Il *Trattato sul quadrilatero completo*

Di seguito viene presentata una trattazione approfondita dei primi 5 libri dell'opera di al-Tusi.

Libro I

Nel primo libro si introducono alcune nozioni riguardanti "la quantità di un rapporto" che serviranno alla comprensione del contenuto dei libri successivi, le teorie sulle quali si basa l'autore fanno riferimento ad Al-Hayyam.
Diamo due definizioni fondamentali.

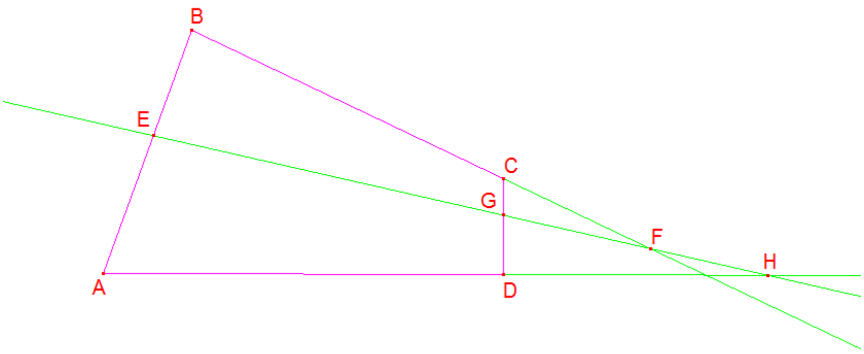
0.1 Definizione. Si definisce quantità del rapporto $\frac{A}{B}$, il numero Q tale che $\frac{Q}{1} = \frac{A}{B}$, ossia l'equivalente dei nostri numeri reali.

0.2 Definizione. La quantità di due rapporti è uguale al prodotto del rapporto delle singole quantità.

Libro II

Nel secondo libro l'autore espone parecchie varianti della dimostrazione del teorema di Menelao per le differenti forme piane del quadrilatero completo. Le dimostrazioni sono semplici e tutte basate sulla similitudine dei triangoli.
Il teorema di cui si occupa è il seguente.

0.0.1 Teorema. *Consideriamo un quadrilatero qualsiasi $ABCD$ e una retta non parallela ai sui lati ma che li interseca oppure interseca le loro estensioni, allora il teorema di Menelao sul quadrilatero completo stabilisce che*



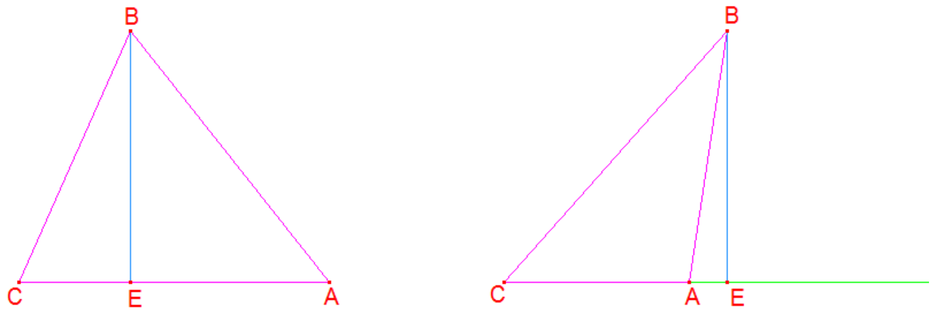
$$\frac{AE}{EB} \cdot \frac{BF}{FC} \cdot \frac{CG}{GD} = \frac{HA}{DH}.$$

Libro III

Nel terzo libro al-Tusi introduce le nozioni di seno e coseno di un arco, dimostra alcuni lemmi e calcola due archi a partire dalla loro somma o differenza e il rapporto dei loro seni (temi già trattati nell'Almagesto di Tolomeo).
Nello stesso libro l'autore risolve i triangoli piani, prima quelli rettangoli poi quelli qualunque, sottolineando il fatto che almeno un lato del triangolo deve essere noto.
Al Tusi per procedere alla risoluzione distingue prima due metodi: il metodo degli archi

e delle corde e il metodo degli archi e dei seni.
Espone prima il metodo degli archi e delle corde, iniziando con un triangolo rettangolo e considerandone 3 sotto casi; poi rivolge la sua attenzione ad un triangolo qualunque, dividendo i suoi studi in 4 sotto casi, di cui ne analizzeremo solo 2.

