Come risolveva le equazioni al-Khwarizmi?

La trattazione delle equazioni di al-Khwarizmi si basa sulla seguente suddivisione in sei tipologie:

1. I quadrati sono uguali alle radici : $ax^2 = bx$;
2. I quadrati sono uguali ad un numero: $ax^2 = c$;
3. Le radici sono uguali ad un numero: $ax = c$;
4. I quadrati e le radici sono uguali ad un numero: $ax^2 + bx = c$;
5. I quadrati ed i numeri sono uguali alle radici: $ax^2 + c = bx$;
6. Le radici e i numeri sono uguali ai quadrati: $bx + c = ax^2$.

Per ogni tipologia viene fornito un esempio numerico con corrispondente algoritmo in forma retorica, seguito dalla dimostrazione geometrica.
Soffermiamo la nostra attenzione sulle ultime tre tipologie.

Quarta tipologia

Al-Khwārizmī inizia con l'equazione:

$$x^2 + 10x = 39$$

che, come molti altri suoi esempi , si ritrova in quasi tutti i manuali arabi ed europei di età media.
Egli afferma:

"La soluzione è: dividi a metà il numero delle radici, che in questo caso dà 5. Moltiplica questo per se stesso: il prodotto è 25. Aggiungilo a 39, ottenendo 64. Ora estrai la radice di questo, che è 8 e sottrai da questo la metà delle radici, 5; il resto è 3. Questa è la radice del quadrato che cercavi e il suo quadrato è 9."

In notazioni moderne, l'equazione è rappresentabile con $x^2 + px = q$ ed è risolta con la regola:

$$x = \sqrt{q + (\frac{p}{2})^{2}} - \frac{p}{2}$$

Alle regole risolutive con i radicali, come si è già detto, **al-Khwārizmī** fa seguire la dimostrazione geometrica che, in questo caso, presenta due diverse costruzioni, corrispondenti al procedimento noto come "completamento del quadrato".

La prima (v.fig.1) consiste nel costruire il quadrato x^2 e quattro rettangoli di altezza $\frac{10}{4}$ sui lati di quello. Si completa poi la figura con quattro quadrati di lato $\frac{10}{4}$. Si ottiene così, sapendo che $x^2 + 10x = 39$, un quadrato di area $39 + 4(\frac{10}{4})^2 = 64$, il cui lato, $x + 2\frac{10}{4}$, misura 8. Si deduce quindi $x = 3$.

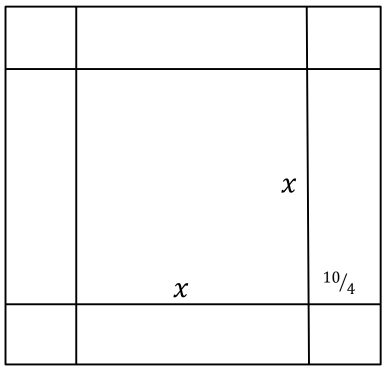

Fig.1

Nel caso dell'equazione $x^2 + px = q$, queste trasformazioni geometriche corrispondono alle seguenti trasformazioni algebriche:

$$x^2 + 4\left(\frac{p}{4}x\right) + 4(\frac{p}{4})^2 = q + 4(\frac{p}{4})^2,$$

$$(x + 2\frac{p}{4})^2 = q + 4(\frac{p}{4})^2,$$

$$x + 2\frac{p}{4} = \sqrt{q + 4(\frac{p}{4})^2}.$$

Da cui si ricava poi la regola di al-Khwarizmi riportata sopra:

$$x = \sqrt{q + (\frac{p}{2})^2} - \frac{p}{2}.$$

La seconda dimostrazione geometrica si deduce dalla Fig. 2

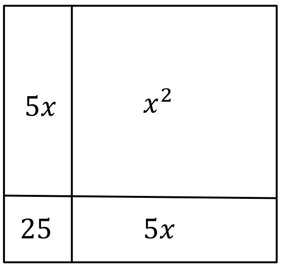

Fig.2

e corrisponde alla seguente trasformazione: :

$$x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} x + (\frac{p}{2})^2 = q + (\frac{p}{2})^2 \text{ ecc.}$$

Le indicazioni riportate sulle due figure sono state aggiunte dall'autore.

