

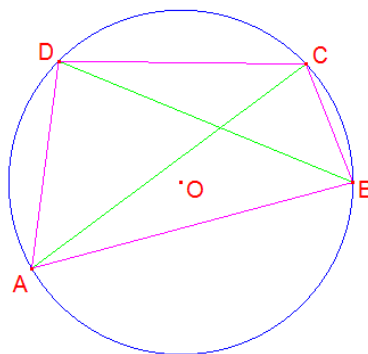
## Il metodo di al-Kashi per la trisezione dell'angolo

L'equazione della trisezione dell'angolo si basa all'origine su due importanti teoremi: quello di Tolomeo e quello di Euclide, conseguentemente ai quali quando due corde si intersecano in un cerchio il prodotto dei segmenti di una determinati dall'intersezione una è uguale al prodotti dei segmenti dell'altra, determinati dall'intersezione.

- **Teorema di Tolomeo**

*Il teorema di Tolomeo stabilisce che: se un quadrilatero è inscritto in una circonferenza, la somma dei prodotti delle coppie di lati opposti è uguale al prodotto delle sue diagonali. In altre parole, dato un quadrilatero ABCD inscritto in una circonferenza, vale la seguente relazione:*

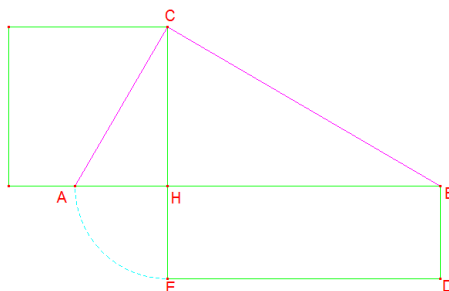
$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$$



- **Teorema di Euclide**

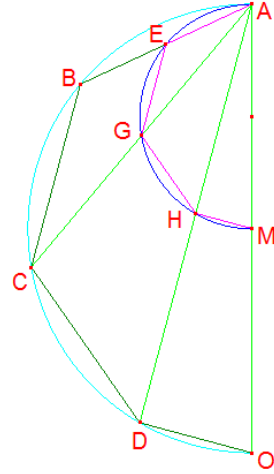
*Il teorema di Euclide stabilisce che: in un triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo che ha per lati le proiezioni dei due cateti sull'ipotenusa; ossia vale la seguente relazione:*

$$CH^2 = BH \cdot BD$$



Per ricavare l'equazione che risolve il problema della trisezione consideriamo una semicirconferenza  $ABO$  di raggio  $R$ .

Supponiamo che le porzioni di archi  $\widehat{AB}, \widehat{BC}$  e  $\widehat{CD}$  siano uguali. Costruiamo sul semidiametro  $AM$  un'altra semicirconferenza  $AEM$ , se tracciamo le corde  $AB, AC$  e  $AD$ , allora le porzioni di archi  $\widehat{AE}, \widehat{EG}$  e  $\widehat{GH}$  di questa circonferenza saranno uguali tra loro. Il valore della corda  $AH$  è noto, bisogna trovare quello della corda che sottende l'arco  $\widehat{AE}$ .



Ora applichiamo al quadrilatero  $AEGH$  il teorema di Tolomeo ( $AE = EG = GH$  e  $AG = EH$ ):

$$AE^2 + AE \cdot AH = AG^2 \quad (1)$$

Siccome  $AG = GC$  (un raggio che cade perpendicolarmente divide una corda in due parti uguali), si ottiene grazie al teorema di Euclide:

$$AG^2 = BG \cdot (2R - BG) \quad (2)$$

In più  $AB^2 = BG \cdot 2R$  (oppure  $BG = \frac{AB^2}{2R}$ ), equivalentemente

$$AB = 2AE \quad (\text{oppure } BG = \frac{2AE^2}{R}).$$

Sostituendo  $BG$  nella (2), otteniamo:

$$AG^2 = 4AE^2 - \frac{4AE^4}{R^2} \quad (3)$$

L'equazione della trisezione di un angolo qualunque si ottiene sostituendo la (3) nella (1):

$$4AE^3 + R^2 \cdot AH = 3R^2 \cdot AE. \quad (4)$$

Se indichiamo con  $6\alpha$  l'angolo intercettato dall'arco  $\widehat{AH}$  e con  $2\alpha$  l'angolo intercettato dall'arco  $\widehat{AE}$ , abbiamo  $AH = R \sin 3\alpha$  e  $AE = R \sin \alpha$  che sono dati dalla nota formula dell'angolo triplo:

