Dal teorema di Tolomeo alle formule di sottrazione e bisezione dei seni

Passaggio dalle corde ai seni

La maggior parte di notizie sui metodi trigonometrici alessandrini ci vengono dal massimo astronomo dell'antichità: Tolomeo Claudio (II sec. d.C.). La differenza fondamentale tra la trigonometria greca e quella moderna è che al posto dei seni la trigonometria alessandrina usa le corde. Seguendo la tradizione babilonese, che è in parte in uso ancor oggi, la semicirconferenza veniva divisa in 180 parti uguali, i gradi, e il suo diametro in 120. Viene così a formarsi una sorta di goniometro, in cui la parte tonda serve a misurare gli archi, e quella piatta a misurare le corde relative. Ad esempio, la corda di un arco di 180° (un angolo piatto) è 120, la misura del diametro nella scala piatta; quella di un angolo di 60° (l'angolo dell'esagono regolare) è 60. In generale, in un angolo AOB, l'arco AB è misurato in gradi (cioè in unità tali che la circonferenza misura 360) e la corda AB è misurata in unità tali che il raggio OA sia 60. Osserviamo che, siccome a un diametro di lunghezza 120 corrisponde una semicirconferenza di lunghezza 60π, le unità di misura degli archi e delle corde sono differenti. Sarebbero le stesse se π fosse uguale a 3; data l'antichità del sistema di misura, non è escluso che la sua origine sia dovuta a un'approssimazione $\pi = 3$ che si trova in tempi piuttosto primitivi. Non è difficile trovare la relazione tra la corda e il seno di un angolo. Infatti se dividiamo l'angolo α a metà si ha: $OA = 60$, $\overset{\frown}{AB} = \alpha$ in gradi, $BC = 60 \cdot \sin(\alpha/2)$, $AB = 120 \cdot \sin(\alpha/2)$. E quindi, se indichiamo con $c(\alpha)$ la misura della corda AB, si ha

$$c(\alpha) = 120 \sin(\alpha/2)$$

ossia

$$\sin\alpha = \frac{1}{120}\,c(2\alpha)\,.$$

Verso le formule di sottrazione e di bisezione dei seni

La costruzione della tavola delle corde risulta alquanto complessa; queste infatti sono note solo per alcuni angoli (quello di 60°, come abbiamo visto, o anche quello di 36°, la cui corda è il lato del decagono regolare), in numero troppo piccolo per poter essere sufficienti a costruire delle tavole abbastanza precise. Tali valori, noti esattamente o con molta precisione, servono come punto di partenza; per trovare gli altri c'è bisogno di formule analoghe a quelle di addizione e sottrazione, e a quelle di bisezione. La chiave per ottenere tali risultati è il teorema, che si trova per la prima volta nell'*Almagesto*, e che porta il nome di teorema di Tolomeo.

Il teorema di Tolomeo afferma che, dato un quadrilatero $ABCD$ inscritto in un cerchio, la somma dei prodotti delle coppie dei lati opposti è equivalente al prodotto delle diagonali:

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD\,.$$

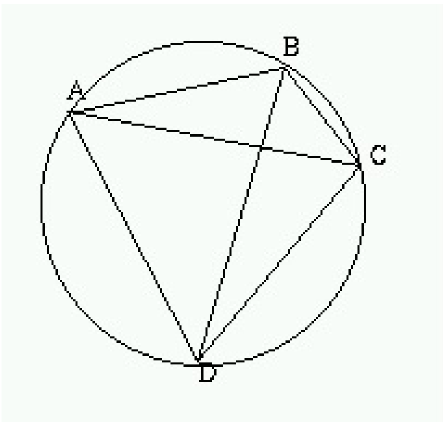

Figura 1: Teorema di Tolomeo

Tolomeo si serve di questo teorema in particolare nel caso in cui AD è un diametro. Se si pone $\alpha = \overset{\frown}{AB}$, $\beta = \overset{\frown}{AC}$ si ha $\overset{\frown}{BC} = \beta - \alpha$, $\overset{\frown}{BD} = 180 - \alpha$ e $\overset{\frown}{CD} = 180 - \beta$. Da esso segue allora

$$c(\beta)\,c(180-\alpha) = c(\alpha)\,c(180-\beta) + 120c(\beta-\alpha)\,. \tag{1}$$

D'altra parte, i triangoli ACD e ABD sono rettangoli, essendo inscritti in una semicirconferenza; per il teorema di Pitagora si ha allora:

$$AC^2 + CD^2 = AD^2 = 120^2$$
$$AB^2 + BD^2 = AD^2 = 120^2$$

e quindi

$$c^2(180 - \beta) = 120^2 - c^2(\beta)$$
$$c^2(180 - \alpha) = 120^2 - c^2(\alpha)$$

