La risoluzione algebrica di alcuni problemi di teoria dei numeri secondo al-Karağī

Il matematico persiano al-Karağī si proponeva di applicare l'aritmetica all'algebra, cioè di mostrare che le leggi, le regole e alcuni algoritmi dell'aritmetica continuano ad essere veri anche quando sono applicati ad espressioni algebriche di forma polinomiale. Questo studio perseguiva lo scopo di organizzare in maniera più completa la trattazione delle equazioni algebriche.

Nei suoi trattati d'algebra, in particolare nell'*al-Fahrī* e nell'*al-Badī*, al-Karağī riprendeva la sistemazione degli esponenti algebrici per poi estendere alle espressioni algebriche le operazioni aritmetiche, dando una prima esposizione dell'algebra dei polinomi. L'applicazione delle regole aritmetiche ad espressioni algebriche avveniva con gradualità, passando prima per i monomi per arrivare poi ai polinomi. Le operazioni di addizione, di sottrazione e di moltiplicazione erano presentate nella loro forma generale, mentre per la divisione ci si limitava a quella tra due monomi o di un polinomio per un monomio.

Le regole "necessarie per le operazioni algebriche" e i teoremi "utili per risolvere le difficoltà" erano molto più numerosi e più sistematici rispetto a quelle contenute nelle opere degli algebristi predecessori. Al-Karağī forniva non solo le formule per ottenere il quadrato o il cubo di un binomio, ma dopo aver considerato le identità della forma:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{a^2-b^2}{a-b}+(a-b)\right]=a\,, \qquad \frac{1}{2}\left[\frac{a^2-b^2}{a-b}-(a-b)\right]=b\,,$$

procedeva anche con la somma di qualche progressione aritmetica.

A dimostrazione della generalità d'applicazione dei metodi dell'algebra, al-Karağī mostrava come risolvere alcuni problemi di teoria dei numeri già noti attraverso procedimenti puramente algebrici.

Somma dei primi n numeri naturali

Per calcolare la somma dei primi n numeri naturali, al-Karağī considerava la differenza tra i quadrati di due numeri consecutivi e applicava il prodotto notevole per la differenza di quadrati:

$$(k+1)^2-k^2=(k+1+k)\cdot(k+1-k)=2k+1.$$

Passando poi alle sommatorie, otteneva

$$\sum_{k=1}^{n} \left[(k+1)^2 - k^2\right] = \sum_{k=1}^{n} (2k+1)$$

dove il primo membro si riduce a

$$(n+1)^2 - 1 = n^2 + 2n + 1 - 1 = n^2 + 2n.$$

Applicando le proprietà aritmetiche sulla seconda sommatoria, al-Karağī giungeva alla seguente uguaglianza:

$$n^2 + 2n = 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$

ovvero

$$n^2 + 2n = 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} k + n$$

da cui

$$\frac{n^2 + n}{2} = \sum_{k=1}^{n} k.$$

Al-Karağī concludeva così che la somma dei primi n numeri naturali è pari al semiprodotto del numero n per il suo successivo, ovvero

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}.$$

Somma dei quadrati dei primi n numeri naturali

Con una dimostrazione analoga, al-Karağī mostrava come calcolare la somma dei quadrati dei primi n numeri naturali, partendo in questo caso dalla differenza dei cubi di due numeri consecutivi:

$$(k+1)^3 - k^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1.$$

Passando poi alle sommatorie, otteneva

$$\sum_{k=1}^{n} \left[(k+1)^3 - k^3\right] = \sum_{k=1}^{n} \left(3k^2 + 3k + 1\right)$$

dove il primo membro si riduce a

$$(n+1)^3 - 1 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 1 = n^3 + 3n^2 + 3n.$$

Spezzando la seconda sommatoria in tre sommatorie, al-Karağī giungeva alla seguente uguaglianza:

$$n^3 + 3n^2 + 3n = 3 \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2 + 3 \cdot \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$

ovvero

$$n^3 + 3n^2 + 3n = 3 \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2 + 3 \cdot \sum_{k=1}^{n} k + n.$$

Applicando il risultato precedente, al-Karağī sostituiva a $\sum\limits_{k=1}^{n} k$ la corrispondente somma, trovando la relazione

$$n^3 + 3n^2 + 3n = 3 \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2 + 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n$$

da cui ricavava

$$3 \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2 = n^3 + 3n^2 + 2n - 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{3} - \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{2n^3 + 6n^2 + 4n - 3n^2 - 3n}{6} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\left(2n^2 + 2n + n + 1\right)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Somma dei cubi dei primi n numeri naturali

Al-Karağī dava una dimostrazione semplice ed elegante per la somma dei primi n cubi, sia di carattere geometrico sia di carattere algebrico[1]. L'algebrista persiano si proponeva di dimostrare che la somma dei cubi dei primi n numeri naturali è pari al

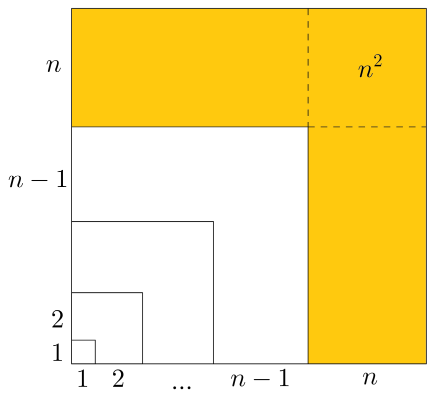
[1] Qui al-Karağī non rinuncia al pregio di una dimostrazione grafica, che consiste nell'essere visiva ed evidente.

quadrato della somma dei primi n numeri naturali. Utilizzando la simbologia moderna:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 .$$

Ad esempio, per $n = 10$, si ha che

$$1^3 + 2^3 + \ldots + 10^3 = (1 + 2 + \ldots + 10)^2 = \left(\frac{10 \cdot 11}{2}\right)^2 = 55^2 = 3025.$$



Al-Karağī considerava un quadrato di lato $1 + 2 + \ldots + n$ e osservava che l'area dello gnomone (in giallo) era pari al doppio dell'area di un rettangolo di dimensioni n e $1 + 2 + \ldots + n$ diminuita di n^2 in quanto la sovrapposizione dei due rettangoli è un quadrato di lato n. L'area dello gnomone di lato n è allora uguale a

$$2n\,(1 + 2 + \ldots + n) - n^2 = 2n\frac{n\,(n+1)}{2} - n^2 = n^3$$

dove si è utilizzata la somma per i primi n numeri naturali.

Analogamente la superficie dello gnomone di lato $n - 1$ è $(n-1)^3$. Continuando in questo modo, al-Karağī otteneva alla fine un quadrato di lato 1. Pertanto il quadrato iniziale di lato $1 + 2 + \ldots + n$ risultava decomposta in gnomoni successivi e nel quadrato di lato unitario. Considerando le rispettive aree, al-Karağī concludeva che

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2 .$$