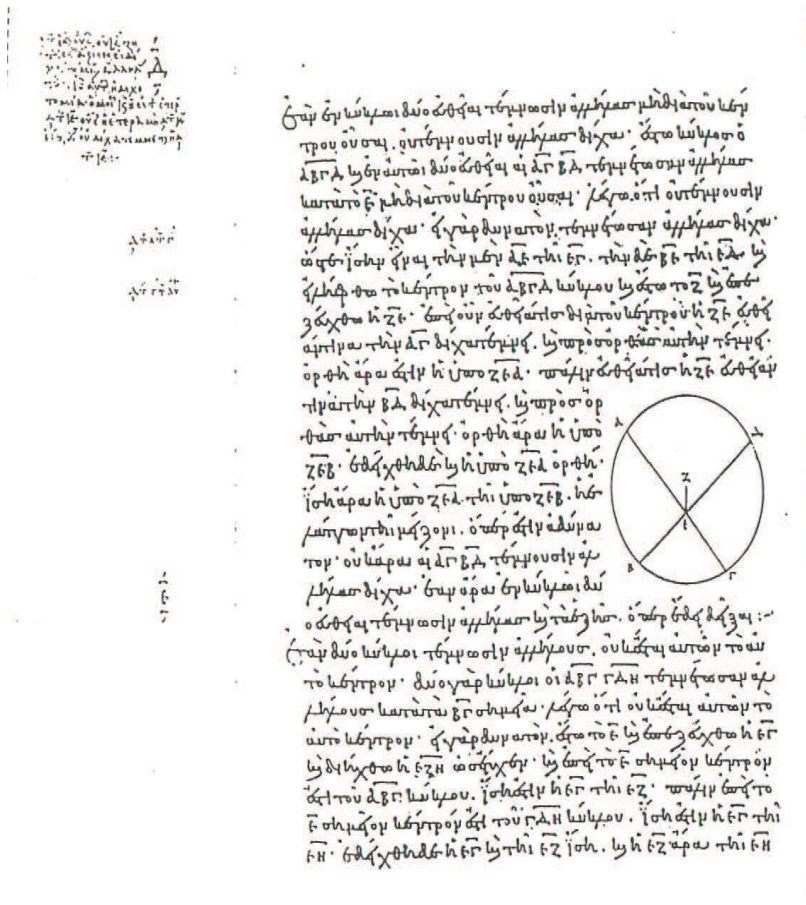


IL PRIMO LIBRO DEGLI "ELEMENTI" DI EUCLIDE

all'origine della discussione sulla teoria delle parallele

Il Libro degli "*Elementi*" di Euclide, che risale al IV-III secolo a.C., è da considerarsi un pilastro per i matematici: per più di due millenni, infatti, ha rappresentato una sorta di "enciclopedia" al centro della cultura e dello sviluppo della matematica sia in Occidente che in Oriente. La versione più antica che ci giunge è in lingua araba.

Costituita da 13 Libri, quest'opera fu composta ad Alessandria ed affronta lo studio di diversi settori specifici della matematica, inglobando i risultati scientifici di cui si era a conoscenza a quei tempi: geometria piana, teoria delle proporzioni, aritmetica, teoria degli irrazionali, geometria solida. In essa, tra l'altro, si riscontra la prima sistemazione assiomatica mai data ad una branca della matematica, la geometria.



Il più antico esemplare degli "*Elementi*"
(trascrizione araba)
Ms. d'Orville 301, Oxford, Bodleian Library (888 d.C.)

Proprio alla geometria sono dedicati i primi libri dell'opera: qui in particolare ci soffermiamo sul Libro I poiché è in questo libro che viene presentata la teoria delle parallele.

Il Libro I degli "*Elementi*" si apre con tre serie di principi, che costituiscono una specie di introduzione generale a tutta l'opera:

- ❖ le *Definizioni* – 23 in tutto – che presentano gli enti geometrici elementari: il punto e la linea . Seguono poi le nozioni di retta, superficie, angolo, figura, cerchio, triangolo, quadrilatero e parallelismo tra rette;
- ❖ i *Postulati* – che sono 5 – contenenti le proprietà fondamentali del punto, delle rette e del cerchio;
- ❖ le *Nozioni comuni* – 8 enunciati – che esprimono principi elementari sul confronto tra le aree.

