La trisezione del quadrato

I problemi geometrici sono tra le sfide che più hanno stuzzicato matematici di ogni epoca. Quello di suddividere un quadrato in tre quadrati più piccoli, fra loro congruenti, collegato alla risoluzione del teorema di Pitagora, è fra questi. Per quanto sia risolvibile con il semplice uso di carta, penna, compasso e forbici, e sia abbastanza semplice da essere compreso da un bambino, esso ha occupato i matematici per secoli.

Il problema si inquadra in quello più generale di suddividere il quadrato in n quadrati congruenti utilizzando il minor numero di pezzi. Il caso più semplice si ha per $n = 4$, dove è sufficiente tracciare i segmenti che uniscono i punti medi del lati opposti.

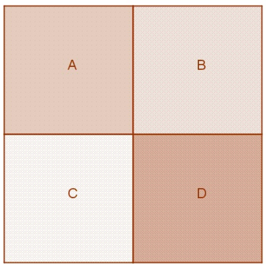

Figura 1

Il passo successivo è quello per $n = 2$. La prima soluzione che viene in mente è quella di disegnare le diagonali e poi unire a due a due i triangoli rettangoli ottenuti. Una seconda soluzione possibile consiste nel costruire un quadrato più piccolo con i vertici nei punti medi dei lati. Il secondo quadrato, identico al primo, si ottiene assemblando i quattro triangoli rimanenti. La prima soluzione è preferibile, perché utilizza quattro pezzi invece di cinque.

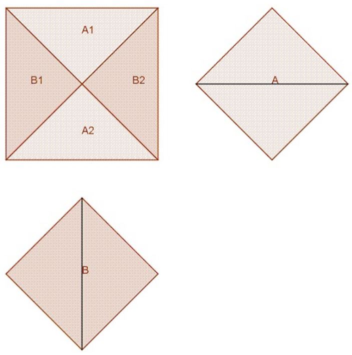

Figura 2

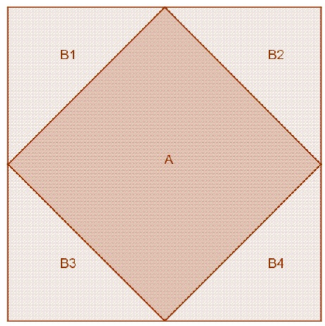

Figura 3

A proposito della suddivisione dei poligoni piani, Abu l-Wafa scrive: «Ero presente a una riunione alla quale partecipava un certo numero di geometri e artigiani. Stavano discutendo sulla costruzione di un quadrato a partire da tre quadrati. I geometri tracciarono facilmente un segmento tale che il suo quadrato era uguale ai tre quadrati, ma nessuno degli artigiani era soddisfatto. Essi volevano dividere quei [tre] quadrati in pezzi dai quali si potesse assemblare un quadrato [più grande] (...) Alcuni degli artigiani posero uno di questi quadrati al centro e divisero il successivo lungo la sua diagonale e divisero il terzo quadrato in un triangolo isoscele rettangolo e due trapezoidi congruenti e li unirono assieme».

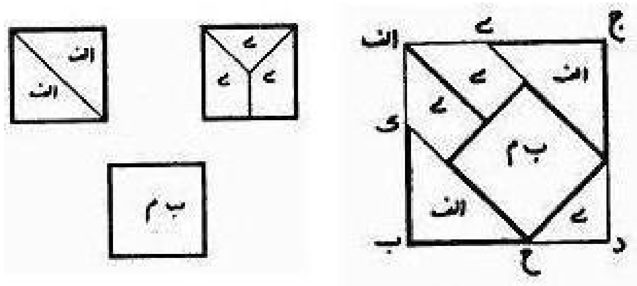

Figura 4

La costruzione descritta dal matematico persiano è analizzata nella figura 4. Se assegniamo al piccolo quadrato centrale un lato unitario, allora il quadrato grande avrà lato $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$, e dunque area pari a $\frac{3}{2}+\sqrt{2}$, diversamente dal risultato sperato (area pari a 3). Pertanto la costruzione è sbagliata. Abu l-Wafa, spiegando che gli artigiani e anche i geometri (muhandis) spesso sbagliavano nell'assemblaggio dei pezzi dei quadrati più piccoli, afferma che i primi mancano di basi scientifiche, mentre i secondi mancano della pratica di cantiere. Egli dà la prima soluzione corretta del problema per $n = 3$, generalizzando la soluzione per dimostrare il teorema di Pitagora. «Una tale soluzione -dice Abu l-Wafa- è sufficiente in geometria, ma non può essere utilizzata nella pratica». Le seguenti figure rappresentano la costruzione di Abu l-Wafa: dato

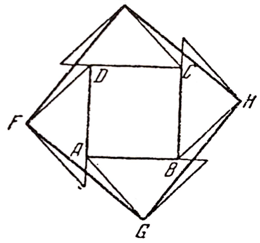

Figura 5

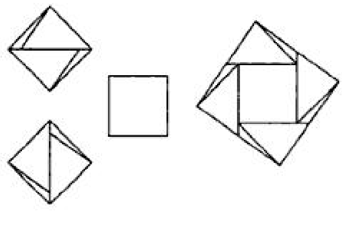

Figura 6

il quadrato ABCD, si tracciano le diagonali e, prolungando ciascun lato del quadrato, si creano quattro triangoli rettangoli i cui cateti sono uguali al lato

del quadrato e l'ipotenusa uguale alla diagonale. Si uniscono dopo i vertici E, F, G, H, gli uni agli altri, ottenendo così un quadrato. L'area di quest'ultimo è uguale al triplo dell'area del quadrato dato ABCD, poiché i piccoli triangoli che superano il quadrato EFGH sono congruenti ai triangoli situati all'interno di questo quadrato.
Una rappresentazione della sua generalizzazione si può vedere in molti dei mosaici della moschea Jameh di Isfahan, la più grande dell'Iran.

Figura 7