^2(a - x)$.

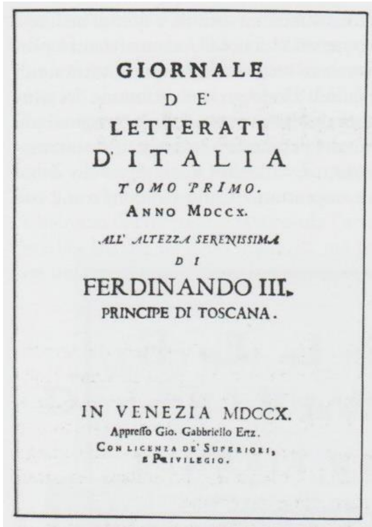
Nei paesi anglosassoni la versiera è nota con il nome di *witch of Agnesi* (strega di Agnesi). Il motivo di questo nome non è completamente chiaro; con ogni probabilità il traduttore, non avendo molta dimestichezza con l'italiano, prese il termine versiera come sinonimo di "avversaria". In realtà, il termine versiera deriva quasi certamente dal fatto che il segmento AB che entra nella definizione della curva è il seno verso dell'angolo α in figura (il seno verso è una funzione trigonometrica oggi caduta in disuso, che è uguale a $1 - cos\alpha$).



L’opera ebbe un notevole successo e fu tradotta in inglese e, limitatamente al secondo volume, in francese.

IL GIORNALE DE’ LETTERATI D’ITALIA

Nel 1710 iniziò la pubblicazione a Venezia del Giornale de’ letterati d’Italia presso l’editore libraio Gabriello Hertz. Scopo del giornale era dare notizia dell’attività letteraria e scientifica italiana, in particolare attraverso recensioni di libri, e ospitare brevi note di carattere scientifico o erudito.


GIORNALE
DE'
LETTERATI
D'ITALIA
TOMO PRIMO.
ANNO MDCCX.
ALL' ALTEZZA SERENISSIMA
DI
FERDINANDO III.
PRINCIPE DI TOSCANA.
IN VENEZIA MDCCX.
Appresso Gio. Gabbriello Ertz.
CON LICENZA DE' SUPERIORI,
E PRIVILEGIO.

Frontespizio del volume che raccoglie la prima annata del «Giornale de' letterati d'Italia» (1710).

L’iniziativa presa da due intellettuali veneti, Scipione Maffei e Apostolo Zeno, giungeva a colmare un grave vuoto nella cultura italiana.

Il *Giornale de’ Letterati di Venezia* ha un respiro veramente nuovo ed è una fonte insostituibile di documentazione per la storia delle matematiche in Italia. Il *Giornale di Venezia,* come spesso veniva chiamato, ospitò oltre alle recensioni di libri riguardanti il calcolo differenziale ed integrale di Guido Grandi e Gabriele Manfredi, scritti dello Vittorio Francesco Stancari.

Fu dato ampio spazio alle polemiche scientifiche più vivaci sorte nell’ambito dello sviluppo dei metodi del calcolo differenziale ed integrale: quella tra Grandi e Varignon sugli spazi più che infiniti, quella tra Verzaglia e Hermann sul problema inverso delle forze centrali, quella tra Jacopo Riccati e Nicola Bernoulli.

Sul *Giornale de’ Letterati di Venezia* furono pubblicate le importanti memorie di Giulio Carlo de’ Fagnano relative alla lemniscata.

Dal 1710 al 1740, anni della sua pubblicazione, il *Giornale di Venezia,* si rivelò uno strumento indispensabile per la cultura italiana.

CONSIDERAZIONI FINALI

Il calcolo infinitesimale in Italia pose profonde radici negli anni tra il 1700 e il 1710. È in questo periodo che questo metodo venne attentamente studiato non solo da Guido Grandi, Gabriele Manfredi, Verzaglia, Stancari, che sono i primi a farsi conoscere, ma anche da Jacopo Riccati, Fagnano, Maria Gaetana Agnesi ecc. …

I contributi italiani sono difficilmente rintracciabili: mancando prima del 1710 (anno in cui inizia il Giornale de' letterati) una rivista scientifica ed essendo anche l'attività editoriale in genere meno vivace che in altri paesi, molte delle riflessioni sul calcolo sono da ricercarsi nei carteggi e nelle note manoscritte.

Sede primaria per lo studio del calcolo infinitesimale furono le Università: Pisa, Bologna, Padova, Roma e Napoli.

Un'altra sede importante per la diffusione della cultura scientifica furono le Accademie che sorgevano quasi in ogni città importante; in molte di queste la matematica era oggetto di discussione e di studio e molti matematici ebbero posizioni di rilievo nelle accademie.

L'astronomia e l'idrodinamica furono i campi nei quali in modo più diretto gli strumenti del calcolo infinitesimale trovavano le loro applicazioni e quasi tutti gli scienziati dei quali ci siamo occupati furono matematici, astronomi, idraulici.

Alle competenze scientifiche dei matematici si faceva largamente ricorso come educatori, organizzatori culturali e soprattutto come consulenti in relazione ai problemi della sistemazione idraulica del territorio dell'Italia centrale.

BIOGRAFIA

I. E. Giusti, *Piccola storia del calcolo infinitesimale dall'antichità al Novecento*, Istituti editoriali e poligrafici internazionali Pisa-Roma, (2007)

II. Pepe Luigi, *Il Calcolo Infinitesimale in Italia agli inizi del secolo XVIII. Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche 1 n.2,* (1981), pp.43-101