Abū Kāmil e la risoluzione dei sistemi lineari di equazioni

Nella breve prefazione del *Libro delle cose rare nell'arte del calcolo*, Abū Kāmil sottolinea che le soluzioni dei sistemi di equazioni lineari -quando si esprimono attraverso numeri interi- possono essere uniche o molteplici; ma vi è anche una vasta classe di problemi che non hanno alcuna soluzione intera. L'autore fornisce esempi di difficoltà progressiva di questi tre casi possibili, spiegando nel dettaglio il procedimento della soluzione. Precisiamo che in realtà le soluzioni che si cercavano erano solamente quelle strettamente positive; quindi parlando di numeri interi intendiamo i numeri naturali.

Esempio 1. Soluzione unica

In primo luogo egli presenta il seguente sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 5x + \frac{y}{20} + z = 100. \end{cases}$$

Per risolverlo, elimina l'incognita z ed esprime y in funzione di x:

$$100 - x - y = 100 - 5x - \frac{y}{20}$$
$$y = 4x + \frac{4}{19}x.$$

Ricaviamo che, affinché la soluzione sia una terna di numeri interi, x deve essere un multiplo di 19; segue che una soluzione al sistema è $x = 19$, $y = 80$, $z = 1$. Si rivelerà ben presto essere *la* soluzione, infatti già per $x = 38$ si ottiene $y = 160$ che, essendo maggiore di 100, non dà alcuna speranza di un'ulteriore soluzione per il sistema.

Esempio 2. Più soluzioni

Procedendo allo stesso modo egli trova sei soluzioni al seguente sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{2} + 2z = 100. \end{cases}$$

Analogamente si ha:

$$200 - 2x - 2y = 100 - \frac{x}{3} - \frac{y}{2}$$
$$3y = -3x - \frac{1}{3}x + 200$$

da cui si ottengono le sei terne che risolvono il sistema:

$\{x = 6,\ y = 60,\ z = 34\}$; $\{x = 15,\ y = 50,\ z = 35\}$; $\{x = 24,\ y = 40,\ z = 36\}$;

$\{x = 33,\ y = 30,\ z = 37\}$; $\{x = 42,\ y = 20,\ z = 38\}$; $\{x = 51,\ y = 10,\ z = 39\}$.

Esempio 3. Nessuna soluzione

Consideriamo ora invece il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 3x + \frac{y}{20} + \frac{z}{3} = 100. \end{cases}$$

Risulta:

$$100 - x - y = 300 - 9x - \frac{3}{20}y$$
$$x = 25 + \frac{17}{160}y.$$

Il più piccolo valore di x intero si ottiene solo per $y = 160$, ma questo numero è maggiore del numero totale di 100, quindi l'autore conclude che il problema non ha soluzione.