Primo caso
Consideriamo un triangolo qualunque di cui conosciamo due lati e l'angolo compreso, come ad esempio l'angolo $\hat{A}$ si trova tra i lati AB e AC. Abbassando da B su AC la perpendicolare BE, otteniamo un triangolo rettangolo BEA di cui conosciamo l'angolo $\hat{A}$ e il lato BA. Ora rimangono da ricavare i lati BE e AE.



Se consideriamo la $crd2\hat{A}$, in una circonferenza di centro A e raggio $AB = 60$, essa risulta essere il doppio del segmento BE e la sua misura è ottenuta dalle tavole delle corde. Il lato BE quindi soddisfa l'equazione:

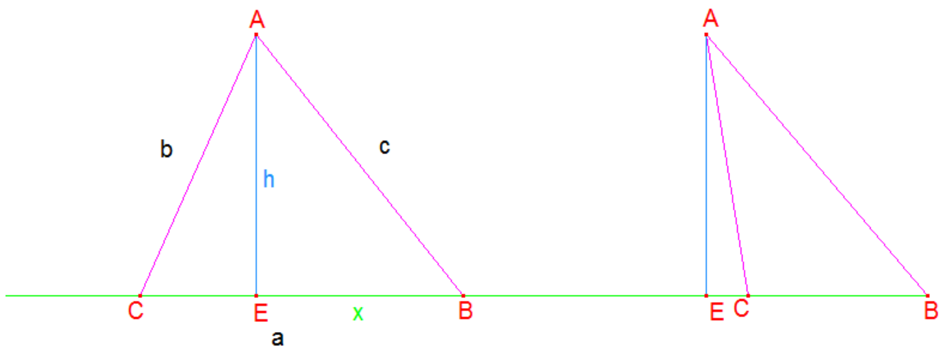
$$\frac{BE}{BA} = \frac{\frac{1}{2}crd2\hat{A}}{60}$$

e il lato AE possiamo calcolarlo grazie al teorema di Pitagora. Di conseguenza, $CE = CA \pm EA$, BC è ottenuto anch'esso dal teorema di Pitagora e la $crd2\hat{C}$ si ricava allo stesso modo dall'equazione:

$$\frac{BE}{BC} = \frac{\frac{1}{2}crd2\hat{C}}{60}$$

il valore di $2\hat{C}$ si ottiene dalla tabella delle corde e dunque $\hat{C}$ sarà la metà di questo valore.

Secondo caso
Consideriamo un triangolo qualunque ABC di cui conosciamo i tre lati. Indicando con $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ i tre angoli e con a, b, c rispettivamente la lunghezza dei lati opposti.



Se denotiamo con h la perpendicolare AE e con x il segmento BE otteniamo grazie al teorema di Pitagora che

