# La risoluzione di un'equazione di secondo grado mediante la lettura algebrica degli *Elementi* di Euclide

Nella teoria sulle equazioni di secondo grado, Abū Kāmil cercava di giustificare ogni regola risolutiva mediante un'interpretazione geometrica, facendo ricorso ad alcune proposizioni del Libro II degli *Elementi* di Euclide, scelte con particolare oculatezza.

L'algebrista egiziano seguiva la stessa casistica per le equazioni introdotta da al-Khwarizmī, fornendo un diverso approccio risolutivo per ciascuna delle seguenti sei forme canoniche:

1. $ax^2 = bx$
2. $ax^2 = c$
3. $ax = c$
4. $ax^2 + bx = c$
5. $ax^2 + c = bx$
6. $bx + c = ax^2$

dove i coefficienti $a$, $b$, $c$ sono positivi.

Ad esempio, per determinare le radici positive di un'equazione del tipo

$$x^2 + c = bx$$

nell'ipotesi che $\left(\frac{b}{2}\right)^2 > c$, Abū Kāmil richiamava la proposizione 5, secondo cui dato un segmento $AB$, il cui punto medio è $C$, preso un altro punto $D$ su $AB$, si ha che

$$AD \cdot DB + CD^2 = AC^2.$$

Se si traduce la proposizione nella forma

$$AD \cdot DB = AC^2 - CD^2$$

secondo cui un rettangolo è la differenza di due quadrati, si hanno le due soluzioni espresse in termini algebrici[1].

[1]Non è restrittivo supporre che il coefficiente di $x^2$ sia pari a 1. Inoltre la condizione $\left(\frac{b}{2}\right)^2 > c$ corrisponde all'ipotesi che il discriminante dell'equazione di secondo grado sia positivo.

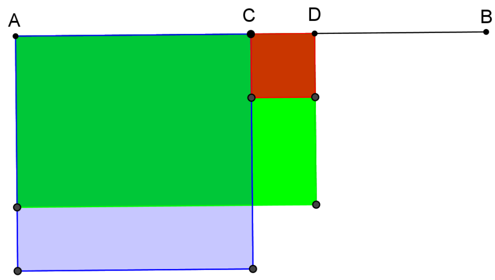


Figura 1: Prop. II, 5. Il punto $D$ compreso tra $C$ e $B$.

Infatti, nel caso in cui il punto $D$ si trovi tra $C$ e $B$ (fig. 1), posto $AB = b$ e $DB = x$, vale che

$$(b-x)x + \left(\frac{b}{2} - x\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

Poiché si conosce $AD \cdot DB$, cioè $bx - x^2 = c$, allora la relazione precedente è

$$c + \left(\frac{b}{2} - x\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

che si può trasformare in

$$\left(\frac{b}{2} - x\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c.$$

Ora $c$, $b$ e $\frac{b}{2}$ sono dati, quindi il problema si riduce a costruire un quadrato di lato $\frac{b}{2} - x$ e area $\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$. Per cui

$$\frac{b}{2} - x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

cioè

$$x = \frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}.$$

Se invece si suppone che $D$ si trovi tra $A$ e $C$ (fig. 2), allora nella formula risolutiva si trova il segno positivo, poiché la relazione sarà $\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$. Per cui

$$x - \frac{b}{2} = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

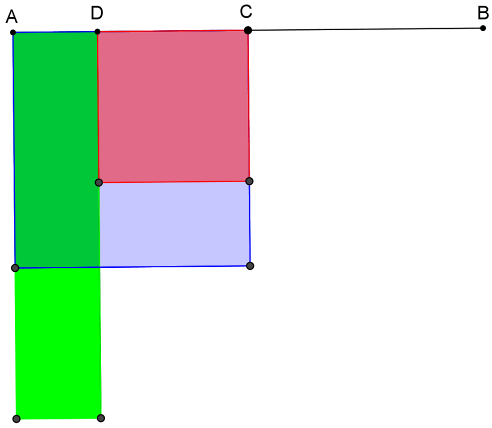


Figura 2: Prop. II, 5. Il punto $D$ compreso tra $A$ e $C$.

cioè

$$x = \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}.$$

In tal modo, si sono determinate le due radici positive dell'equazione considerata.

Per risolvere invece un'equazione del tipo

$$x^2 + bx = c$$

Abū Kāmil richiamava la proposizione 6, molto simile nel contenuto alla proposizione 5, in quanto afferma che se il punto $D$ si trova sul prolungamento di $AB$, allora vale che $AD \cdot BD + CB^2 = CD^2$, dove $C$ è sempre il punto medio di $AB$ (fig. 3).

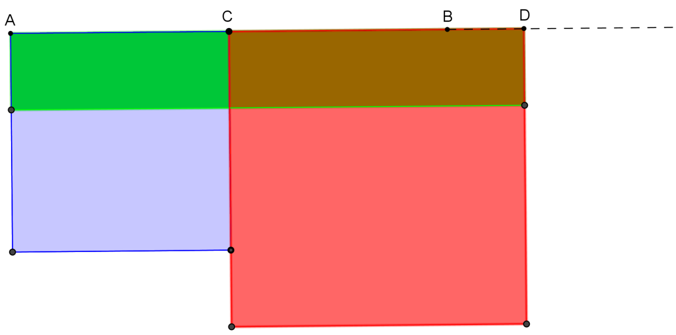


Figura 3: Prop. II, 6. Il punto $D$ è sul prolungamento di $AB$.

Ora, se $AB = b$ e $BD = x$, si ha che

$$(b+x)x + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2} + x\right)^2.$$

Poiché si conosce $AD \cdot DB$, cioè $(b+x)x = bx + x^2 = c$, allora la relazione precedente è

$$c + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2} + x\right)^2$$

da cui

$$\frac{b}{2} + x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}$$

cioè

$$x = -\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}$$

che è l'unica radice positiva per l'equazione della forma considerata[2].

È importante osservare nelle sue interpretazioni geometriche Abū Kāmil rinunciava all'esigenza classica di rispettare l'omogeneità dimensionale, tipica della geometria greca antica, in quanto segmenti e superfici potevano rappresentare indifferentemente sia numeri sia la prima o la seconda potenza dell'incognita.

[2]In tal caso, dato che $a = 1$ e $b$, $c$ sono coefficienti positivi, il discriminante dell'equazione è sicuramente positivo, quindi non sono necessarie ipotesi aggiuntive.