Metodi per la quadratura della parabola

Diversi saggi del X e XI secolo si sono interessati alla quadratura della parabola e nello studio di questo problema, le correnti di pensiero greco hanno esercitato una grande influenza. Usando il metodo infinitesimale degli antichi, gli arabi hanno ritrovato con dei mezzi assolutamente nuovi alcuni risultati già ottenuti da Archimede. Nel suo libro intitolato *Sulla misura della sezione conica chiamata parabola*, Thabit ibn Qurra ha infatti contribuito a far rivivere i metodi "infinitesimali" del matematico di Siracusa, attraverso le somme integrali, metodo che era stato usato in molti casi già da Archimede stesso (quadratura della spirale, cubatura di una parabola di rivoluzione, ecc...).
L'area del segmento parabolico viene calcolata da Archimede sia utilizzando il metodo di esaustione sia combinando insieme ragionamenti meccanici, infinitesimali e geometrici; questi due metodi si presentano come i precursori della moderna analisi infinitesimale e del calcolo integrale. Infatti Archimede, riprendendo la teoria atomica di Democrito, all'interno del *Metodo*, aveva pensato ogni figura composta o riempita da tutti i suoi elementi, gli "indivisibili", a cui poi aveva attribuito un "peso reale", considerando quindi linee e piani paralleli come "fili" e "lastre pesanti". Dall'analisi delle condizioni necessarie per il loro equilibrio, con una leva, Archimede aveva poi dedotto la misura di superfici (come l'area di un segmento parabolico) e volumi (sfera e cilindro).

In seguito Archimede nella *Quadratura della parabola* aveva trovato l'area di un segmento parabolico "riempiendo" la figura con triangoli sempre più piccoli e nell'opera *Sulla sfera e il cilindro* aveva trovato l'area della superficie sferica e il suo volume, considerando dapprima un numero sempre maggiore di poligoni inscritti e circoscritti ad una circonferenza e poi calcolando i volumi dei solidi ottenuti dalla loro rotazione. Non c'è, ovviamente, al termine di tali costruzioni nessun moderno passaggio al limite: la dimostrazione dell'uguaglianza tra aree o volumi viene fatta utilizzando il classico metodo di esaustione.
Soffermiamoci ora sul problema della quadratura di un segmento della parabola, cioè sulla determinazione della sua area interna. Archimede ha dimostrato che un triangolo inscritto nel segmento parabolico è 8 volte il triangolo successivo, ovvero il triangolo inscritto nel segmento residuo. Ma poiché ogni triangolo genera due triangoli successivi, questi ultimi presi insieme valgono $\frac{2}{8}$ cioè $\frac{1}{4}$ del triangolo precedente. Continuando a costruire triangoli in questo modo, si viene ad avere la seguente somma: $A + \frac{1}{4}A + \frac{1}{16}A + \frac{1}{64}A + ...$
ove A è l'area del primo triangolo.

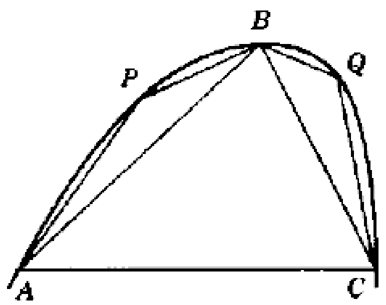

Figura 1: Dimostrazione della quadratura della parabola.

Nella Proposizione 23 della *Quadratura della parabola*, Archimede, avendo dunque intuito che la somma delle aree dei triangoli costruiti sui vari segmenti parabolici tendeva, all'aumentare del loro numero, all'area del segmento parabolico stesso, determina, anche se in un caso particolare, la somma di un "numero infinito" di termini, ossia la somma dei termini di quella che modernamente chiamiamo progressione geometrica di ragione $\frac{1}{4}$.
Archimede aveva già dimostrato, nel suo *Metodo*, che l'area del segmento parabolico era pari a $\frac{4}{3}$ dell'area del triangolo in esso inscritto, avente la stessa base e la stessa altezza del segmento medesimo; è quindi possibile che si sia accorto che fermandosi ad un punto della progressione geometrica così costruita, la somma dei termini successivi all'area A del primo triangolo inscritto nel segmento parabolico fosse pari a $\frac{1}{3}$ di A; per cui l'area totale, risultava pari a:
$A + \frac{1}{4}A + \frac{1}{16}A + \frac{1}{64}A + ... = A + \frac{1}{3}A = \frac{4}{3}A$.