UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FERRARA

Laurea Magistrale in Matematica

La regola del tre, la regola di falsa posizione, risultati di teoria dei numeri e il sistema sessagesimale nella matematica araba

Corso di Divulgazione e museologia matematica

STUDENTESSE:
Michela Bimbato
Maria Vittoria Volpato

PROFESSORESSA:
Alessandra Fiocca

Anno accademico 2016-2017

Indice

Capitolo 1

La regola del tre

1.1 Che Cos'è

La regola del tre rappresenta quella che noi oggi chiamiamo regola del quarto proporzionale:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \times d = b \times c \tag{1.1}$$

Quando b e d sono diversi da 0, conoscendo tre di queste quattro grandezze in proporzione, la ricerca della quarta conviene risolvendo un'equazione di primo grado: si parla di quarto proporzionale.
Per esempio,

$$\frac{2}{x} = \frac{3}{7}$$

equivale a

$$3x = 14 \text{ quindi } x = \tfrac{14}{3}.$$

Nell'equazione 1.1, se $a = d$, allora vale che

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{a}$$

e si dice che a è medio proporzionale tra b e c. Dati tre numeri, a, b, c, questa regola permette di calcolare, grazie a prodotti trasversali, il numero per cui a e b sono grandezze proporzionali a c e d.
Questa regola si utilizza quando si hanno grandezze che si trovano in un rapporto di proporzionalità, come ad esempio il prezzo a seconda della quantità. Il suo nome deriva appunto dalla presenza di tre variabili date in input, per calcolarne la quarta.
Inizialmente, la regola del tre si rappresentava in tabelle formate da quattro celle, in cui sono presentati i valori d'entrata e il quarto proporzionale da calcolare. Il prodotto delle grandezze posizionate

in diagonale è uguale al prodotto delle grandezze nell'altra diagonale. Oggi noi diremmo che il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi, risultato noto già dal tempo di Euclide.
Per esempio, per risolvere il problema precedente, si può formare la seguente tabella di proporzionalità:

var1	var2
2	3
x	7

Il risultato finale è quindi ottenuto prendendo il prodotto dei due termini di una diagonale e dividendo per il termine restante.

1.2 La regola del tre nella storia

Se andiamo a cercare nella storia della matematica ci accorgiamo che sono molti gli autori che hanno citato e utilizzato, nei loro risultati, la regola del tre. Già nel V secolo d.C., possiamo notare che nell'opera *Arabhatiya*, composta da **Aryabhat** (476, 550 circa), uno dei primi matematici-astronomi indiani, appare una prima definizione della regola del tre. L'opera, che rappresenta un compendio delle conoscenze matematiche del tempo, tratta di seni, coseni, numeri irrazionali e radici, ma contiene senza dubbio diversi errori e, a regole molto semplici e già conosciute, affianca procedimenti complicati e definizioni arbitrarie espresse in un linguaggio piuttosto contorto, come ad esempio:

Nella regola del tre moltiplica il frutto per il desiderio e dividi per la misura. Il risultato sarà il frutto del desiderio.

Questa arcana definizione ha lo scopo di spiegare come trovare la x in una equazione dove a rappresenta la misura, b il frutto, c il desiderio e x è il frutto del desiderio.

Se andiamo nella fiorente città di Baghdad, centro della cultura islamica, nella prima metà del IX secolo, ci accorgiamo, invece, che già il matematico e astronomo **Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi** (780, 850 circa) utilizza la *regola del tre semplice* nel suo trattato intitolato *Kitab al-jabr wa-l-muqabala*. Al-Khwaritzmi cita la regola del tre, nella seconda parte del suo trattato, in cui affronta alcuni problemi mercantili e spiega che si possono risolvere con questa regola quei problemi nei quali ci sono due grandezze variabili direttamente o inversamente proporzionali, si conoscono i valori corrispondenti, e conoscendo il valore di una terza grandezza, si vuole calcolare il valore corrispondente della quarta. Il problema si dice *del* *tre semplice diretto* se le due grandezze che vi figurano sono direttamente proporzionali, si dice *del tre semplice inverso* se le grandezze sono inversamente proporzionali.

Anche **al-Biruni** (973, 1048 circa), matematico, filosofo e scienziato persiano, è autore di un trattato sulla regola del tre, *Sulla regola del tre dell'India*, con il quale vuole mostrare come già gli indiani avessero intrapreso la generalizzazione di questa regola. Lui studia la proporzionalità diretta, inversa, la regola del 5 e del 7. In quest'opera la regola e lo schema di calcolo, in cui i valori d'entrata sono scritti in due colonne, vengono spiegati in dettaglio con esempi pratici. In tutti i problemi che affronta, al-Biruni tratta solo numeri interi, ma le regole del tre sono fondate sulla teoria generale dei rapporti composti. Qui, l'autore si basa su Euclide e i suoi commentatori. In questo aspetto si nota come la matematica araba, grazie all'estensione del dominio arabo, che andava dall'Indo, in Asia, all'Ebro, in Spagna, risulti un connubio tra la matematica orientale, in particolare indiana, e quella occidentale, greco-ellenistica.

Un'opera cardine nella storia del pensiero umano è rappresentata dal *Liber Abaci* (1202) di **Leonardo Pisano** (Pisa, 1175-1235 circa). Si tratta di una summa del sapere aritmetico e algebrico del mondo arabo, in cui sono presenti tracce di autori arabi, da al-Khwaritzmi ad Abū-Kāmil, ma è altrettanto evidente che l'opera derivi non da un autore o da una scuola ma dalla matematica araba nel suo complesso, e che l'autore integri in essa tutte le conoscenze acquisite durante il suo apprendistato a Bugia prima, e poi nel corso dei suoi viaggi in tutto il mondo mediterraneo.

