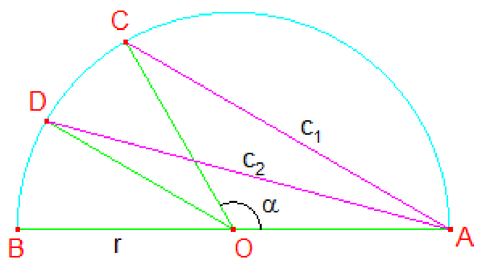
L'approssimazione di π secondo al-Kashi

Al-Kashi calcola il π in modo tale che soddisfi una condizione, detta "Condizione di Al-Kashi":

"La circonferenza di un cerchio deve essere espressa in funzione del diametro con una precisione tale che l'errore sulla lunghezza di una circonferenza di diametro uguale a 600000 volte il diametro della Terra sia minore dello spessore di un capello."

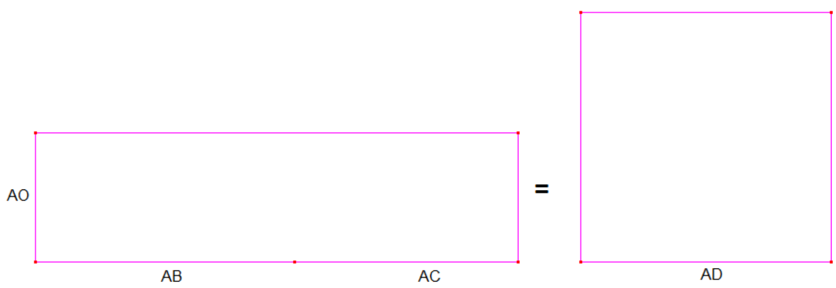
Al-Kashi basa il calcolo della circonferenza sul calcolo del perimetro dei poligoni regolari inscritti e circoscritti. Egli determina, per un raggio di cerchio 60, i valori delle corde c_n che sottendono archi uguali a $\alpha_n = 180° - \frac{60°}{2^{n-1}}$; ad esempio c_1, c_2, c_3, c_4 sottendono archi rispettivamente di $120°, 150°, 165°, 172,5°$.



Semicirconferenza con corda c_1 di un arco di$120°$ e c_2 di un arco di $150°$.

Il calcolo si basa sulla seguente

0.0.1 Proposizione. *Il rettangolo che ha come lati il raggio OA, e la somma del diametro AB e della corda che sottende un arco $\overset{\frown}{AC}$ inferiore ai $180°$, ha area uguale al quadrato della corda AD che sottende un arco uguale alla somma dell'arco $\overset{\frown}{AC}$ e dell'arco $\frac{\overset{\frown}{180°} - \overset{\frown}{AC}}{2}$ (con arco di $180°$ si intende la semicirconferenza).*



Prop 2.2.1. *Rettangolo di lati $(AB + AC)$ e AO e quadrato di lato AD.*

Dimostrazione. Ciò che dobbiamo dimostrare è che $AO \cdot (AB + AC) = AD^2$.

Sappiamo che l'arco $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{AC} + \dfrac{180° - \overset{\frown}{AC}}{2} = \dfrac{180° + \overset{\frown}{AC}}{2}$, e se chiamiamo come in figura α l'angolo sotteso dall'arco $\overset{\frown}{AC}$, allora l'angolo sotteso dall'arco $\overset{\frown}{AD}$ è dato da $\dfrac{\pi + \alpha}{2}$.

Ora $AC = 2r \sin \dfrac{\alpha}{2}$ e di conseguenza $AO \cdot (AB + AC) = r\big(2r + 2r \sin \dfrac{\alpha}{2}\big) = 2r^2\big(1 + \sin \dfrac{\alpha}{2}\big)$.