$$c^2 = x^2 + h^2$$

e

$$b^2 = (a-x)^2 + h^2 = a^2 - 2ax + x^2 + h^2 = a^2 - 2ax + c^2.$$

Da cui si ricava il valore

$$x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}.$$

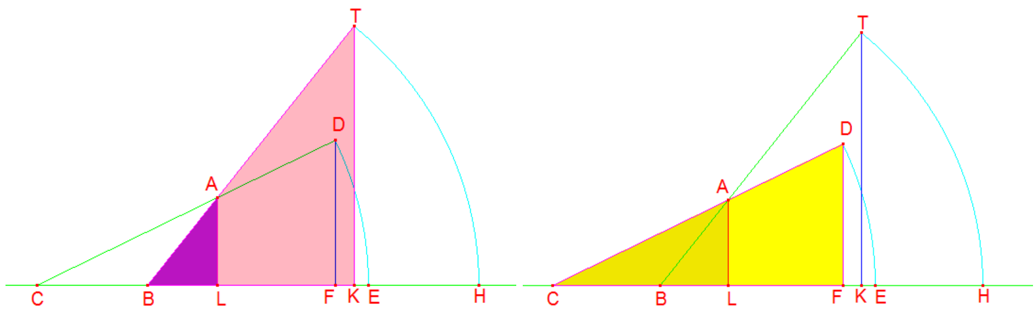
Il secondo metodo utilizzato da al-Tusi riguarda gli archi e i seni. Stabilisce che il rapporto dei lati di un triangolo è uguale al rapporto dei seni degli angoli opposti ai lati considerati, ossia dato un triangolo ABC si ha che

$$\frac{AB}{AC} = \frac{\sin \hat{C}}{\sin \hat{B}}.$$

Per poter applicare questo metodo, l'autore dimostra il teorema dei seni, considerando i 3 casi in cui l'angolo in $\hat{B}$ è ottuso, retto o acuto.
Andiamo ad analizzare il caso dell'angolo retto.

0.0.2 Teorema. *In ogni triangolo è costante il rapporto fra ogni lato e il seno dell'angolo opposto, ossia*

$$\frac{AB}{\sin \hat{C}} = \frac{CB}{\sin \hat{A}} = \frac{CA}{\sin \hat{B}}$$



Dimostrazione. Consideriamo il triangolo ABC. Prolungando il lato CB fino ad E con $CE = 60$, da C con raggio CE, descriviamo l'arco di circonferenza $\widehat{DE}$. Prolunghiamo poi il lato CA fino ad incontrare l'arco in D. Ora, abbassiamo la perpendicolare DF dal punto D al lato CE, che rappresenta il $\sin \hat{C}$. Allo stesso modo si descrive il secondo triangolo partendo dal prolungamento del lato CB, con $BH = 60$ e ripercorrendo gli stessi passaggi.
Per la similitudine dei triangoli ABL e TBK otteniamo che

$$\frac{AB}{AL} = \frac{TB(raggio)}{TK},$$

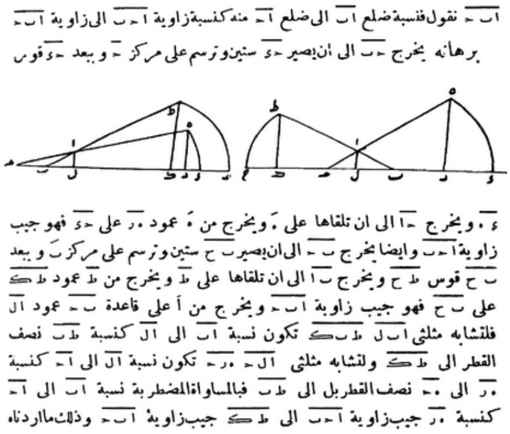
allo stesso modo per la similitudine dei triangoli ALC e DFC

$$\frac{AL}{AC} = \frac{DF}{DC(raggio)}.$$

Moltiplicando le due relazioni precedenti abbiamo

$$\frac{AB}{AC} = \frac{\sin \hat{C}}{\sin \hat{B}}.$$

□

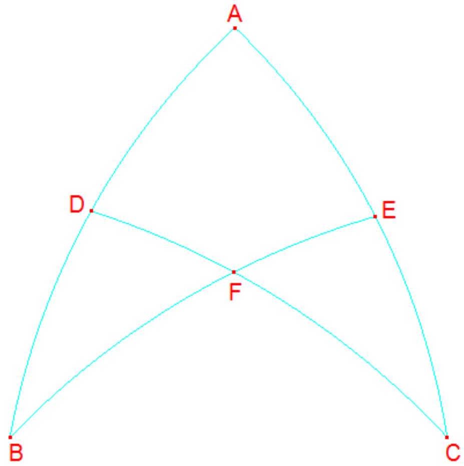


Dimostrazione del teorema dei seni tratto dall'opera originale di al-Tusi

Al-Tusi, come altri autori del suo periodo, non tratta il caso del triangolo qualsiasi quando sono possibili più soluzioni. Questo caso sarà trattato più avanti dal matematico francese, Vietè.