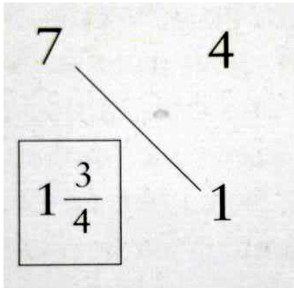
Leonardo Pisano, detto Fibonacci dedica alla regola del tre l'ultima parte del suo trattato, quando spiega in dettaglio le applicazioni di questa regola e le operazioni commerciali, quali il calcolo del prezzo delle merci, di interessi e di sconti, di guadagni e perdite di società, di cambi di monete, di baratti e molti altri ancora.
Nell'VIII capitolo del *Liber Abaci*, viene descritto in dettaglio il prezzo delle merci, che viene affrontato con la regola del tre, espressione astratta della proporzionalità tra la quantità di una merce e il suo prezzo.
Se tre libbre di carne costano sette soldi, quanto costeranno sette libbre? O viceversa, se tre libbre di carne costano sette soldi, quanta carne potrò comprare con quindici soldi?

In generale vale che se A e B rappresentano due diverse quantità della stessa merce, e se a e b sono i rispettivi prezzi, dalla proporzionalità tra quantità e prezzo di una stessa merce si avrà

$$a : A = b : B, \quad \text{e dunque} \quad aB = Ab.$$

Quindi, se tre di queste quattro quantità sono note, allora possiamo ricavare la quarta. Ad esempio

se una canna pisana, cioè 4 braccia di un certo panno, si vende per 7 soldi, e si chiede quanto vale un braccio, formalizza il problema come vedi: moltiplica poi 7 per 1 e dividi per 4; verranno soldi 1 e $\frac{3}{4}$*, cioè 21 denari. ... e devi sempre considerare che in questi problemi, come scrivi una merce sotto la merce simile, così scriverai una misura sotto la misura simile, un peso sotto un peso simile, cioè canne sotto canne, braccia sotto braccia, palmi sotto palmi, ... e così per gli altri.*



In questo esempio, Fibonacci ci vuole spiegare l'importanza del prestare attenzione all'omogeneità delle unità di misura, per quanto riguarda qualsiasi grandezza si vada a prendere in considerazione. Quando i dati non risultano essere espressi in maniera omogenea, è necessario ridurli alla stessa unità di misura, procedimento che può essere attuato applicando nuovamente la regola del tre. Infatti i problemi affrontati con questa regola, sono appunto problemi relativamente semplici, resi complessi dalla straripante molteplicità dei vari tipi di misura e di moneta.

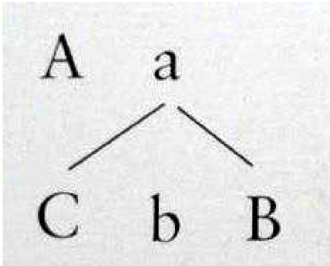
Per quanto riguarda il problema dei baratti, la modellizzazione utilizzata era l'applicazione della proporzione composta.
Siamo in presenza di due merci, ognuna con la sua quantità e il suo prezzo. Se consideriamo una quantità A di una merce a, e la quantità B di una merce b, che quantità della seconda merce posso ottenere in cambio di una quantità C della prima?

Indichiamo con X la quantità incognita della seconda merce. Si ha

$$\frac{X}{C} = \frac{a}{A} \times \frac{B}{b}.$$

La formula che ne deriva: $X = \frac{CaB}{Ab}$ prende il nome di *regola del tre composta.*

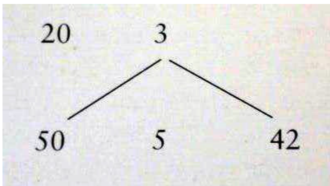
Per risolvere questa proporzione si proseguiva nel modo seguente: si riportavano le quantità note delle merci e i loro prezzi, mettendo al centro quella che compare due volte, nel nostro caso i prezzi; ora si può scrivere la quantità data C sotto quella della stessa merce A, da cui si ottiene il valore incognito moltiplicando in diagonale CaB e dividendo per Ab.



Facciamo un esempio numerico.

Ad esempio, 20 braccia di panno valgano 3 lire di pisani, e 42 rotuli di cotone valgano 5 lire di pisani. Si chiede quanti rotuli di cotone si avranno per 50 braccia di panno. Scrivi dunque sulla tavola 20 braccia, e accanto scrivi 3 lire, cioè il loro prezzo, sotto le quali scrivi 5 lire, e a fianco di queste scrivi 42 rotuli. Scrivi poi 50 braccia sotto 20 braccia, e moltiplica 50 per 3, che stanno diagonalmente, fa 150 che moltiplica per 42 posto diagonalmente, e quello che viene dividilo per gli altri numeri, cioè per 20 e per 5, cioè per 100.

Il risultato è 63, e tanti rotuli di cotone si avranno per 50 braccia di panno. Questo metodo procede dalla proporzione che ha la prima merce all'altra, che composta di due proporzioni, quella della quantità della prima merce al suo prezzo, e quella del prezzo della seconda merce alla sua quantità.



Con questa regola venivano risolte moltissime situazioni commerciali reali: baratti, cambi di monete, lavoro compiuto da più operai e simili. Le situazioni numeriche più complesse ricorrono quando le quantità di merce e i prezzi relativi sono rappresentati con unità diverse, e quindi è necessario preliminarmente ricondurre loro alla stessa unità di misura.

Capitolo 2

La regola di falsa posizione

2.1 Che cos'è

La regola di falsa posizione o *regula falsi* è un antico metodo iterativo utilizzato per risolvere equazioni di primo grado in una data incognita, sistemi di equazioni lineari o per cercare soluzioni approssimate di equazioni di secondo grado.
Il procedimento è di natura intuitiva, in quanto consiste nell'assegnare al valore cercato una *falsa posizione*, cioè un qualunque numero intero scelto arbitrariamente, e nel costruire conseguentemente una proporzione da cui ricavare il valore vero dell'incognita.

