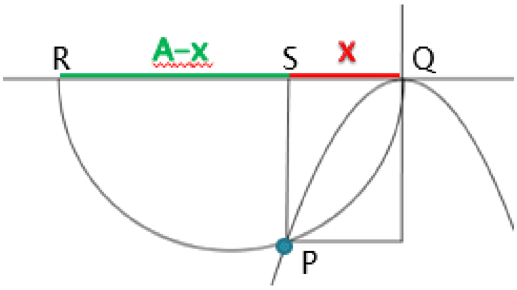
Metodo di al-Khayyam per la risoluzione di equazioni cubiche trinomie

La molteplicità delle forme di equazioni cubiche trinomie considerate da al-Khayyam è dovuta alla necessità di considerare i coefficienti a, b e c tutti positivi, in quanto non erano ancora stati introdotti i numeri negativi. Tale considerazione vale anche per le soluzioni delle equazioni, anch'esse considerate valide soltanto se positive e quindi, trasferendo il discorso ad un sistema di assi cartesiani moderno, soltanto come intersezioni delle curve nel primo quadrante.

Si propone la risoluzione di una tipologia di equazione e si forniscono delle indicazioni per poter risolvere le restanti 5 forme.

$\boldsymbol{x^3 + bx = a}$

Al-Khayyam scrive l'equazione nella forma $x^3 + B^2x = B^2A$, dove $B^2 = b$ e $B^2A = a$. Costruisce poi la parabola $x^2 = By$ e traccia il semicerchio avente come diametro $QR = A$. Allora, l'intersezione P della parabola e del semicerchio determina la perpendicolare PS, e QS è la soluzione dell'equazione.



Il grafico a fianco è da leggersi con l'asse delle ascisse è orientato verso sinistra e quello delle ordinate verso il basso.

Poiché il punto P appartiene alla parabola, si ha $x^2 = B \cdot PS$ o anche la relazione $\frac{B}{x} = \frac{x}{PS}$.
Consideriamo ora il triangolo rettangolo QPR. La sua altezza PS è media proporzionale fra QS e SR e perciò $\frac{x}{PS} = \frac{PS}{A-x}$.
Dalle due relazioni precedenti si ottiene dunque che $\frac{B}{x} = \frac{PS}{A-x}$.

D'altra parte si ha inoltre che $PS = \frac{x^2}{B}$. Sostituendo questo valore in $\frac{B}{x} = \frac{PS}{A-x}$ si ottiene l'equazione cubica di cui si cercava la soluzione.

$x^3 + a = bx$

Al-Khayyam scrive l'equazione $x^3 + a = bx$ nella forma $x^3 + c^2h = c^2x$ e la risolve intersecando la parabola $yc = x^2$ con il ramo sinistro dell'iperbole $y^2 = x(x - h)$.
Si può osservare che nell'ipotesi più generale di parametri a, b, c non necessariamente positivi, considerare esclusivamente il ramo sinistro dell'iperbole può portare a non individuare graficamente alcune intersezioni tra le due curve.
Si potrebbe anche presentare la situazione in cui le due curve sono tangenti e, in tal caso, l'equazione ha un'unica soluzione.

$bx + a = x^3$

La terza equazione è risolta allo stesso modo della precedente, l'unica differenza è il segno del termine costante a.

$x^3 + cx^2 = a$

In questo caso si pone $a = p^3$, per cui $x^2\ (x + c) = p^3$ e le coniche scelte sono l'iperbole $xy = p^2$ e la parabola $y^2 = p(x + c)$.
Questa soluzione è inutilmente complicata perché richiede una soluzione preliminare dell'equazione $p^3 = a$ tramite le due parabole (si rimanda al caso delle equazioni binomie).
Sarebbe molto più semplice porre $a = hd^2$ e intersecare la parabola $x^2 = hy$ con l'iperbole $(x + c)y = d^2$.

$x^3 + a = cx^2$

Questa tipologia è risolta con un metodo simile al precedente. Ancora una volta, il termine costante a è uguale al cubo p^3.
Si considerano poi la parabola $y^2 = p(c - x)$ e l'iperbole $xy = p^2$.
Secondo Omar al-Khayyam, tale equazione può possedere una o due radici positive (se il ramo superiore della parabola e quello dell'iperbole si toccano o si tagliano) oppure nessuna soluzione (nel caso in cui le curve non si incontrino).

$x^3 = a + cx^2$

Tale equazione è risolta allo stesso modo della precedente, l'unica differenza è il segno del termine costante a.