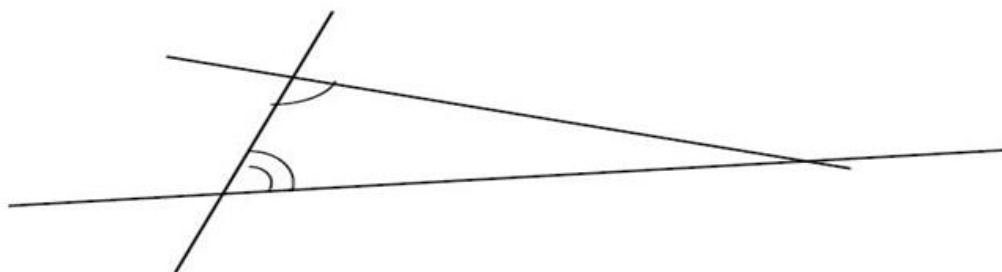


CRITICA AL POSTULATO V

Euclide differisce il coinvolgimento del V postulato il più a lungo possibile nelle dimostrazioni che presenta (le prime 28 proposizioni, infatti, non ne fanno uso e costituiscono la "geometria assoluta"). Egli lo menziona solo quando strettamente necessario, nonostante in alcune proposizioni la dimostrazione sarebbe stata più immediata e semplice se lo avesse introdotto.

Il quinto postulato formulato da Euclide recita così:

*se una retta venendo a cadere su due rette
forma gli angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti
(cioè tali che la loro somma sia minore di due retti),
le due rette prolungate illimitatamente verranno ad incontrarsi
da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti
(cioè dove la cui somma è minore di due retti).*



In effetti, questo postulato presenta diversi aspetti che risultano "problematici" agli occhi degli studiosi: cerchiamo di presentare e spiegare i dubbi sollevati.

A differenza degli altri, enunciati come affermazioni, il quinto postulato è del tipo "se...allora", quindi come struttura più simile ad un teorema che non ad un asserto.

Da questa osservazione probabilmente nacque l'esigenza di doverlo "dimostrare".

Il postulato V non si presenta semplice ed evidente come i quattro precedenti e inoltre il suo enunciato è la proposizione inversa della proposizione I,28 che Euclide dimostra. Già i più antichi commentatori del testo euclideo, infatti, si erano cimentati

nel tentativo di dimostrarlo: Posidonio e Gemino (I sec a.C.), Tolomeo (87-165 d.C.), Proclo (V sec. d.C.), Simplicio e Aganis (VI sec. d.C.).

Anche in epoca più moderna, molti matematici si addentrarono nella dimostrazione, pur essendo consapevoli di quanto questa "questione" fosse spinosa: Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855), professore all'Università di Göttingen, per esempio, non ritenne di doversi esporre e non pubblicò mai i suoi risultati in merito, per evitare, come egli stesso disse, «le strida dei beoti». Peggio ancora andò all'ungherese Janos Bolyai (1802 - 1860), figlio di Farkas Bolyai (1775 - 1856) il quale a sua volta aveva studiato la teoria delle parallele. Farkas così dissuadeva il figlio, brillante ufficiale dell'esercito, dall'occuparsene: «Per amor del cielo, ti imploro di desistere dal tentativo. Il problema delle parallele è una cosa da temere non meno delle passioni dei sensi, poiché anch'esso può rubarti tutto il tempo, e privarti della salute, della serenità di spirito, e della felicità».

La sfida consisteva nel dimostrare il V postulato a partire dagli assiomi e dagli altri postulati. Ma, come venne dimostrato successivamente, il problema era impossibile, poiché il postulato V non è conseguenza dei precedenti, è cioè indipendente da essi.