Esempio

Un esempio di applicabilità di tale metodo è per i problemi che si presentano nella forma $x + \frac{1}{n}x = b$ con n e b interi positivi. Il problema concretamente proposto consiste nel trovare una quantità che, aumentata della sua settima parte, sia uguale a 19. La sua traduzione secondo le notazioni moderne è l'equazione in una incognita x:

$$x + \frac{1}{7}x = 19.$$

Adottando la semplice falsa posizione $x = 7$ e sviluppando i calcoli, troviamo il valore 8 anziché 19. Stabilendo la proporzione $x : 7 = 19 : 8$, si ottiene il risultato $x = \frac{133}{8}$.
La proporzione si basa implicitamente sulla congettura che il rapporto tra 19 e il valore trovato 8 è uguale al rapporto tra il valore vero di x e quello supposto.

Un metodo quale il precedente è detto di ***semplice*** **falsa posizione** poiché si è assegnato un solo valore particolare all'incognita, e a partire da esso si sono sviluppati i calcoli.

2.2 *Doppia* falsa posizione

Altri problemi richiedono invece una procedura che consiste nell'assegnare due valori particolari all'incognita, da qui il nome di doppia falsa posizione. In questo caso si eseguono i calcoli per trovare gli errori commessi utilizzando le due false posizioni, applicando alla fine una formula di interpolazione lineare.

Esempio 1.

Si supponga di voler conoscere le lunghezze dei lati di un triangolo sapendo che il suo perimetro è uguale a $51cm$ e che le lunghezze dei lati sono tre numeri consecutivi. Con il simbolismo moderno il problema si risolve scrivendo l'equazione di primo grado

$$x + (x + 1) + (x + 2) = 51,$$

da cui si ricava $x = 16$.
Con il metodo della doppia falsa posizione si può supporre che il primo lato sia lungo $10\,cm$ (prima falsa posizione), e allora il perimetro sarebbe $33\,cm$, oppure sia di $11\,cm$ (seconda falsa posizione), e allora il perimetro varrebbe $36\,cm$. Ciò implica che l'aumento di $1\,cm$ nel lato, causa un aumento di $3\,cm$ nel perimetro. Rispetto alla prima falsa posizione si ricava che l'aumento del perimetro è di $51 - 33 = 18\,cm$; occorre dunque aumentare proporzionalmente il lato della quantità $18 : 3 = 6\,cm$. La soluzione che si ottiene è appunto $x = (10 + 6)\,cm = 16\,cm$.

Esempio 2.

Un viaggiatore tocca successivamente le città di Lucca, Firenze, Pisa, raddoppiando in ogni città il denaro con cui arriva e spendendo ogni volta 12 denari, per restare alla fine senza un soldo. Si chiede con quanti denari fosse partito.

Impostando il problema algebricamente, chiamiamo x la somma con la quale il viaggiatore era partito; lasciando Lucca si ritroverà con $2x - 12$ denari, che dopo la sosta a Firenze diventeranno $2(2x-12)-12 = 4x-36$, e infine a Pisa saranno $2(4x-36) = 8x-84$. Quest'ultima quantità è uguale a 0, quindi si ottiene

$$0 = 8x - 84 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{84}{8} = 10 + \frac{1}{2}.$$

Per risolvere lo stesso problema col metodo della doppia falsa posizione, possiamo dapprima supporre che il viaggiatore fosse partito con 12 denari; in questo caso alla fine del viaggio gli resterebbero 12 denari. Se invece fosse partito con 11 denari, arriverebbe a Pisa con 4 denari. Otteniamo quindi che una diminuzione di 1 nella supposizione iniziale ha portato ad una diminuzione di 8 nel risultato finale.

Quanto dovrò ancora diminuire la mia falsa posizione x per avvicinarmi di altri 4?

È necessaria una diminuzione di $\frac{1 \cdot 4}{8} = \frac{1}{2}$ denaro che, tolto dagli 11 denari, darà come capitale iniziale $x = 10 + \frac{1}{2}$, che è la soluzione del problema.

L'applicabilità di questo metodo è legata alla linearità delle equazioni e non al numero delle variabili coinvolte. Esso, infatti, funziona anche nel caso di sistemi di tre o più incognite, ovviamente al prezzo di notevoli complicazioni nei calcoli. Ad esempio, nel caso di tre incognite x, y e z, si darà un valore ad una delle tre, ad esempio alla x, e in corrispondenza di tale valore si risolverà il sistema delle prime due equazioni mediante la regola della doppia falsa posizione. Si introdurranno quindi i valori delle tre incognite (quello della x assunto e quelli della y e delle z calcolati) nella terza equazione, trovando un risultato diverso dal voluto. Si ripeterà poi lo stesso procedimento con un secondo valore della x, e si otterrà un nuovo risultato. A questo punto si applica il solito ragionamento:

Se con un incremento di tanto mi sono avvicinato di tanto, quanto dovrò ancora aumentare il valore assunto per ottenere il risultato voluto?

2.3 Dimostrazione

Dimostriamo ora la regola di falsa posizione nel caso in cui il problema si possa esprimere tramite un'equazione della forma:

$$(\frac{m_1}{n_1} + ... + \frac{m_k}{n_k})x = b,$$

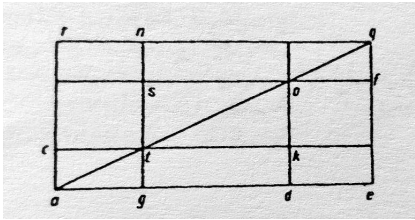
o più brevemente dall'equazione $ax = b$.

A questo punto si possono verificare tre distinti casi:

1. i due falsi valori sono minori dell'incognita;
2. i due valori sono maggiori dell'incognita;
3. l'incognita è compresa tra i due valori.

