Teorema di Menelao

Il teorema di Menelao merita attenzione per almeno due ragioni. La prima lo lega alla nascita della trigonometria e in particolare spiega il motivo profondo che ha determinato l'abbandono della teoria delle corde, già sviluppata da Aristarco e poi da Tolomeo, per sostituirla con la teoria delle funzioni trigonometriche seno e coseno. Infatti spesso non si conosce il motivo che ha reso preferibile considerare la mezza corda del doppio arco (cioè il seno di quell'arco) anzichè tutta la corda. La seconda ragione si inserisce in un nuovo contesto geometrico, che sviluppa per via assiomatica deduttiva una geometria curva, sulla scia della geometria euclidea, che approderà nel XIX secolo alle geometrie non-euclidee.

Poichè è meno nota l'utilità applicativa della "geometria curva" ricordiamo l'interesse che essa aveva, tra gli scienziati alessandrini, nella descrizione scientifica degli astri e dei loro movimenti. Il punto di partenza consiste nel definire uno schema di riferimento capace di descrivere l'universo. Le stelle e tutti gli astri del cielo vengono proiettati sulla superficie di una grande sfera matematica (la volta celeste) il cui centro è occupato dall'osservatore. Le stelle vengono così a corrispondere a dei punti di questa teorica superficie. Il passo successivo consiste nel definire l'allineamento di tre punti sulla sfera. La definizione risulta naturale: tre stelle ci appaiano allineate quando i tre raggi con cui le vediamo stanno su uno stesso piano, cioè quando i tre corrispondenti punti della sfera si trovano su un piano che passa per il suo centro, o ancora, in termini più astratti, quando i tre punti si trovano su un cerchio massimo, ovvero un cerchio il cui raggio è il massimo possibile (uguale quindi a quello della sfera), e ciò accade quando il piano sul quale si trova questo cerchio passa per il centro della sfera. È quindi naturale e utile pensare alle stelle come ai punti di una sfera sulla quale le rette sono rappresentate da cerchi massimi e, come conseguenza di questo, sviluppare una nuova geometria a due dimensioni con i suoi segmenti, i suoi triangoli ed angoli con gli stessi metodi che aveva usato Euclide per la geometria piana. Questo è il programma che sviluppa Menelao nella sua opera *Sphaerica*. Vediamo quindi uno dei teoremi principali di quest'opera [Lib. III PROP. I.

THEOR.], noto come teorema di Menelao, che ci permette di dedurre delle formule importanti di *trigonometria sferica*.

Siano dati sulla superficie della sfera due archi di cerchio massimo NME, $NA\Lambda$, internamente ai quali tracciamo altri due archi (di cerchio massimo) $E\Theta A$, $\Lambda\Theta M$ che si incontrano nel punto Θ; possiamo affermare che vale la seguente relazione:

$$\frac{\sin NE}{\sin ME} \cdot \frac{\sin M\Theta}{\sin \Lambda\Theta} \cdot \frac{\sin \Lambda A}{\sin NA} = 1$$

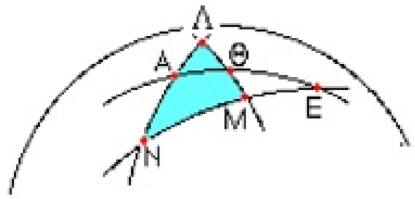
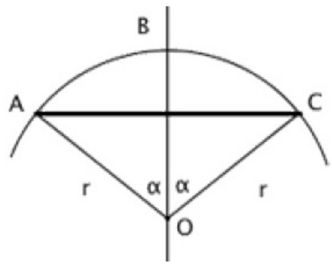


Figura 1: Teorema di Menelao

In questo enunciato appare per la prima volta la funzione *sinus*: ciò che modernamente intendiamo per seno trigonometrico di un angolo. In questo caso, quando scriviamo $\sin NE$ l'angolo in esame, se O è il centro della sfera, è quello formato dalle semirette ON e OE (o, se la sfera è di raggio unitario, $\sin NE$ corrisponde al seno dell'arco NE misurato in radianti). L'etimologia della parola *sinus* (come viene riferito da Halley) è piuttosto complicata. Infatti la locuzione greca, che ritroviamo in Tolomeo e che probabilmente risale alla versione originale (andata perduta) dell'opera di Menelao, usa per il seno di un angolo, la locuzione: *ciò che è sotteso al doppio arco* cioè la corda sottesa dal doppio arco.



Più precisamente, il sotto del doppio di circonferenza AB è il sotto dell'arco AC cioè la corda AC. Dunque il sotto del doppio di circonferenza AB coincide con $2r \sin \alpha$.

