Analisi sul simbolismo arabo

Il matematico a cui si deve la prima esposizione del sistema di numerazione indiano e delle operazioni effettuate in questo sistema è il persiano Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (780-850 circa), che opera a Bagdad, nella Casa del Sapere. Della sua vita non si conosce quasi nulla, tranne forse il fatto che, come indica il nome, egli era originario di Khwarizm (oggi Khiva), città del Turkestan. Di lui si sono conservate cinque opere, in parte rimaneggiate, di aritmetica, algebra, astronomia, geografia e del calendario. In particolare le sue opere sull'aritmetica e sull'algebra sono diventate famose e hanno esercitato notevole influenza sullo sviluppo della matematica medioevale occidentale, oltre che sugli studi successivi compiuti dagli arabi.
Fra i principali concetti da lui analizzati si trova la nozione di equazione di primo e di secondo grado, a coefficienti numerici. Qui al-Khwarizmi si distingue dai predecessori: non si tratta più, come presso gli egizi e i babilonesi, di risolvere problemi aritmetici e geometrici, che si possono tradurre in termini di equazioni, ma al contrario si parte dalle equazioni e i problemi vengono dopo. Il fatto che egli si limiti a considerare equazioni di primo e secondo grado è legato all'esigenza di avere una soluzione per radicali e una verifica geometrica di tale soluzione.
L'algebra di al-Khwarizmi è interamente retorica; egli non usa infatti alcun simbolo ed è piuttosto prolisso nelle spiegazioni.
La nozione di base è quella di equazione a coefficienti numerici ed i termini di

un'equazione sono indicati con nomi diversi.
I numeri sono chiamati "dirham", probabilmente dal nome dell'unità monetaria greca: la dracma; l'incognita è designata con "say'" (cosa) o "gizr" (radice), dal termine arabo che indicava la radice di una pianta, ed è usato anche per indicare la radice quadrata. Infine "mal" (bene, possedimento) denota il quadrato dell'incognita.
Nella parte iniziale dell'*Algebra*, al-Khwarizmi distingue sei tipi canonici o normali di equazione, che egli presenta semplicemente a parole:

1 I quadrati sono uguali alle radici: $ax^2 = bx$

2 I quadrati sono uguali a un numero: $ax^2 = c$

3 Le radici sono uguali a un numero: $ax = c$

4 I quadrati e le radici sono uguali a un numero: $ax^2 + bx = c$

5 I quadrati e i numeri sono uguali alle radici: $ax^2 + c = bx$

6 Le radici e i numeri sono uguali ai quadrati: $bx + c = ax^2$.

In queste forme canoniche i coefficienti a, b, c sono tutti interi positivi e i termini appaiono dunque sempre come grandezze additive.
La teoria algebrica elaborata da al-Khwarizmi viene completata ed ampliata dall'egiziano Abu-Kamil (850-930 c.a) nel suo *Libro sull'al-jabr e l'almuqabala*, scritto fra la fine del IX e l'inizio del X secolo. Questo trattato, che sostanzialmente contiene la teoria delle equazioni di primo e secondo grado, ebbe numerosi lettori e commentatori, fra i quali il pisano Leonardo Fibonacci, uno dei maggiori matematici del medioevo in Occidente, che nel *Liber abaci* (1202) riporta parte dei problemi qui affrontati. Fra le caratteristiche più salienti della trattazione di Abu-Kamil si nota un elevato livello teorico e la tendenza all'aritmetizzazione. Abu-Kamil considera ad esempio anche potenze

dell'incognita x superiori a due e utilizza le locuzioni "cubo" per indicare x^3, "quadrato-quadrato" per x^4, "quadrato-quadrato-cosa" per x^5 e così via.
Egli utilizza più ampiamente e con maggior sicurezza, rispetto ad al-Khwarizmi, sia operazioni di calcolo algebrico che trasformazioni complicate sulle espressioni irrazionali, del tipo