Libro IV
Il quarto libro ha come oggetto l'estensione alla proposizione di Menelao sul piano, applicata al triangolo sferico, detta proposizione di Tolomeo. Questa proposizione si deduce dalla proposizione del quadrilatero piano di Menelao con l'aiuto di una costruzione relativamente facile e di alcuni lemmi dimostrati nel libro precedente.

0.0.3 Proposizione. *Descriviamo sulla superficie della sfera archi di cerchi massimi tali che i due archi $\widehat{BE}$, $\widehat{CD}$ si intersechino in F come in figura. Consideriamo, inoltre,* *che ognuno di questi archi sia più piccolo di una semicirconferenza. La proposizione di Tolomeo sancisce che*



$$\frac{crd2\overset{\frown}{CE}}{crd2\overset{\frown}{EA}} = \frac{crd2\overset{\frown}{CF}}{crd2\overset{\frown}{FD}} \cdot \frac{crd2\overset{\frown}{DB}}{crd2\overset{\frown}{BA}},$$

equivalentemente

$$\frac{crd2\overset{\frown}{CA}}{crd2\overset{\frown}{EA}} = \frac{crd2\overset{\frown}{CD}}{crd2\overset{\frown}{FD}} \cdot \frac{crd2\overset{\frown}{FB}}{crd2\overset{\frown}{BE}}.$$

Se indichiamo con α un arco, sappiamo che $crd2\alpha = 2\sin\alpha$.
Al-Tusi chiamò il teorema

$$\frac{\sin\overset{\frown}{CE}}{\sin\overset{\frown}{EA}} = \frac{\sin\overset{\frown}{CF}}{\sin\overset{\frown}{FD}} \cdot \frac{\sin\overset{\frown}{DB}}{\sin\overset{\frown}{BA}}$$

proposizione esplicita di Tolomeo, e il teorema

$$\frac{\sin\overset{\frown}{CA}}{\sin\overset{\frown}{EA}} = \frac{\sin\overset{\frown}{CD}}{\sin\overset{\frown}{FD}} \cdot \frac{\sin\overset{\frown}{FB}}{\sin\overset{\frown}{BE}}$$

proposizione implicita di Tolomeo.

Alla fine di questo libro, al-Tusi mostra l'importanza della proposizione sul quadrilatero completo per il calcolo degli archi di circonferenza a partire dall'intersezione di cerchi massimi sulla sfera. I cerchi massimi sono circonferenze tracciate sulla superficie della sfera aventi il diametro passante per il centro della sfera e di raggio pari a quello della sfera.

Libro V

Il quinto libro è adibito alla risoluzione dei triangoli sferici con l'aiuto dei metodi che non fanno uso del quadrilatero completo. L'autore inizia con una classificazione dettagliata dei dieci tipi fondamentali di triangoli sferici, in base agli angoli (acuti,retti,ottusi) e

in base ai lati (minori, uguali o maggiori di un quarto di cerchio massimo). Al-Tusi dimostra due proposizioni importanti, il teorema dei seni e il teorema delle tangenti. La denominazione araba del primo teorema: "al-sakl al-mughi" significa proposizione sufficiente, che è molto caratteristica perchè per dimostrarlo non ricorre alla proposizione del quadrilatero completo.
Nello stesso libro al-Tusi introduce nuove identità trigonometriche riguardanti tangente, cotangente, secante e cosecante, come ad esempio

$$R\tan\alpha = R\cot(90^\circ - \alpha)$$

oppure

$$\frac{\tan\alpha}{\tan\beta} = \frac{\cot\beta}{\cot\alpha}.$$

L'introduzione di queste nuove relazioni portò ad una facilitazione dell'applicazione della trigonometria che non si poteva avere con l'applicazione dei metodi delle corde e degli archi oppure degli archi e dei seni.