Dopo la distruzione di Alessandria e della sua enorme biblioteca molte delle opere greche fortunosamente salvate dalla distruzione, tra cui l'*Almagesto* di Tolomeo, penetrarono nei circoli scientifici indiani e vennero rimaneggiate e riscritte in versi come le grandi epopee poetiche induiste. È in quella visione poetica ed allegorica, richiamando l'immagine dell'arco e delle frecce, che nascono i termini oggi di uso comune in matematica, quali appunto arco, corda ecc. riferiti alla geometria delle circonferenze. In particolare, con la parola sanscrita *jiva* che significa corda di un arco, si traduce la locuzione greca: *ciò che è sotteso da un arco di circonferenza.* Un problema nasceva però dal fatto che il teorema di Menelao e tutto ciò che ne segue, stabilisce delle relazioni di proporzionalità non tanto tra le corde di un arco quanto, piuttosto, tra le corde del doppio arco, cioè tra i seni dell'arco. Poichè quindi questa espressione "corda del doppio arco" interveniva sempre nelle principali regole, fu coniato il termine abbreviato *jya* al posto della frase *ardha jiva.* Quando gli arabi intrapresero la traduzione dal sanscrito delle opere astronomiche indiane, non riuscirono a trovare nei loro dizionari, nessuna parola che significasse *jya* e così la tradussero con la parola *jaib* che aveva un suono simile ma anche un significato: infatti nella lingua araba *jaib* significa cavità, tasca. Quando, infine, si arrivò a tradurre dall'arabo al latino, la parola *jaib* aveva assunto un ben preciso significato, fu tradotta col termine latino *sinus* che appunto vuol dire cavità.

Regola delle sei grandezze

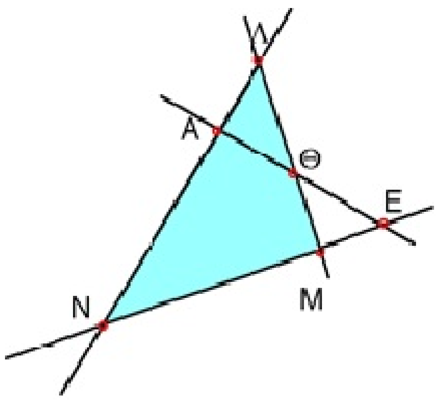


Figura 2: Regola delle sei grandezze

Il teorema di Menelao ha anche una versione piana, alcune volte chiamata col nome di *regula sex quantitatum* ovvero **regola delle sei grandezze**:

Se un triangolo $N\Lambda M$ è tagliato da una trasversale non passante per i vertici, nei punti A,Θ,E sui lati $N\Lambda$, $M\Lambda$, NM rispettivamente, allora il prodotto dei rapporti semplici costruiti sui tre lati è uno. Vale cioè la regola:

$$\frac{NE}{ME} \cdot \frac{M\Theta}{\Lambda\Theta} \cdot \frac{\Lambda A}{NA} = 1$$

Formule ricavate dal teorema di Menelao

Dal teorema di Menelao è facile ricavare le formule di base per la trigonometria sferica.

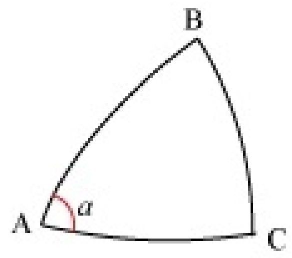


Figura 3: Triangolo sferico rettangolo

Per esempio, se consideriamo un triangolo sferico ABC rettangolo in C, detto a l'angolo sferico tra il cateto CA e l'ipotenusa BA, abbiamo la seguente formula risolutiva per i triangoli rettangoli:

$$\sin(BC) = \sin(AB) \cdot \sin(a)\,.$$

La dimostrazione di questa formula si ottiene facilmente applicando il teorema di Menalao ad un opportuno triangolo sferico. Notiamo inoltre che questa formula di geometria sferica, come il teorema di Menelao, sembra derivare dalla sua analoga, relativa alla geometria piana, sostituendo le lunghezze dei segmenti con i seni trigonometrici degli archi corrispondenti. L'analogia riesce particolarmente chiara se si considera la geometria piana come il limite delle geometria sferica quando il raggio della sfera tende all'infinito. Ciò viene confermato dal teorema dei seni che fornisce per un qualunque triangolo sferico le analoghe relazioni.

La prova del teorema dei seni si ottiene, come nel caso piano, tracciando le altezze e usando la formula risolutiva applicata ai triangoli rettangoli che in quel modo vengono generati.

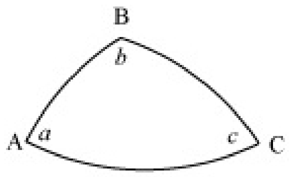


Figura 4: Teorema dei seni: $\dfrac{\sin(BC)}{\sin(a)} = \dfrac{\sin(AC)}{\sin(b)} = \dfrac{\sin(AB)}{\sin(c)}$

Sito di riferimento

http://www.mat.uniroma2.it/ ghione/ Testi/Storia/Sferica/TeoremaMenelao.html