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}}.$$

Inoltre enuncia regole precise per la determinazione immediata di x^2, sotto forma di radicali, per le equazioni di secondo grado dei tipi 4,5,6, già studiate da al-Khwarizmi.
Al-Karaji, vissuto tra la fine del X e l'inizio dell'XI secolo, riprende i risultati di Abu-Kamil che integra sia nella parte teorica che in quella dei problemi, sfruttando ampiamente l'eredità diofantea. Egli viene anche chiamato "al-hisabi", cioè maestro di aritmetica, per le sue eccezionali doti in quel campo. Scrive molte e importanti opere, di cui si ricorda in particolare il vasto trattato di algebra intitolato *Al-Fahri* dal soprannome "Fachr'al mulk", dato al vizir Abu Galeb a cui lo scritto era dedicato.
Nella prefazione dell'*Al-Fahri* si trova fra l'altro definito per la prima volta esplicitamente lo scopo dell'algebra: la determinazione delle grandezze incognite mediante quelle note, utilizzando i metodi più efficaci. Al-Karaji espone qui uno studio sulle potenze dell'incognita e, seguendo Diofanto, designa le potenze superiori come prodotti di potenze inferiori, per cui $x^5 = x^2 \cdot x^3$ è chiamato "quadrato-cubo", $x^6 = x^3 \cdot x^3$ "cubo-cubo", e così via.
In particolare egli applica le operazioni aritmetiche ai monomi e poi a quantità composte da monomi, cioè a polinomi. Fornisce inoltre le formule per il quadrato e per il cubo di un binomio, presentando così i primi elementi di quella che si chiama oggi l'algebra dei polinomi. Uno dei suoi successori, as-Samaw'al, gli attribuisce per di più la tabella dei coefficienti di $(a + b)n$ fino a $n = 12$, dicendo che la si può prolungare all'infinito se si segue la legge oggi nota come triangolo di Tartaglia o di Pascal.

Nell'*Al-Fahri* si trovano anche proprietà di teoria dei numeri, ad esempio le formule per la somma dei primi n quadrati e cubi. Quest'ultima, che si può esprimere in notazioni moderne con $\sum_{n=0}^{k} n^3 = \left(\sum_{n=0}^{k} n\right)^2$, viene presentata da al-Karaji con una dimostrazione geometrica semplice ed elegante.
Si osserva che nei trattati di tutti i dotti d'Oriente da al-Khwarizmi a al-Karaji, non esistono dei veri e propri simboli algebrici. Per contro, nei Paesi arabi occidentali, il trattato di aritmetica e algebra d'Abu-l-Hasan 'Ali ibn Muhammad al-Qalasadi, dà un contributo significativo.
Il musulmano al-Qalasadi nasce e cresce a Bastah (1412 c.a), a nord-est della città di Granada. Qui inizia la sua formazione, studiando legge, il Corano e materie scientifiche. Successivamente si trasferisce a Granada, lontano dalla zona di guerra, dove continua gli studi, in particolare quelli di filosofia, scienze e legge musulmana. Al-Qalasadi sceglie di rimanere nel mondo islamico e lascia Granada per viaggiare ampiamente in tutto l'Islam. In particolare trascorre molto tempo nell'Africa settentrionale e nei Paesi islamici che sostenevano l'Andalusia, sia con l'aiuto politico che con l'aiuto militare della resistenza agli attacchi cristiani. Dopo una serie di numerosi viaggi, nei quali incontra insegnanti di matematica, al-Qalasadi raggiunge la Mecca, scopo del suo pellegrinaggio, e torna a Granada. In questo periodo la situazione a Granada era molto critica a causa degli attacchi dei cristiani di Aragona e della Castiglia. Tuttavia, al-Qalasadi insegna e scrive alcune opere molto importanti. La sconfitta di tutto lo stato musulmano a Granada avviene nel 1492, sei anni dopo la morte di al-Qalasadi in Nord Africa, quando la città di Granada cade sotto i cristiani.
Al-Qalasadi è descritto come colui che ha intrapreso i primi passi verso l'introduzione del simbolismo algebrico. I suoi contributi si riscontrano soprattutto nell'uso di parole corte arabe, o semplicemente delle lettere iniziali, come simboli matematici.