Quinta tipologia

Nel caso dell'equazione del **tipo 5** ($x^2 + q = px$), **al-Khwārizmī** sa che si possono avere due radici, una sola (doppia) o nessuna (quando le radici non sono reali).

Per mostrare la completezza della trattazione, si riporta per esteso il ragionamento di **al-Khwārizmī** relativo all'equazione

$$x^2 + 21 = 10x,$$

seguito dalla traduzione in simbolismo moderno delle operazioni espresso a parole.

"Quadrati e numeri uguali a radici. Il seguente esempio è un'illustrazione di questo tipo: un quadrato e 21 unità uguali a 10 radici. La regola risolutiva è la seguente: dividi per 2 le radici, ottieni 5. Moltiplica 5 per se stesso, hai 25. Sottrai 21 che è sommato al quadrato, resta 4. Estrai la radice, che dà 2 e sottrai questo dalla metà delle radici, cioè da 5, resta 3. Questa è la radice del quadrato che cerchi e il suo quadrato è 9. Se lo desideri, aggiungi quella alla metà della radice. Ottieni 7, che è la radice del quadrato che cerchi e il cui quadrato è 49."

In termini algebrici moderni l'algoritmo si può esprimere nel modo seguente:

$$x^2 + 21 = 10x$$

$$10:2 = 5$$

$$5 \cdot 5 = 25$$

$$25 - 21 = 4$$

$$\sqrt{4} = 2$$

$$5 - 2 = 3$$

$$x = 3$$

$$x^2 = 9$$

$$2 + 5 = 7$$

$$x = 7$$

$$x^2 = 49$$

E si può riassumere nella formula:

$$x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}.$$

Sono così presentate le due soluzioni positive dell'equazione, seguite dal commento: *"Se tu affronti un problema che si riconduce a questo tipo di equazione, verifica l'esattezza della soluzione con l'addizione, come si è detto. Se non è possibile risolverlo con l'addizione, otterrai certamente il risultato con la sottrazione. Questo è il solo tipo in cui ci si serve dell'addizione e della sottrazione, cosa che non trovi nei tipi precedenti. Devi inoltre sapere che, se in questo caso tu prendi la metà delle radici e la moltiplichi per se stessa e il prodotto risulta minore del numero che è aggiunto al quadrato, allora il problema è impossibile. Se invece risulta uguale al numero, ne segue che la radice del quadrato sarà uguale alla metà delle radici che sono col quadrato, senza che si tolga o si aggiunga qualcosa."*

Gli ultimi due casi corrispondono ad avere discriminante negativo $(\frac{p}{2})^2 < q$, dunque nessuna soluzione in campo reale, e discriminante nullo, vale a dire due soluzioni coincidenti ($x = \frac{p}{2}$).

La dimostrazione geometrica di al-Khwārizmī, distingue due possibilità, corrispondenti alle due soluzioni $x = \frac{p}{2} - \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$ e $x = \frac{p}{2} + \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$.

Della prima è data una costruzione dettagliata, mentre per la seconda si hanno pochi cenni nel testo arabo e alcune figure nelle versioni latine.

Ecco come viene presentata la prima costruzione (Fig. 3):

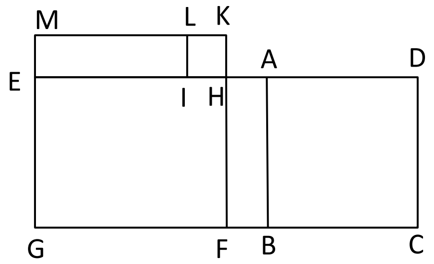

Fig.3

il rettangolo $GCDE$, di lati $GC = p$ e $CD = x$, è formato dal quadrato $ABCD = x^2$ e dal rettangolo $GBAE = (p-x)x = q$. Se si pone $x < \frac{p}{2}$ cosa che al-Khwarizmi non dice esplicitamente, si può innalzare in F, punto medio di GC, la perpendicolare FH e GC e prolungare FH del segmento $HK = AH = \frac{p}{2} - x$. Si costruiscono quindi i quadrati $GFKM = (\frac{p}{2})^2$ e $IHKL = (p/2 - x)^2$.