Di conseguenza, nella (1) tutti i termini sono noti, e si può ricavare la corda di $\beta - \alpha$:

$$c(\beta - \alpha) = \frac{c(\beta)\, c(180 - \alpha) - c(\alpha)\, c(180 - \beta)}{120}\,. \tag{2}$$

La (2) è equivalente al teorema di sottrazione dei seni; infatti, se ricordiamo che $c(\alpha) = 120 \sin(\alpha/2)$, potremo scriverla nella forma:

$$120 \sin \frac{\beta - \alpha}{2} = \frac{120 \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{180-\alpha}{2} - 120 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot 120 \sin \frac{180-\beta}{2}}{120}$$

da cui semplificando

$$\sin \frac{\beta - \alpha}{2} = \sin \frac{\beta}{2} \sin\left(90 - \frac{\alpha}{2}\right) - \sin \frac{\alpha}{2} \sin\left(90 - \frac{\beta}{2}\right),$$

ovvero, dato che $\sin\left(90 - \frac{\alpha}{2}\right) = \cos \frac{\alpha}{2}$,

$$\sin \frac{\beta - \alpha}{2} = \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}\,.$$

Con un metodo simile si trova la formula di bisezione. Se infatti prendiamo $\beta = 2\alpha$, abbiamo dalla (1)

$$c(2\alpha)\, c(180 - \alpha) = c(\alpha)\, c(180 - 2\alpha) + 120c(\alpha) = c(\alpha)(c(180 - 2\alpha) + 120)\,.$$

Elevando al quadrato ambo i membri, e tenendo conto che $c^2(180 - \alpha) = 120^2 - c^2(\alpha)$, si trova

$$c^2(2\alpha)(120^2 - c^2(\alpha)) = c^2(\alpha)(120 + c(180 - 2\alpha))^2$$

e risolvendo

$$c^2(\alpha) = \frac{120^2 c^2(2\alpha)}{[120 + c(180 - 2\alpha)]^2 + c^2(2\alpha)}\,.$$

Quest'ultima è già una formula di bisezione, in quanto dalla corda dell'arco 2α si può ricavare quella dell'arco α. Possiamo però ottenere una formula migliore sviluppando il denominatore fino ad arrivare alla forma $2 \cdot 120(120 + c(180 - 2\alpha))$[1] e quindi in conclusione

$$c^2(\alpha) = \frac{60c^2(2\alpha)}{120 + c(180 - 2\alpha)}\,. \tag{3}$$

Tramite questa equazione, Tolomeo può calcolare le corde corrispondenti ad angoli sempre più piccoli. In particolare, dalla conoscenza degli angoli di $60°$ e di $72°$ egli ottiene per differenza la corda di $12°$, e poi per successivi dimezzamenti quelle di $6°$, di $3°$, di $1°\ 30'$, e di $45'$, delle quali si serve per costruire la tavola delle corde. Manca soltanto il calcolo della corda di $1°$, che Tolomeo ottiene per approssimazione, usando un risultato, che in forme diverse si incontra già in Aristarco di Samo (III sec. a.C.) e Archimede di Siracusa (287-212 a.C.), e che dice che per due archi α e β, con $\alpha > \beta$, risulta

$$\frac{c(\alpha)}{c(\beta)} < \frac{\alpha}{\beta}\,.$$

Applicando questa disuguaglianza agli angoli $\alpha = 1°\ 30'$ e $\beta = 1°$ si trova

$$\frac{c(1°\ 30')}{c(1°)} < \frac{3}{2}\,.$$

mentre se si prende $\alpha = 1°$ e $\beta = 45'$, si ottiene

$$\frac{c(1°)}{c(45')} < \frac{4}{3}\,.$$

e quindi

$$\frac{2}{3}\,c(1°\ 30') < c(1°) < \frac{4}{3}\,c(45')\,,$$

una formula che consente di trovare la corda di $1°$ con un'approssimazione di più dell'uno per mille. In realtà, le tavole di Tolomeo vanno di mezzo grado in mezzo grado, cosa non difficile da ottenere, dato che una nuova bisezione consente di ottenere la corda di $\frac{1}{2}^{\circ}$ a partire da quella di $1°$.

Sito di riferimento

http://php.math.unifi.it/archimede/archimede/ trigonometria/trigonometria/trigo1.html

[1] $120^2 + c^2(180-\alpha) + 2 \cdot 120\, c(180-2\alpha) + c^2(2\alpha) = 120^2 + 120^2 - c^2(2\alpha) + 2 \cdot 120\, c(180-2\alpha) + c^2(2\alpha) = 2 \cdot 120(120 + c(180 - 2\alpha))$