DEFINIZIONI

- I. *Punto è ciò che non ha parti.*
- II. *Linea è lunghezza senza larghezza.*
- III. *Estremi di una linea sono punti.*
- IV. *Linea retta è quella che giace ugualmente rispetto ai punti su essa (cioè, ai suoi punti).*
- V. *Superficie è ciò che ha soltanto lunghezza e larghezza.*
- VI. *Estremi di una superficie sono linee.*
- VII. *Superficie piana è quella che giace ugualmente rispetto alle rette su essa (cioè, alle sue rette).*
- VIII. *Angolo piano è l'inclinazione reciproca di due linee su un piano, le quali si incontrino fra loro e non giacciono in linea retta.*
- IX. *Quando le linee che comprendono l'angolo sono rette l'angolo si chiama rettilineo.*
- X. *Quando una retta innalzata su una [altra] retta forma gli angoli adiacenti uguali fra loro, ciascuno dei due angoli uguali è retto, e la retta innalzata si chiama perpendicolare a quella su cui è innalzata.*
- XI. *Angolo ottuso è quello maggiore di un retto.*
- XII. *Angolo acuto è quello minore di un retto.*

- XIII. *Termine è ciò che è estremo di qualche cosa.*
- XIV. *Figura è ciò che è compreso da uno o più termini.*
- XV. *Cerchio è una figura piana compresa da un'unica linea [che si chiama circonferenza] tale che tutte le rette, le quali cadano sulla [stessa] linea [cioè sulla circonferenza del cerchio], a partire da un punto fra quelli che giacciono internamente alla figura, sono uguali fra loro.*
- XVI. *Quel punto si chiama centro del cerchio.*
- XVII. *Diametro del cerchio è una retta condotta per il centro e terminata da ambedue le parti dalla circonferenza del cerchio, la quale retta taglia anche il cerchio per metà.*
- XVIII. *Semicerchio è la figura compresa dal diametro e dalla circonferenza da esso tagliata. E centro del semicerchio è quello stesso che è anche centro del cerchio.*
- XIX. *Figure rettilinee sono quelle comprese da rette, vale a dire: figure trilatera quelle comprese da tre rette, quadrilatera quelle comprese da quattro rette, e multilatera quelle comprese da più di quattro rette.*
- XX. *Delle figure trilatera, è triangolo equilatero quello che ha i tre lati uguali, isoscele quello che ha soltanto due lati uguali, e scaleno quello che ha i tre lati disuguali.*
- XXI. *Infine, delle figure trilatera, è triangolo rettangolo quello che ha un angolo retto, ottusangolo quello che ha un angolo ottuso, ed acutangolo quello che ha i tre angoli acuti.*
- XXII. *Delle figure quadrilatera, è quadrato quella che è insieme equilatera ed ha gli angoli retti, rettangolo quella che ha gli angoli retti, ma non è equilatera, rombo quella che è equilatera, ma non ha gli angoli retti, romboide quella che ha i lati e gli angoli opposti uguali fra loro, ma non è equilatera né ha gli angoli retti. E le figure quadrilatera oltre a queste si chiamino trapezi.*

XXIII. *Parallele sono quelle rette che, essendo nello stesso piano e venendo prolungate illimitatamente dall'una e dall'altra parte, non si incontrano fra loro da nessuna delle due parti.*

POSTULATI

Risulti postulato:

- I. *che si possa condurre una linea retta da un qualsiasi punto ad ogni altro punto;*
- II. *e che una retta terminata (cioè finita) si possa prolungare continuamente in linea retta;*
- III. *e che si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro ed ogni distanza (ovvero qualunque raggio);*
- IV. *e che tutti gli angoli retti siano uguali fra loro;*
- V. *e che, se una retta venendo a cadere su due rette forma gli angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti (cioè tali che la loro somma sia minore di due retti), le due rette prolungate illimitatamente verranno ad incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti (cioè dove la cui somma è minore di due retti).*

NOZIONI COMUNI

- I. *Cose che sono uguali ad una stessa sono uguali anche fra loro.*
- II. *E se cose uguali sono addizionate a cose uguali, le totalità sono uguali.*
- III. *E se da cose uguali sono sottratte cose uguali, i resti sono uguali.*
- VII. *E cose che coincidono fra loro sono fra loro uguali.*
- VIII. *Ed il tutto è maggiore della parte.*
- IV. *[E se cose uguali sono addizionate a cose disuguali, le totalità sono disuguali.]*
- V. *[E doppi di una stessa cosa sono uguali fra loro.]*
- VI. *[E metà di una stessa cosa sono uguali fra loro].*

Successivamente vengono presentate 48 *Proposizioni* che rappresentano i primi teoremi della geometria piana. Euclide si avvale sempre dei risultati raggiunti in precedenza per giustificare ciascuna delle sue affermazioni, facendo esplicitamente riferimento, nel corso della trattazione, ai risultati già dimostrati.

Questo modo di procedere viene chiamato "metodo deduttivo".

Interessante è notare che fino alla proposizione 28 l'autore non fa uso dell'ultimo postulato (noto anche come "*postulato delle parallele*"), nonostante per alcune delle proposizioni precedenti la dimostrazione sarebbe stata più semplice e immediata con l'introduzione di esso. Conseguenza di questo espediente è che le prime 28 proposizioni fanno parte della cosiddetta "**geometria assoluta**", ovvero quella geometria che prescinde dal V postulato euclideo.