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha.$$

Ponendo  $R = 60$  e l'arco  $AH = 6^\circ$ . Si può calcolare il  $\sin 3^\circ$  grazie alle formule trigonometriche partendo dal  $\sin 72^\circ$  (ossia il lato di un pentagono regolare) e dal  $\sin 60^\circ$ . Si pone come incognita:

$$AE = 60 \cdot \sin 1^\circ = x,$$

e risulta:

$$AH = 60 \cdot \sin 3^\circ = 3 \ 8 \ 24 \ 24 \ 59 \ 34 \ 28 \ 15 \quad \text{settimi},$$

si ottiene così l'equazione:

$$45 \cdot 60x = x^3 + 47 \ 6 \ 8 \ 29 \ 51 \ 53 \ 37 \ 3 \ 45 \quad \text{settimi.}$$

Il metodo iterativo di al-Kashi per risolvere l'equazione della forma:

$$x = \frac{q + x^3}{p} \quad (5)$$

è il seguente:

sia,

$$x = a + b + c + \dots, \quad (6)$$

$a$ ,  $b$ ,  $c$  sono i valori numerici successivi in unità sessagesimali, calcolati a partire dalla prima cifra non nulla.

Siccome sappiamo che la radice cercata è molto piccola, possiamo trascurare la terza potenza ed ottenere, con l'aiuto dell'equazione 6, il primo valore approssimato come "primo quoziente" dalla divisione del "dividendo" (ossia del termine costante  $q$ ) con il "divisore" (ossia il coefficiente  $p$  della prima potenza dell'incognita). L'operazione continua fino alla prima cifra non nulla:

$$x_1 = \frac{q}{p} \approx a.$$

Sostituendo  $x_1$  dentro al membro destro dell'equazione 5 il valore della radice aumentando di un'unità ossia  $(a + b)$  e nel membro a destra il primo valore approssimato di  $a$ .

Si ottiene così il primo termine correttivo o il "secondo quoziente" dalla divisione:

$$\frac{q - ap + a^3}{p} = b + \dots,$$

poi utilizza di nuovo la prima cifra non nulla del quoziente (che come ben sappiamo, nel sistema decimale, può essere rappresentato da un numero a due unità).

si ottiene allo stesso modo il secondo termine correttivo o il "terzo quoziente" di:

$$\frac{(q - ap + a^3) - bp + [(a + b)^3 - a^3]}{p} = c + \dots,$$

o in modo equivalente:

$$\frac{q - (a + b)p + (a + b)^3}{p} = c + \dots, \quad \text{ecc.}$$

Se indichiamo i valori approssimativi successivi con  $x_1 = a$ ,  $x_2 = a + b$ ,  $x_3 = a + b + c$ , ecc. otteniamo:

$$\begin{aligned} x_1 &= a, \\ x_2 &= \frac{q + a^3}{p} = \frac{q + x_1^3}{p}, \\ x_3 &= \frac{q + (a + b)^3}{p} = \frac{q + x_2^3}{p} \end{aligned}$$

4

e in generale, tenendo conto di un numero necessario di cifre sessagesimali:

$$x_n = \frac{q + x_{n-1}^3}{p}.$$

Il procedimento di al-Kashi viene così iterato tante volte quante le cifre della radice volute. In ogni processo di iterazione si deve elevare al cubo il valore approssimato ottenuto dalla fase precedente ed effettuare la divisione.

Al-Kashi determinò in questo modo il  $\sin 1^\circ$  con la stessa accuratezza che ebbe nel calcolo di  $\pi$ , ovvero in notazione decimale risulta:

$$\sin 1^\circ = 0,017\ 452\ 406\ 437\ 283\ 571.$$