Mentre per lo stesso ragionamento:

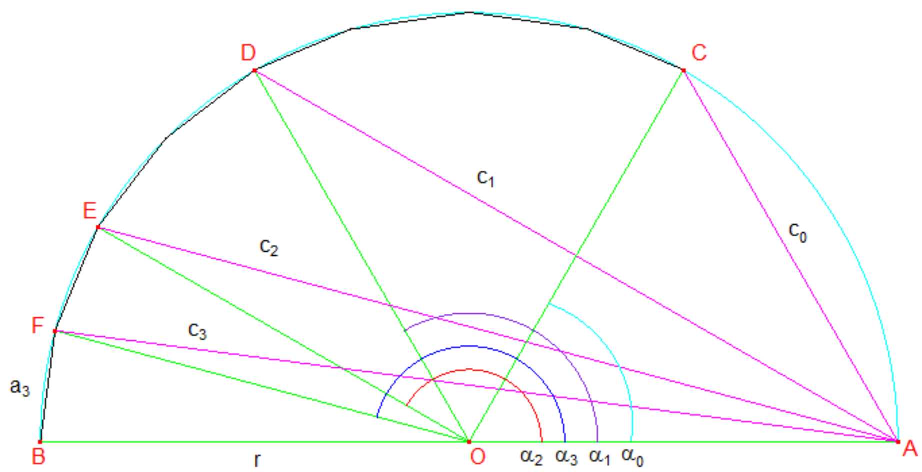
$AD = 2r \sin \dfrac{\pi + \alpha}{4} = 2r \sin\big(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\alpha}{4}\big) = 2r\big(\cos \dfrac{\pi}{4} \cdot \sin \dfrac{\alpha}{4} + \cos \dfrac{\alpha}{4} \cdot \sin \dfrac{\pi}{4}\big) =$
$r\sqrt{2}\big(\cos \dfrac{\alpha}{4} + \sin \dfrac{\alpha}{4}\big)$.

Di conseguenza $AD^2 = 2r^2\big(\cos \dfrac{\alpha}{4} + \sin \dfrac{\alpha}{4}\big)^2 = 2r^2\big(1 + 2\cos \dfrac{\alpha}{4} \sin \dfrac{\alpha}{4}\big) =$
$= 2r^2\big(1 + \sin \dfrac{\alpha}{2}\big) = AO \cdot (AB + AC)$. □

Grazie a questa Proposizione, e tenendo conto di quanto detto sopra possiamo esprimere una qualsiasi delle corde c_n come:

$$\frac{d}{2}(d + ch_\alpha) = [ch_{\left(\frac{180° + \alpha}{2}\right)}]^2, \tag{1}$$

con d il diametro e ch_α la corda che sottende l'arco $\overset{\frown}{AC} = \alpha$ della figura.



Semicirconferenza esemplificatrice del ragionamento di Al-Kashi. a_3 risulta essere il lato del poligono inscritto cercato di $3 \cdot 2^3$ lati.

n	$\alpha_n = 180° - \frac{60}{2^{n-1}}$	$180° - \alpha_n$	n lati
0	$\alpha_0 = 60°$	120°	$3 \cdot 2^0$
1	$\alpha_1 = 120°$	60°	$3 \cdot 2^1$
2	$\alpha_2 = 150°$	30°	$3 \cdot 2^2$
3	$\alpha_3 = 165°$	15°	$3 \cdot 2^3$
4	$\alpha_4 = 172,5°$	7,5°	$3 \cdot 2^4$

Tabella con i primi 5 termini della successione di α_n

Se poniamo $\dfrac{180° + \alpha}{2} = \alpha_n$ allora $\alpha = \alpha_{n-1}$, e come si nota pure dalla figura avremo:

$$(ch_{\alpha_n})^2 = \frac{d}{2}(d + ch_{\alpha_{n-1}}) \tag{2}$$

con $\alpha_0 = 60°$. Chiamando ch_{α_n} semplicemente c_n si ha:

$$c_n = \sqrt{r(2r + c_{n-1})}. \tag{3}$$

La successione di corde c_n serve a calcolare la misura del lato del poligono inscritto, poiché la corda a_n che sottende l'arco di angolo supplementare a α_n è giustamente il lato del poligono regolare inscritto di $3 \cdot 2^n$ lati (partendo dall'angolo di 60° si divide il suo supplementare, 120°, n volte).
Grazie al Teorema di Pitagora, abbiamo:

$$a_n^2 = \sqrt{d^2 - c_n^2}. \tag{4}$$

Le ulteriori operazioni, effettuate nel sistema sessagesimale, comprendono operazioni razionali ed estrazioni di radici, come nelle equazioni 3 e 4. Prima di effettuare i calcoli, al-Kashi determina:

- Il numero dei lati di un poligono inscritto da $3 \cdot 2^n$ lati, ove il perimetro permette di ottenere la precisione voluta nel calcolo della circonferenza.
- Il numero sufficiente di ordini sessagesimali per tutti i c_n e le grandezze ausiliarie.

