

Regole di scomposizione delle frazioni

Prima di tutto, bisogna distinguere due tipi di rapporti nelle frazioni fondamentali e nelle frazioni composte, vale a dire i rapporti rappresentati da frazioni il cui denominatore è 60 e i rapporti rappresentati da frazioni il cui numeratore è formato da un numero intero, fratto o misto.

In cima alle quattro regole corrispondenti a queste frazioni sono posizionate quattro tabelle nelle quali le frazioni più comuni vengono rappresentate attraverso frazioni sessagesimali, cioè i numeri il cui denominatore è 60.

Le 4 tabelle sono così definite:

- **La tabella 1** mostra le frazioni principali.

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{7} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{9} \quad \frac{1}{10} \quad 30 \quad 20 \quad 15 \quad 12 \quad 10 \quad 8\frac{4}{7} \quad 7\frac{1}{2} \quad 6\frac{2}{3} \quad 6$$

- **La tabella 2** comprende diverse frazioni composte che vanno da $\frac{2}{3}$ a $\frac{9}{10}$.

Abu-l-Wafā fornisce anche per queste frazioni (ad eccezione di $\frac{2}{3}$) delle “espressioni più eleganti” sotto forma di somme di frazioni principali e di frazioni composte, per esempio:

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \quad \frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{10}, \quad \dots, \quad \frac{9}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{10}$$

- **La tabella 3** comprende alcune somme particolarmente importanti di frazioni prese due a due, per esempio $\frac{1}{2} + \frac{1}{7}$ ecc., fino a $\frac{1}{9} + \frac{1}{10}$.

-
- **La tabella 4** infine fornisce sotto forma sessagesimale alcuni prodotti di frazioni prese due a due, per esempio $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7}$ ecc. fino a $\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{10}$.

Queste tabelle poi vengono tutte utilizzate per scomporre altre frazioni.

- **Rapporti del tipo $\frac{n}{60}$ con n che è un numero intero inferiore a 60.**

Si scompone secondo le seguenti regole:

- Per $n = 10k + 5$, in cui $k = 2, 3, 4, 5$, si sottrae 15 da n al numeratore, cioè si utilizza la trasformazione:

$$\frac{n}{60} = \frac{n-15}{60} + \frac{1}{4}$$

- Per $n = 10k + 2$ e $n = 10k + 7$, in cui $k = 1, 2, 3, 4, 5$ si sottrae 12 da n al numeratore e si ottiene la trasformazione:

$$\frac{n}{60} = \frac{n-12}{60} + \frac{1}{5}$$

- Per $n = 6, 7, 8, 9, n = 10k+1, n = 10k+3, n = 10k+6, n = 10k+8$, in cui $k = 1, 2, 3, 4, 5$, si sottrae 6 da n al numeratore, e cioè:

$$\frac{n}{60} = \frac{n-6}{60} + \frac{1}{10}$$

- Per $n = 10k + 4$ e $n = 10k + 9$, in cui $k = 1, 2, 3, 4, 5$, la trasformazione:

$$\frac{n}{60} = \frac{n-4}{60} + \frac{1}{15}$$

permette di diminuire il numeratore di quattro unità.

Per esempio:

$$\frac{49}{60} = \frac{45}{60} + \frac{4}{60} = \frac{30}{60} + \frac{15}{60} + \frac{4}{60} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{10};$$

Anche il numero $\frac{48}{60}$ non si scrive sotto forma della frazione composta $\frac{4}{5}$, ma secondo questa formula:

$$\frac{48}{60} = \frac{42}{60} + \frac{6}{60} = \frac{30}{60} + \frac{12}{60} + \frac{6}{60} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10}$$

Questo è dovuto al fatto che si preferiva presentare anche le frazioni unificate e le frazioni composte (ad eccezione di $\frac{2}{3}$) sotto forma di frazioni principali e di frazioni composte, benché venissero utilizzate frequentemente nelle operazioni intermedie.

- **Rapporti del tipo $\frac{n+\alpha}{60}$, in cui n è < 60 e in cui α è un numero del tipo $\frac{p}{q}$ o $\frac{p}{q} \cdot \frac{1}{k}$, con $1 \leq p \leq q \leq k \leq 10$ o la somma di più frazioni di questo tipo.**

Abu-l-Wafā fornisce a questo punto un ampio numero di regole per diversi valori di alfa. Senza entrare nei dettagli, possiamo semplicemente notare che in generale la scomposizione di $\frac{n+\alpha}{60}$ non si ottiene attraverso la semplice addizione delle scomposizioni di $\frac{n}{60}$ e di $\frac{\alpha}{60}$, ma tramite un certo numero di scomposizioni ausiliarie che permettono di scrivere il numeratore sotto forma di somme che portano a un risultato completamente diverso.

L'algoritmo della scomposizione non viene sempre utilizzato nello stesso modo: la preferenza ricade sull'espressione o sulle espressioni che si compongono di un numero più piccolo di frazioni principali.

- **Altri rapporti.**

Negli altri casi, la scomposizione viene effettuata moltiplicando il numeratore per 60 e dividendo in seguito la frazione per 60.

Negli esempi di Abu-l-Wafā, si utilizza la trasformazione:

$$\frac{s}{t} = \left(\frac{s \cdot 60}{t}\right) : 60 = \frac{n+\alpha}{60} \quad n < 60, \alpha < 1$$

attraverso la quale la scomposizione viene riportata direttamente ai casi precedenti. Si può anche, in caso di necessità, ripetere il processo moltiplicando di nuovo per 60 e dividendo per 60. Quando altri fattori primi non scomponibili appaiono nel denominatore, il processo di scomposizione, che può essere portato avanti all'infinito, viene interrotto o dopo la prima o dopo la seconda scomposizione.