Illustriamo la dimostrazione solo nel terzo caso (per gli altri due il procedimento è il medesimo).

Rappresentiamo con ad il valore della grandezza ricercata, e con ag e ae i valori delle due false posizioni; il numero dato b è rappresentato dalla perpendicolare do. Tracciamo ora la retta ao e le rette perpendicolari ad ad che si intersecano con la retta ao formando i segmenti gt e eq.



Dati i rapporti proporzionali $\frac{gt}{ag} = \frac{eq}{ae} = \frac{do}{ao}$, i segmenti gt e eq rappresentano i valori assunti dall'equazione per $x = ag$ e $x = ae$ rispettivamente. Dato che il falso valore ag è noto, anche gt e il primo errore ts sono noti; analogamente è noto anche il secondo errore $fq = sn$. In tal modo otteniamo la superficie del rettangolo $fc = ts \cdot ae$: prodotto del primo errore per il secondo valore di falsa posizione, e la superficie $rs = fq \cdot aq$: prodotto del secondo errore per la prima falsa posizione. Come conseguenza di un teorema degli *Elementi* di Euclide, i rettangoli no e fk sono equivalenti e di conseguenza $fc + fr = rk$. Si ha inoltre $rk = ad(ts + sn)$, e questo implica:

$$ad = \frac{ts \cdot ae + sn \cdot ag}{ts + sn}$$

ossia

$$x = \frac{Ierr \cdot IIfp + IIerr \cdot Ifp}{Ierr + IIerr}.$$

Per quanto riguarda gli esempi della precedente sezione, essi ricadono rispettivamente nel primo e nel secondo caso (falsi valori entrambi minori o maggiori dell'incognita), che non sono stati illustrati nella dimostrazione. Di conseguenza, la formula appena ricavata non può essere applicata agli esempi descritti, ma se ne può ricavare facilmente una corretta per ogni caso.
Se nella dimostrazione l'incognita x è rappresentata dal segmento ad; nel caso in cui i falsi valori siano entrambi minori dell'incognita, quest'ultima sarà rappresentata dal segmento ae, mentre ag e ad saranno i falsi valori. Utilizzando la formula ricavata nella dimostrazione, si ottiene

$$ae = \frac{ad \cdot ts - sn \cdot ag}{ts + sn - sn}$$

ossia
$$x = \frac{Ierr \cdot IIfp - IIerr \cdot Ifp}{Ierr - IIerr}.$$
Si ragiona allo stesso modo anche per il secondo caso, nel quale l'incognita x sarà rappresentata dal segmento ag.

2.4 Storia nella matematica araba

La regola di falsa posizione era probabilmente già conosciuta a Baghdad all'epoca di al-Khwarizmi. Essa viene presentata nel manoscritto tradotto dall'arabo al latino *Libro sull'ingrandimento e la diminuzione*, di autore sconosciuto, che attribuisce questa regola agli Indiani. In quest'opera la regola è applicata a numerosi problemi che si possono esprimere attraverso equazioni lineari in un'incognita, o attraverso sistemi lineari in due incognite.

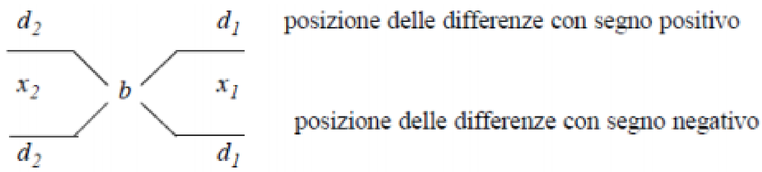
Sappiamo che già nelle opere greche, e anche in India e in Europa, erano diffusi una serie di problemi che consistevano nel trovare, a partire da due condizioni simmetriche, la quantità di una somma ripartita tra due persone. Il rapporto delle parti che esse detengono dipende dal montante della somma che l'uno dà all'altro. Esprimiamo il problema attraverso delle equazioni, che saranno del tipo:

$$\begin{aligned} x + a &= m(y - a) \\ x - b &= n(y + b). \end{aligned}$$

Qustā ibn Lūqā (Baalbek, 820-912), medico, scienziato e traduttore di origine greca che operò essenzialmente a Baghdad, dedicò un intero lavoro solo alla regola della doppia falsa posizione, chiamata anche *regola dei due errori*.
In quest'opera, dal titolo *Trattato di Qustā ibn Lūqā sulla dimostrazione dei due errori*, l'autore evidenzia il fatto che attraverso questa regola si possono risolvere tutti i problemi della scienza del calcolo che non utilizzano le radici, ossia i problemi che si possono risolvere tramite equazioni lineari. Sono poi presenti due dimostrazioni della regola: la prima è puramente aritmetica ma, forse per errore del copista, non è del tutto chiara; la seconda si basa invece sul metodo dell'algebra geometrica dei Greci e rappresenta un ulteriore esempio dell'utilizzo della teoria greca per il calcolo numerico.

La regola di doppia falsa posizione era conosciuta e utilizzata anche nei paesi del Medio Oriente e del Maghreb. Nell'opera *Bre-*

ve esposizione delle operazioni aritmetiche di **ibn al-Bannā al-Marrākushī**, un matematico e astronomo originario di Marrakech (1256-1321 circa), si trova una descrizione dettagliata della regola, che qui appare per la prima volta sotto il nome di *regola dei piatti della bilancia*.
Dato che la formula generale per la risoluzione della doppia falsa posizione $x = \frac{Ierr \cdot IIfp + IIerr \cdot Ifp}{Ierr + IIerr}$ è di una certa complessità, l'immagine dei piatti della bilancia permetteva di applicare la regola servendosi di uno schema grafico, e presenta quindi in modo più chiaro e preciso l'algoritmo eseguito. Il valore cercato dell'incognita ne è il perno, e in esso sta l'invisibile punto di equilibrio di un'indefinita oscillazione di approssimazioni numeriche per eccesso e per difetto.