Dalla costruzione risulta che i rettangoli $EILM$ e $FBAH$ sono congruenti, per cui $IHKL$ risulta essere la differenza fra $GFYM$ e $GBAE$, cioè $(\frac{p}{2} - x)^2 = (\frac{p}{2})^2 - q$.

Dunque:

$$IH = AH = \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q} \quad \text{e} \quad AD = HD - HA,$$

ossia $x = \frac{p}{2} - \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$.

Per la seconda costruzione, al-Khwārizmī dice solo che si ottiene la maggiore delle radici aggiungendo DH a M. È tuttavia quasi certo che egli ne conoscesse la dimostrazione, dal momento che nelle versioni latine si trovano le figure relative. Supponendo infatti (fig. 4) $x > p/2$, il punto F, medio di $GC = p$, cade all'interno di $BC = x$.

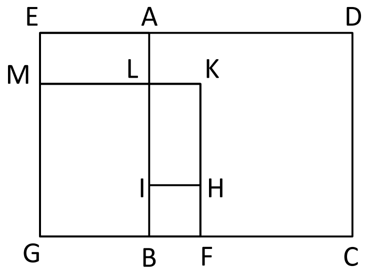

Fig.4

Si prenda $AB = BC$. Il quadrato $BFHI$, avendo lato $BF = x - p/2$, *è* uguale alla differenza del quadrato

$GFKM = (\frac{p}{2})^2$ e della somma delle aree $GBLM + IHKL = GBAE = q$.

Così $BF = \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$ e $x = CF + FB = \frac{p}{2} + \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$.

Sesta tipologia

Al-Khwārizmī presenta poi, come esempio di equazione del **tipo 6,**

$$3x + 4 = x^2$$

di cui considera solo la soluzione positiva e non quella negativa. La regola, espressa in notazioni moderne, relativamente all'equazione $px + q = x^2$,

corrisponde alla soluzione:

$$x = \frac{p}{2} + \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}\ .$$

La dimostrazione geometrica consiste nella costruzione (fig.5) del quadrato $ABCD = x^2$ composto dai rettangoli $ARHD = px$ e $RBCH = x^2 - px = q$.

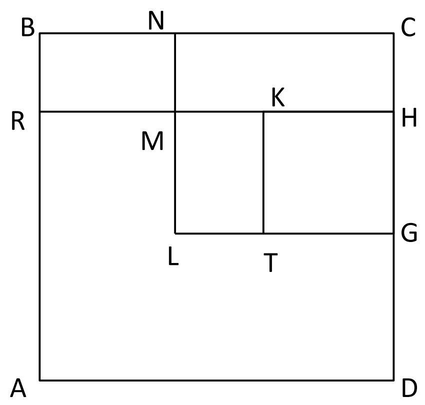

Fig. 5

Sia G il punto medio di HD e si costruisca il quadrato $TKHG = (\frac{p}{2})^2$. Sul prolungamento di TG si prenda $TL = CH = x - p$. Si innalzi in L la perpendicolare a LG, che incontri BC in M e il prolungamento di KH in N. Ora GL risulta uguale a CM e uguale a CG poiché GL=GT+LT=GH+HC e TL = CH = MN, per cui LTKN = BMNR. Dunque MCHN + BMNR = BCHR = *q* = MCNH + LTKN. Inoltre

$$LMCG = TKHG + q = (^p/_2)^2 + q$$

E

$$CG = \sqrt{(^p/_2)^2 + q}$$

Da cui

$$CD = x = CG + GD = \sqrt{(^p/_2)^2 + q} + \frac{p}{2}$$