Osserva che in un cerchio di diametro uguale a 600000 volte quello della Terra, un ottavo, ovvero $\frac{1}{60^8}$ di grado, non supera lo spessore di un capello. Ne segue che la precisione voluta è ottenuta non appena determiniamo i perimetri P e p dei poligoni circoscritti e inscritti in modo che la loro differenza non superi $\frac{1}{60^8}$; oppure se passiamo al cerchio di raggio 1 (e non più 60), non deve superare $\frac{1}{60^9}$. In altre parole, significa che la differenza dei perimetri deve soddisfare la seguente condizione:

$$P - p < \frac{1}{60^9},\ r = 1. \tag{5}$$

Dopo aver valutato la differenza tra i due perimetri, al-Kashi fornisce una stima della lunghezza dei lati di un poligono inscritto e uno circoscritto, nella quale trova, in un modo estremamente acuto, la precisione necessaria per rendere trascurabili le piccole differenze.
Indichiamo con h l'apotema del poligono inscritto, con r il raggio del cerchio, e con s la differenza $r - h$, ovvero il vettore segmento circolare corrispondente. Se r è l'apotema del poligono circoscritto risulta che i triangoli in cui sono suddivisi entrambi i poligoni sono simili e di conseguenza:

$$\frac{P}{p} = \frac{r}{h}, \frac{P - p}{p} = \frac{r - h}{h} = \frac{s}{r - s}. \tag{6}$$

Grazie ad Archimede, il rapporto tra la circonferenza C e il raggio r soddisfa le seguenti disuguaglianze: $6 < \frac{C}{r} < 6\frac{2}{7} = \frac{44}{7}$, di modo che:

$$\frac{1}{6} - \frac{r}{C} < \frac{1}{6} - \frac{7}{44} = \frac{22-21}{132} = \frac{1}{132} < \frac{1}{126}. \tag{7}$$

Usando 5, 6, 7, possiamo determinare il numero cercato di lati del poligono inscritto. Quando tale numero è abbastanza grande, ovvero quando p differisce di poco da C e quindi il vettore s del segmento circolare è trascurabile, le equazioni 6 possono essere riscritte come:

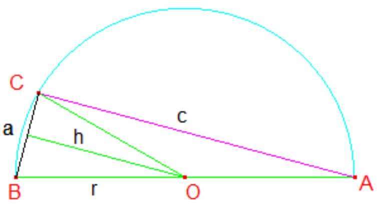
$$\frac{P-p}{p} \approx \frac{P-p}{C} \approx \frac{s}{r}.$$

Quindi grazie a 5 e 7, ora abbiamo:

$$\frac{P-p}{C} < \frac{r}{60^9} \cdot \frac{1}{C} \approx \frac{1}{60^9}\left(\frac{1}{6} - \varepsilon\right), \ \varepsilon < \frac{1}{126}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6} - \varepsilon \approx \frac{8}{60} \Rightarrow \frac{P-p}{C} \approx \frac{s}{r} \approx \frac{8}{60^{10}}$$

E di conseguenza per $r = 60$ otteniamo $s = \frac{8}{60^9}$. Al-Kashi fornisce quindi una stima della corda c che sottende l'arco di angolo supplementare a quello sotteso dal lato del poligono inscritto.