0.0.4 Teorema. *Il teorema della tangente stabilisce che il rapporto tra la tangente di un lato e la tangente dell'angolo opposto è uguale al rapporto tra il seno dell'altro lato e il seno dell'angolo retto, ossia*

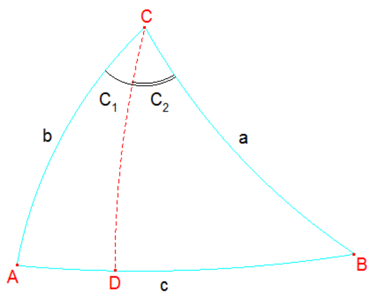
$$\frac{\tan b}{\tan\hat{B}} = \sin a.$$

Si ottengono due conseguenze importanti a questo teorema. Consideriamo il triangolo qualunque ABC e dividiamolo in due parti mediante l'altezza CD. Risulta:

$$\frac{\tan\hat{A}}{\tan\hat{B}} = \frac{\sin\overset{\frown}{BD}}{\sin\overset{\frown}{AD}}$$

e

$$\frac{\tan\hat{C}_1}{\tan\hat{C}_2} = \frac{\tan\overset{\frown}{AD}}{\tan\overset{\frown}{BD}}.$$



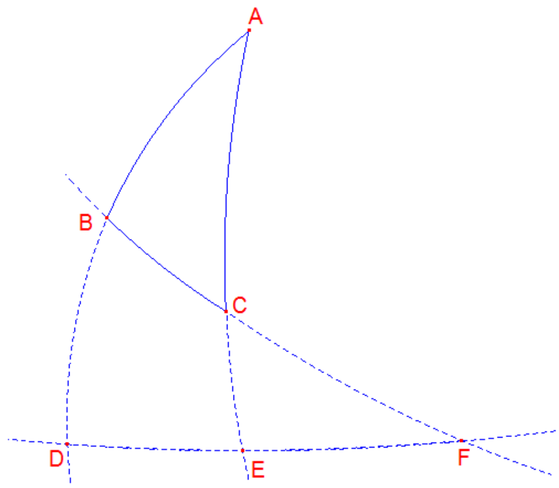
Al-Tusi notò che parecchi studiosi evitarono il teorema delle tangenti perché le differenze dei valori della tangente superiori a 45° crescevano molto rapidamente, il ché ne rendeva difficile l'interpolazione e l'applicazione delle tabelle. Egli esplica che l'utilizzo delle regole da lui raccomandate non è legato a questo inconveniente e che si possono semplicemente usare di valori di tangenti inferiori a 1.
Nell'ultimo capitolo del quinto libro, al-Tusi tratta la risoluzione dei triangoli sferici. Prima esamina i sei casi del triangolo rettangolo trattando separatamente le soluzioni che si basano sul teorema dei seni e quello delle tangenti. Poi risolve i triangoli qualunque con l'aiuto degli stessi teoremi e un numero ristretto di procedure.
Andiamo ora ad analizzare i due casi più complicati quando sono noti i 3 lati o i 3 angoli.