Probabilmente ibn al-Bannā conosceva la dimostrazione geometrica di questa regola, sebbene non venga citata nella sua opera. Per quanto riguarda la regola dei piatti della bilancia, egli la espone già in formula generale e non come aiuto per un particolare esempio numerico; questa sarà una delle ragioni che hanno reso difficili i suoi studi per il pubblico a lui contemporaneo.

Il metodo di falsa posizione fu ripreso anche nel XIII secolo da **L. Fibonacci** nel tredicesimo capitolo del suo *Liber abaci*, di cui riportiamo qui un esempio:
«Due uomini avevano dei denari. Il primo disse al secondo: se tu mi dessi la terza parte dei tuoi denari, ne avrei 14. E il secondo rispose: e se tu mi dessi la quarta parte dei tuoi, ne avrei 17.»
Il problema consiste nel trovare quanti denari ha ciascuno, e può essere modellizzato con un sistema di due equazioni lineari in due incognite:

$$\begin{cases} x + \frac{y}{3} = 14 \\ y + \frac{x}{4} = 17 \end{cases}$$

Con il metodo della falsa posizione si può porre, per esempio, $x = 4$; dalla prima equazione si ricava $y = 30$. Sostituendo questi valori di x e y nel primo membro della seconda equazione si ottiene il risultato 31, che ha un errore di 14 $(= 31 - 17)$ rispetto al valore dato 17. Se invece si pone $x = 8$, si ha $y = 18$; in questo caso il risultato ottenuto nella seconda equazione è 20, con un errore di 3 (=$20 - 17$). La domanda usuale assume questa volta la forma: se con un incremento di 4 del valore di x si è diminuito l'errore di 11, di quanto si dovrà ancora aumentare il valore di x per diminuire ancora di 3 l'errore? La risposta è che si dovrà aumentare il valore di x di

$$\frac{4 \cdot 3}{11} = 1 + \frac{1}{11}$$

Quindi $x = 8 + 1 + \frac{1}{11} = 9 + \frac{1}{11}$, da cui $y = 14 + \frac{8}{11}$.

Capitolo 3

Problemi di teoria dei numeri

Analizziamo ora vari traguardi raggiunti nell'ambito della teoria dei numeri ad opera di diversi matematici arabi. Gli studi intrapresi sulla teoria dei numeri peccano di originalità: si tratta soprattutto dello studio dei numeri quadrati e dei sistemi lineari indeterminati. In ultima istanza tratteremo invece uno studio più peculiare sui numeri amicabili.

3.1 Abū Kāmil

Abū Kāmil Shujā ibn Aslam (850-930 circa) è stato un matematico musulmano egiziano. A testimoniare l'importante ruolo che ha ricoperto, sappiamo che egli era chiamato *al-Hasib al-Misri*, che significa il calcolatore egiziano. Diretto successore di al-Khwarizmi per quanto concerne lo studio dell'algebra, i suoi testi saranno poi di aiuto per matematici a lui successivi, incluso per al-Karaji che approfondiremo nella prossima sezione. Le sue tecniche verranno poi adottate anche da L. Fibonacci, e questo ci permette di considerare di fondamentale importanza l'apporto di Abū Kāmil nei confronti della diffusione in Europa dell'algebra.

Fra le caratteristiche più salienti della trattazione di Abū Kāmil si nota un elevato livello teorico e la tendenza all'aritmetizzazione; rispetto ad al-Khwarizmi, utilizza più ampiamente e con maggior sicurezza sia operazioni di calcolo algebrico, sia trasformazioni complicate sulle espressioni irrazionali. Ogni regola, infine, è dimostrata geometricamente.
È stato il primo matematico islamico a lavorare con equazioni algebriche di grado maggiore di 2 (fino all'ottavo) e a risolvere sistemi di tre equazioni non lineari con tre incognite. Alcuni dei suoi libri mancano di notazioni matematiche precise: ad esempio impiega le

locuzioni di cubo per indicare x^3 e, seguendo il principio additivo, quadrato-quadrato per x^4, e quadrato-quadrato-cosa $(x^2 \cdot x^2 \cdot x)$ per denotare x^5.

Opere

Le opere di Abū Kāmil vennero tradotte in ebraico antico, spagnolo e forse anche in latino. In seguito ne ricordiamo tre:

- *Libro delle cose rare nell'arte del calcolo*
  intera opera dedicata alla risoluzione dei sistemi di equazioni lineari indeterminati; questo lavoro portò più tardi a ricerche sui numeri reali e a soluzioni polinomiche, spianando la strada a scienziati dell'età successiva;

- *Algebra*
  è probabilmente la sua opera più influente, destinata ad altri matematici o almeno a lettori che avessero familiarità con gli *Elementi* di Euclide. In questo libro egli risolve sistemi di equazioni nei quali le soluzioni sono numeri interi e frazioni, e accetta i numeri irrazionali sia come soluzioni sia come coefficienti di equazioni di secondo grado;

- *Sul pentagono e sul decagono*
  in questo trattato l'autore si cimenta nell'applicazione dell'algebra alla geometria, ossia nell'impiego delle tecniche risolutive algebriche per problemi che coinvolgono enti geometrici. Per esempio, egli utilizza l'equazione $x^4 + 3125 = 125x^2$ per calcolare un'approssimazione numerica del lato di un pentagono regolare inscritto in un cerchio di diametro 10.

Nella breve prefazione del *Libro delle cose rare nell'arte del calcolo*, Abū Kāmil sottolinea che le soluzioni dei sistemi di equazioni lineari -quando si esprimono attraverso numeri interi- possono essere uniche o molteplici; ma vi è anche una vasta classe di problemi che non hanno alcuna soluzione intera. L'autore fornisce esempi di difficoltà progressiva di questi tre casi possibili, spiegando nel dettaglio il procedimento della soluzione. Precisiamo che in realtà le soluzioni che si cercavano erano solamente quelle strettamente positive; quindi parlando di numeri interi intendiamo i numeri naturali.