I commentatori del testo euclideo discussero in prima analisi la definizione di **parallelismo di due rette** data da Euclide: seguendo la sua impostazione realizzarono che questa condizione non può essere verificata se non attraverso un prolungamento all'infinito; peraltro la definizione di Euclide si presenta in forma grammaticale negativa, considerata "difettosa". Per questi motivi molti autori, antichi e moderni, ritennero opportuno sostituirla con un'altra, espressa in positivo e che non facesse ricorso all'infinito: quella di rette equidistanti. In realtà, la difficoltà così viene solo spostata, poiché a questo punto bisognava dimostrare che *il luogo dei punti equidistanti da una retta è ancora una retta*, e verrà dimostrato che questa proposizione è di fatto equivalente al postulato V.

Questo procedimento condusse ad una serie di "dimostrazioni" del postulato V che, nella maggior parte dei casi, consistevano nell'ammettere, tacitamente o

esplicitamente, al posto del postulato V una proposizione (ritenuta più evidente) ad esso equivalente. Riportiamo le più utilizzate.

Molti furono i matematici che si cimentarono in questa "dimostrazione". Di seguito elenchiamo i principali: come si può osservare compaiono anche diversi autori arabi.

- ❖ Posidonio (I sec. a.C.)
- ❖ Tolomeo (87-165 d.C.)
- ❖ Gemino (I sec. a.C.)
- ❖ Proclo (V sec. d.C.)
- ❖ Aganis (VI sec. d.C.)
- ❖ Simplicio (VI sec. d.C.)
- ❖ Al-Jawhari (800 ca.-860 d.C.)
- ❖ Qurra (826-901 d.C.)
- ❖ Al-Haytham (965-1039 d.C.)
- ❖ Al-Khayyam (1045 ca.-1125)
- ❖ Nasir ad-Din at-Tusi (1201-1274)
- ❖ Al-Maghribi (1130 ca.-1180 ca.)
- ❖ Samarkandi (1250 ca.-1310 ca.)
- ❖ Leon de Bagnols (Gersonide) (1288-1344)
- ❖ Cristoforo Clavio (1537-1612)
- ❖ Pietro Antonio Cataldi (1552-1626)
- ❖ Giovanni Alfonso Borelli (1608-1679)
- ❖ Vitale Giordano da Bitonto (1633-1711)
- ❖ André Tacquet (1616-1669)
- ❖ John Wallis (1616-1703)
- ❖ Gerolamo Saccheri (1667-1733)
- ❖ Johann Heinrich Lambert (1728-1777)
- ❖ Joseph Louis Lagrange (1736-1813)
- ❖ Adrien Marie Legendre (1752-1833)

- ❖ Carl Friedrich Gauss (1777-1855)
- ❖ Nikolai Ivanovic Lobacevskij (1793-1853)
- ❖ Janos Bolyai (1802-1860)

PROPOSIZIONI EQUIVALENTI AL POSTULATO V

- ❖ Per un punto esterno ad una retta passa una sola parallela ad una retta data.
[Haytham, Playfair]
- ❖ Due rette parallele ad una terza sono parallele tra loro.
- ❖ Se una retta incontra una di due parallele incontra anche l'altra. [Proclo]
- ❖ Gli angoli coniugati formati da due parallele con una trasversale sono supplementari. [Tolomeo]
- ❖ Due rette parallele sono equidistanti.
- ❖ Il luogo dei punti equidistanti da una retta è una retta.
- ❖ Dato un triangolo si può sempre costruire un triangolo simile di grandezza arbitraria. [Wallis]
- ❖ Per tre punti non allineati passa sempre una sfera. [Bolyai]
- ❖ Per un punto situato fra i lati di un angolo passa sempre una retta che interseca i due lati dell'angolo. [Legendre, Lorenz]
- ❖ La somma degli angoli di un triangolo è uguale a due angoli retti. [Saccheri]
- ❖ Se due rette 'r' e 's' sono l'una perpendicolare e l'altra obliqua alla trasversale AB, i segmenti di perpendicolare calati dai punti di 's' su 'r' sono minori di AB, dalla parte da cui AB forma con 's' un angolo acuto. [Tusi]