Primo caso
Consideriamo il triangolo ABC di cui conosciamo i 3 lati.
Prolunghiamo i lati $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{AC}$ fino a D ed E, in modo tale che gli archi $\overset{\frown}{AD}$ e $\overset{\frown}{AE}$ siano entrambi uguali ad un quarto di cerchio massimo. Poi, prolunghiamo $\overset{\frown}{BC}$ fino al punto

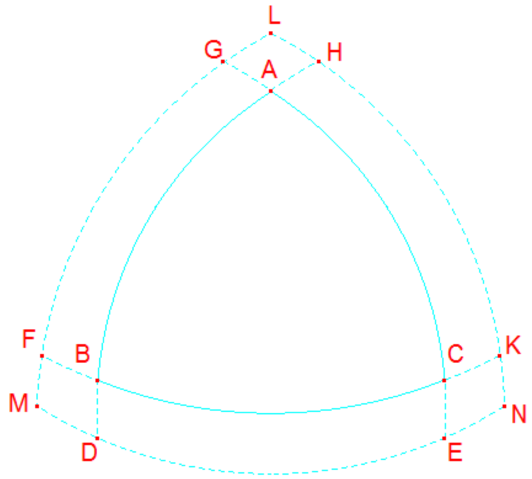
di intersezione F con il prolungamento dell'arco del cerchio massimo $\overset{\frown}{DE}$. Grazie al teorema dei seni e alla regola delle quattro grandezze abbiamo che:

$$\frac{\sin \overset{\frown}{CF}}{\sin \overset{\frown}{BF}} = \frac{\sin \overset{\frown}{CE}}{\sin \overset{\frown}{BD}}.$$

Siccome, conosciamo la differenza $\overset{\frown}{BC}$ degli archi $\overset{\frown}{CF}$ e $\overset{\frown}{BF}$ come rapporto dei loro seni, possiamo calcolare gli archi $\overset{\frown}{CF}$ e $\overset{\frown}{BF}$. Troviamo poi il lati $\overset{\frown}{DF}$ ed $\overset{\frown}{EF}$ la cui differenza $\overset{\frown}{DE}$ dà l'angolo $\hat{A}$. Procedendo allo stesso modo troviamo gli angoli $\hat{B}$ e $\hat{C}$.



Secondo caso
Consideriamo il triangolo ABC, i cui lati sono minori di un quarto di grande cerchio, di cui conosciamo i 3 angoli.
Prolunghiamo ogni lato da entrambi gli estremi in moto tale da renderlo uguale ad un quarto di cerchio massimo. Il lato $\overset{\frown}{AB}$ viene prolungato in modo che $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BH}$, il lato $\overset{\frown}{BC}$ in modo che $\overset{\frown}{BK} = \overset{\frown}{CF}$ e il lato $\overset{\frown}{AC}$ in modo che $\overset{\frown}{CG} = \overset{\frown}{EA}$. Poi uniamo gli archi di cerchi massimi passanti per i punti D ed E, F e G, K e H. Costruiamo così il triangolo LMN i cui vertici si trovano nell'intersezione di questi archi di cerchi massimi. Il triangolo LMN è denominato da allora triangolo polare di ABC perchè i poli dei sui lati sono i vertici di quest'ultimo. Il triangolo ABC è esso stesso il triangolo polare di LMN e ciascuno di questi triangoli ha i lati che sono i supplementari dei lati dell'altro. Siccome $\overset{\frown}{MD} = \overset{\frown}{EN} = 90° - \overset{\frown}{DE} = 90° - A$ allora $\overset{\frown}{MN} = 180° - A$. Allo stesso modo $\overset{\frown}{BF} = \overset{\frown}{CK} = 90° - \overset{\frown}{BC}$, $L = \overset{\frown}{FK} = 180° - \overset{\frown}{BC}$. Al-Tusi risolve il triangolo LMN di cui conosce i lati ed esprime i lati che sta cercando del triangolo ABC in funzione degli angoli $\hat{L}$, $\hat{M}$, $\hat{N}$.



Il *Trattato sul quadrilatero completo* di Nasir ad-Din al-Tusi ha giocato un ruolo importante nello sviluppo della matematica in Oriente. Ricordiamo che in Europa il triangolo polare è stato introdotto da Vietè nel 1593 e fu utilizzato da un gran numero di studiosi tra cui J.Nepier e W.Snell.