Egli considera che la corda c sia uguale al doppio dell'apotema del poligono inscritto, h:

$$c \approx 2h = 2(r-s) \approx 2r - \frac{16}{60^9} \tag{8}$$

Grazie a 4 e 8, ottiene la seguente stima del lato del poligono inscritto:

$$a \approx \sqrt{(2r)^2 - (2r-2s)^2} = \sqrt{8rs - 4s^2}$$

e, nel caso di un cerchio di raggio 60:

$$a < \sqrt{8rs} = \sqrt{\frac{64}{60^8}} = \frac{8}{60^4}. \tag{9}$$

In questo modo la precisione voluta per la misura del cerchio sarà ottenuta non appena il poligono inscritto di un cerchio di raggio 60 abbia lato non superiore a 8 quarti (9).
Al-Kashi costruisce dunque una tabella degli archi, dividendo a metà un certo numero di volte l'arco di angolo 120°. Dopo 28 di queste divisioni, ottiene un arco più piccolo di 6 quarti, la cui corda soddisfa la disuguaglianza 9.
Il numero di lati di un poligono inscritto deve allora essere uguale a $3 \cdot 2^{28} = 805306368$.

Il calcolo delle corde $c_1, ..., c_{28}$ è contenuto in 28 tabelle estremamente dettagliate. Il calcolo delle radici quadrate, richiesto per l'equazione 3, è verificato attraverso degli elevamenti al quadrati ausiliari.

Se poniamo $r = 60$, otteniamo:

$$c_k = 60\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+\sqrt{3}}}},$$

con k il numero dei radicali presenti.

0.0.2 Esempio. Calcoliamo la corda c_3.

$$c_3 = \sqrt{r(2r+c_2)} = \sqrt{r(2r+\sqrt{r(2r+\sqrt{r(2r+c_0)})})}$$

$$\Rightarrow c_3 = \sqrt{60(2\cdot 60+\sqrt{60(2\cdot 60+\sqrt{60(2\cdot 60+60)})})} =$$
$$= \sqrt{60(2\cdot 60+\sqrt{60(2\cdot 60+60\sqrt{3})})} = \sqrt{60(2\cdot 60+60\sqrt{2+\sqrt{3}})} =$$
$$= 60\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}.$$

Dopo aver determinato, alla fine della 28esima tavola, il quadrato del lato cercato: $a_{28}^2 = d^2 - c_{28}^2$, otteniamo il lato stesso.
Per $r = 1$ abbiamo quindi:

$$a_{28} = \sqrt{4-2-\sqrt{2+...+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} = \sqrt{2-\sqrt{2+...+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}.$$

Al-Kashi determina il perimetro del poligono inscritto di $3\cdot 2^{28}$ lati. L'uguaglianza approssimata

$$\frac{P_{28}-p_{28}}{p_{28}} \approx \frac{r-\frac{c_{28}}{2}}{\frac{c_{28}}{2}} \Rightarrow P_{28} \approx (\frac{r-\frac{c_{28}}{2}}{\frac{c_{28}}{2}}\cdot p_{28}) + p_{28}$$

fornisce, grazie a 8, il perimetro del poligono circoscritto. Infine, al-Kashi prende come lunghezza della circonferenza la media aritmetica $\frac{P_{28}+p_{28}}{2}$ che per il raggio di 60, risulta essere:

$$6\ 16\ 59^{i}\ 28^{ii}\ 1^{iii}\ 34^{iv}\ 51^{v}\ 46^{vi}\ 14^{vii}\ 50^{viii}.$$

Lo stesso numero fornisce, per $r = 1$, il valore 2π se spostiamo tutte le cifre di una posizione sessagesimale verso destra, dividendo cioè tutto per 60. Tutte e 10 le cifre sessagesimali del risultato sono esatte, e dunque al-Kashi verifica ancora una volta i suoi calcoli e mostra che gli errori che possono essere stati introdotti nelle ultime cifre dei valori intermedi, non hanno influenzato il risultato finale.

Al-Kashi converte ora il valore 2π in decimali: $2\pi = 6,2831853071795865$, ove il numero delle cifre concorda con quello delle cifre del sistema sessagesimale. Infatti:

$$\frac{1}{10^{16}} - \frac{1}{60^9} < \frac{1}{2\cdot 60^{10}}.$$

È proprio all'interno del *Trattato sul cerchio* che i decimali sono apparsi per la prima volta in un'opera di al-Kashi.