Esempio 1. Soluzione unica

In primo luogo egli presenta il seguente sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 5x + \frac{y}{20} + z = 100. \end{cases}$$

Per risolverlo, elimina l'incognita z ed esprime y in funzione di x:

$$100 - x - y = 100 - 5x - \frac{y}{20}$$
$$y = 4x + \frac{4}{19}x.$$

Ricaviamo che, affinché la soluzione sia una terna di numeri interi, x deve essere un multiplo di 19; segue che una soluzione al sistema è $x = 19$, $y = 80$, $z = 1$. Si rivelerà ben presto essere *la* soluzione, infatti già per $x = 38$ si ottiene $y = 160$ che, essendo maggiore di 100, non dà alcuna speranza di un'ulteriore soluzione per il sistema.

Esempio 2. Più soluzioni

Procedendo allo stesso modo egli trova sei soluzioni al seguente sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{2} + 2z = 100. \end{cases}$$

Analogamente si ha:

$$200 - 2x - 2y = 100 - \frac{x}{3} - \frac{y}{2}$$
$$3y = -3x - \frac{1}{3}x + 200$$

da cui si ottengono le sei terne che risolvono il sistema:

$\{x = 6, y = 60, z = 34\}$; $\{x = 15, y = 50, z = 35\}$; $\{x = 24, y = 40, z = 36\}$;

$\{x = 33, y = 30, z = 37\}$; $\{x = 42, y = 20, z = 38\}$; $\{x = 51, y = 10, z = 39\}$.

Esempio 3. Nessuna soluzione

Consideriamo ora invece il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 3x + \frac{y}{20} + \frac{z}{3} = 100. \end{cases}$$

Risulta:

$$100 - x - y = 300 - 9x - \frac{3}{20}y$$
$$x = 25 + \frac{17}{160}y.$$

Il più piccolo valore di x intero si ottiene solo per $y = 160$, ma questo numero è maggiore del numero totale di 100, quindi l'autore conclude che il problema non ha soluzione.

3.1.1 Un altro esempio

Presentiamo ora un altro esempio, che rappresenta probabilmente il problema più apprezzabile di tutta l'opera di Abū Kāmil ed è dato dalla ricerca di soluzioni per il seguente sistema:

$$\begin{cases} x + y + z + u + v = 100 \\ 2x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} + \frac{u}{4} + v = 100; \end{cases}$$

da cui si ricava

$$x = \frac{y}{2} + \frac{2}{3}z + \frac{3}{4}u$$

e quindi si ottiene

$$x + y + z + u = \frac{3}{2}y + \frac{5}{3}z + \frac{7}{4}u < 100.$$

A questo punto egli costruisce due insiemi di soluzioni di numeri interi.
Dapprima pone per y i valori 1, 3, 5, etc., per z i valori 3, 6, 9, etc., e per u i valori 2, 6, 10, etc. e considera le combinazioni che soddisfano le condizioni $y \leq 59$, $z \leq 54$, $u \leq 50$. Così facendo si ottengono 1443 soluzioni. In seguito egli pone per y i valori 2, 4, 6, etc., per z i valori 3, 6, 9, etc., e per u i valori 4, 8, 12, etc. e considera le combinazioni che soddisfano le condizioni $y \leq 58$, $z \leq 51$, $u \leq 52$. In questo modo si ottengono altre 1233 soluzioni; per un totale di 2676 soluzioni.

3.2 Al-Karaji

Abū Bakr ibn Muhammad ibn al Husayn al-Karaji (Karaj, 953-1029 circa) è stato un matematico e ingegnere persiano, che fondò a Baghdad una vera e propria scuola di allievi e seguaci. Viene spesso citato col nome di *al-hisabi*, cioè maestro di aritmetica, per le sue eccezionali doti didattiche. Egli conseguì importanti risultati nel calcolo della somma delle prime, seconde e terze potenze di numeri n.

Ricordiamo uno tra i suoi principali lavori di algebra: *Il glorioso* (*Al-Fakhri*), nel quale i problemi relativi alla teoria dei numeri sono presi in prestito per una parte importante dall'*Arithmetica* di Diofanto di Alessandria (III sec. d.C.), tradotta in arabo nel X secolo da parte di Abu l-Wafā e di Qusta ibn Luqa. Lo studio svolto da al-Karaji ricopre un ruolo importante nella storia della matematica: la riscoperta e la lettura delle opere di Diofanto, infatti, riviste alla luce dei metodi algebrici di al-Khwarizmi e di altri matematici arabi, ha permesso di ottenere nuovi e significativi risultati.

Fu il primo matematico a rendersi conto che la sequenza x, x^2, x^3,... può essere estesa indefinitamente, così come la reciproca $1/x$, $1/x^2$, $1/x^3$,....
Definì inoltre le regole del prodotto per due qualsiasi di questi monomi: se, ad esempio, il prodotto di un quadrato per un cubo veniva espresso a parole come quadrato-cubo senza esitazioni; la proprietà numerica di sommare gli esponenti non era ancora stata formalizzata. Egli praticamente diede la formula generale

$$x^n x^m = x^{m+n} \qquad \text{per ogni } n,m \text{ interi;}$$

sebbene fallì nel non definire $x^0 = 1$.

Nella prefazione dell'*Al-Fakhri*, al-Karaji dichiara, per la prima volta in modo esplicito, qual è lo scopo dell'algebra: determinare le grandezze incognite mediante quelle note, utilizzando i metodi più efficaci.

Nell'opera, inoltre, si riprende sostanzialmente la trattazione algebrica di Abū Kāmil, integrata però sia nella parte pratica, nella quale si sfrutta ampiamente l'eredità diofantea, sia nella parte teorica.

