

I numeri amicabili

I numeri amicabili (o numeri amici) sono quelle coppie di numeri tali che ciascuno è la somma dei divisori propri dell'altro.

Thābit ibn Qurra scrisse l'*Opuscolo sui numeri amicabili* in cui vengono stabilite le condizioni che permettono di individuare le coppie di numeri amicabili.

Egli dimostra che i numeri

$$M = 2^n \cdot p \cdot q \quad \text{e} \quad N = 2^n \cdot r$$

sono amicabili quando

$$p = 3 \cdot 2^n - 1, \quad q = 3 \cdot 2^{n-1} - 1 \quad \text{e} \quad r = 9 \cdot 2^{n+1} - 1$$

sono numeri primi dispari, per un certo n positivo.

I numeri 220 e 284 sono una coppia di numeri amicabili, ottenuti ponendo $n = 2$, infatti:

$$p = 3 \cdot 2^2 - 1 = 11, \quad q = 3 \cdot 2^{2-1} - 1 = 5, \quad r = 9 \cdot 2^{2+1} - 1 = 71 \quad \text{con}$$

$$M = 2^2 \cdot 11 \cdot 5 = 220, \quad N = 2^2 \cdot r = 284.$$

Le ipotesi sono verificate, in quanto 11, 5 e 71 sono numeri primi dispari. Infatti si ha che i divisori di 220 sono $\{1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110\}$, i divisori di 284 sono $\{1, 2, 4, 71, 142\}$ e la loro somma vale

$$1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$$

$$1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220.$$

Questa prima coppia era nota anche ai Pitagorici e rimase per molto tempo la sola coppia di numeri amicabili conosciuta.

I matematici arabi ne scoprirono altre, tra cui 17 296, 18 416 (che si ottiene per $n = 4$), oggi nota col nome di *coppia di Fermat* perché nel 1636 verrà riscoperta dal matematico francese; e la coppia 9 363 584, 9 437 056 (che si ottiene per $n = 7$), oggi conosciuta sotto il nome di *coppia di Cartesio* perché da lui verrà riscoperta alcuni secoli dopo.

Non tutte le coppie di numeri amicabili si possono ottenere con il metodo soprascritto, e questo è il caso di (1 184, 1 210).

Infine, L. Eulero (1707-1783) pubblicherà nel 1750 una lista di 61 coppie di numeri amicabili.