Relativamente alla teoria delle equazioni, è molto probabile che fu il primo ad affrontare il problema di determinare un numero quadrato la cui somma o differenza con un altro numero, dia ancora un numero quadrato; ad esempio problemi come i seguenti:

$$x^2 + 5 = y^2 \qquad\qquad x^2 - 10 = y^2.$$

Nel primo caso egli pone $y = x + 1$, nel secondo $y = x - 1$ e rispettivamente troviamo le soluzioni $x = 2$ e $x = \frac{11}{2}$.

In realtà si tratta di casi particolari dell'equazione indeterminata

$$y^2 = ax^2 + bx + c,$$

la quale, già trattata da Diofanto, viene studiata da al-Karaji alla fine della prima parte dell'*Al-Fakhri*.
Se a è un quadrato, egli pone $y = \sqrt{a}x+d$ con d un numero qualsiasi; invece se c è un quadrato, egli pone $y = mx + \sqrt{c}$ con m un numero qualsiasi.

Al-Karaji utilizza questo tipo di sostituzione anche su altre forme di equazioni di grado maggiore, come per esempio per il seguente sistema:

$$\begin{cases} y^2 = x^3 + ax^2 \\ z^2 = x^3 + bx^2. \end{cases}$$

Ponendo $y = mx$ e $z = nx$, si ottiene

$$x = m^2 - a = n^2 - b,$$

e il problema consiste nel determinare due quadrati m e n che abbiano come differenza un numero (in questo caso $b - a$). Così facendo il problema si riconduce al caso trattato precedentemente.

3.3 Thābit ibn Qurra

Abū l-Hasan Thābit ibn Qurra' ibn Marwān al-Sābi al-Harrānī (Harran, 830- Baghdad, 901) è stato un astronomo, astrologo, fisico, matematico e traduttore turco che visse a Baghdad nella seconda metà del IX secolo. Malgrado la sua lingua materna fosse il siriaco e conoscesse bene la lingua greca, scrisse le sue opere in arabo.
Famoso per i suoi lavori di meccanica, astronomia, matematica pura e geometria, studiò alcune sezioni coniche (parabola ed ellisse), il calcolo integrale (algoritmi per il calcolo delle superficie e volumi dei solidi) e la statica; la sua conoscenza del greco e la curiosità scientifica lo indussero a tradurre varie opere dal greco all'arabo.
Poco ci è rimasto delle sue opere originali: si sa che i suoi scritti di trigonometria sferica e soprattutto di astronomia ebbero larga fama; è inoltre noto che risolse equazioni cubiche per via geometrica e che fornì una regola per costruire numeri amicabili, approfondita nel seguente paragrafo.

Numeri amicabili

I numeri amicabili (o numeri amici) sono quelle coppie di numeri tali che ciascuno è la somma dei divisori propri dell'altro.
Thābit ibn Qurra scrisse l'*Opuscolo sui numeri amicabili* in cui vengono stabilite le condizioni che permettono di individuare le coppie di numeri amicabili.

Egli dimostra che i numeri

$$M = 2^n \cdot p \cdot q \quad \text{e} \quad N = 2^n \cdot r$$

sono amicabili quando

$$p = 3 \cdot 2^n - 1, \quad q = 3 \cdot 2^{n-1} - 1 \quad \text{e} \quad r = 9 \cdot 2^{n+1} - 1$$

sono numeri primi dispari, per un certo n positivo.

I numeri 220 e 284 sono una coppia di numeri amicabili, ottenuti ponendo $n = 2$, infatti:

$$p = 3 \cdot 2^2 - 1 = 11, \quad q = 3 \cdot 2^{2-1} - 1 = 5, \quad r = 9 \cdot 2^{2+1} - 1 = 71 \quad \text{con}$$
$$M = 2^2 \cdot 11 \cdot 5 = 220, \quad N = 2^2 \cdot r = 284.$$

Le ipotesi sono verificate, in quanto 11, 5 e 71 sono numeri primi dispari. Infatti si ha che i divisori di 220 sono $\{1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110\}$, i divisori di 284 sono $\{1, 2, 4, 71, 142\}$ e la loro somma vale

$$1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$$
$$1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220.$$

Questa prima coppia era nota anche ai Pitagorici e rimase per molto tempo la sola coppia di numeri amicabili conosciuta.
I matematici arabi ne scopriranno altre, tra cui 17 296, 18 416 (che si ottiene per $n = 4$), oggi nota col nome di *coppia di Fermat* perché nel 1636 verrà riscoperta dal matematico francese; e la coppia 9 363 584, 9 437 056 (che si ottiene per $n = 7$), oggi conosciuta sotto il nome di *coppia di Cartesio* perché da lui verrà riscoperta alcuni secoli dopo.
Non tutte le coppie di numeri amicabili si possono ottenere con il metodo soprascritto, e questo è il caso di (1 184, 1 210).
Infine, L. Eulero (1707-1783) pubblicherà nel 1750 una lista di 61 coppie di numeri amicabili.

Capitolo 4

Lo sviluppo del sistema di numerazione di posizione

Gli Arabi adottarono il sistema di numerazione indiano, ma si comportarono con grande libertà nell'usare le frazioni. Gli astronomi utilizzarono quasi esclusivamente le frazioni sessagesimali; i funzionari ed i commercianti prediligevano le unità frazionarie, con denominatore non superiore a 10, e con la loro somma esprimevano le frazioni comuni. Con molta prudenza i matematici arabi incominciarono ad estendere il principio posizionale decimale anche alle frazioni. Per esempio, al-Uqlīdisī nel trattato *Capitoli* dell'aritmetica indiana del 952-53, usa le frazioni decimali per approssimare radici quadrate e cubiche irrazionali, ma subito dopo converte il risultato in frazione sessagesimale.

4.1 Il sistema sessagesimale

Nel secolo VIII, presso gli arabi, si assiste ad un progressivo interesse per l'aritmetica e per i sistemi di numerazione. Inizialmente non vi erano simboli appositi per i numeri, che erano semplicemente espressi a parole. In seguito alle conquiste, dovendosi tenere i registri amministrativi in arabo, si pose anche il problema di come scrivere i numeri e questo venne risolto, in un primo tempo, adottando presso i singoli popoli i loro rispettivi simboli (greci o siriaci in Siria, copti in Egitto, etc.).

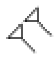
L'utilizzo del sistema di numerazione posizionale per la scrittura dei numeri si è espanso progressivamente e soprattutto tra gli astronomi, che utilizzavano la forma sessagesimale. È un sistema di numerazione posizionale di origine babilonese applicato sia ai numeri interi, sia alle frazioni, in cui ciascun numero, da 1 a 59 è rappresentato da un simbolo particolare. Si tratta di un sistema in cui esiste un rapporto di $\frac{1}{60}$ tra un'unità di misura e il suo sottomultiplo.

4.1.1 Il sistema sessagesimale babilonese

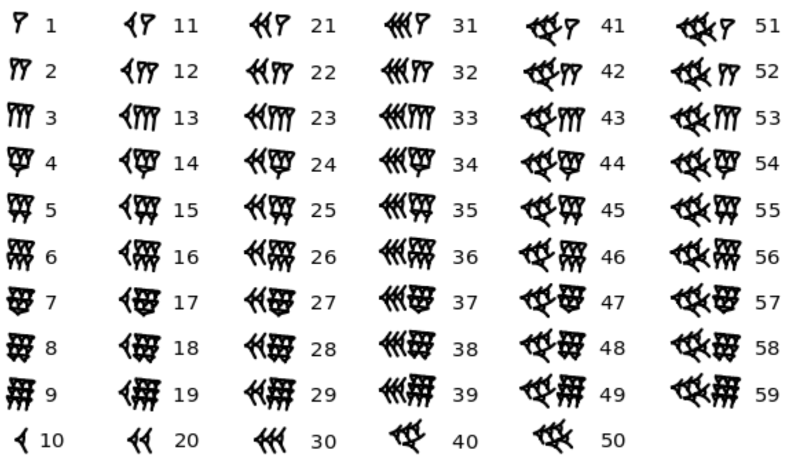
Il sistema di numerazione sessagesimale fu introdotto dai babilonesi e utilizzato dalle società mesopotamiche. È un sistema in cui le 60 cifre vengono scritte con un sistema additivo formato da soli tre simboli:

1.  un chiodo verticale che indica le unità;

2.  un punzone diretto verso sinistra che rappresenta le decine;

3.  due chiodi obliqui che rappresentano una posizione vuota (introdotto successivamente).

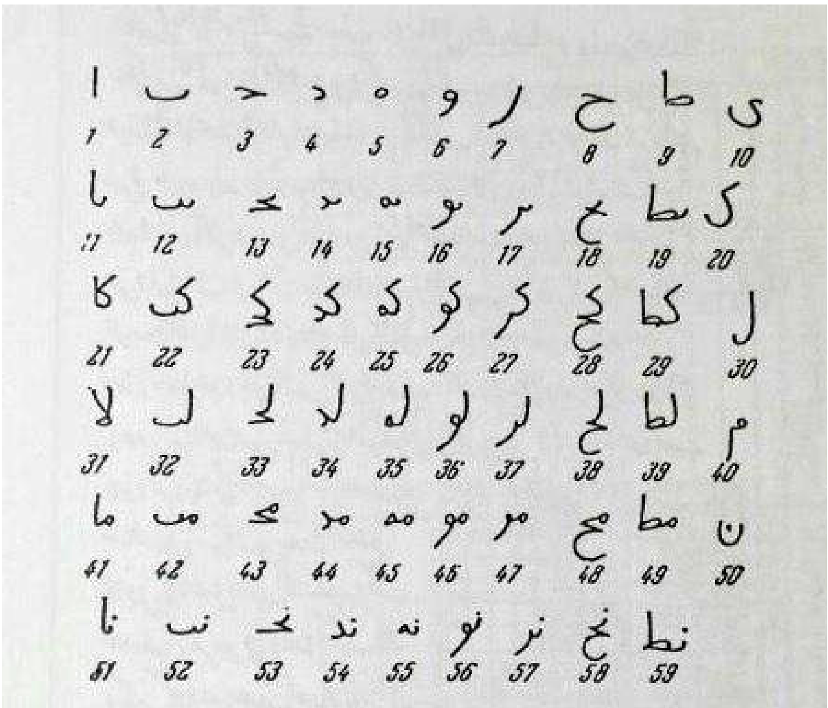
La seguente tabella rappresenta le cifre babilonesi fino a 59; lo zero non fa parte di questa tabella in quanto nel sistema babilonese non era considerato come quantità nulla ma veniva utilizzato per indicare una posizione vuota nella successione delle cifre.



I numeri minori di 60 vengono rappresentati con il sistema additivo, sommando le decine alle unità; i numeri maggiori di 60, invece, con un sistema posizionale, utilizzando le cifre create dal sistema additivo. Così, ad esempio, 62, uguale a $1 \cdot 60^1 + 2 \cdot 60^0$, era rappresentato esattamente come il numero 3. Ciò implica che da 59 in poi le cifre si ripetono e questo è causa di possibile ambiguità nel distinguere i numeri. Questo inconveniente è dato dall'utilizzo di un sistema di numerazione misto tra quello additivo e quello posizionale; viene ovviato dai babilonesi introducendo uno spazio tra ogni posizione.

4.1.2 Il sistema sessagesimale arabo

Il sistema degli arabi è, invece, esclusivamente posizionale; infatti la rappresentazione alfabetica di ogni numero avviene attraverso una o due lettere, la cui somma dei valori di ciascuna lettera è uguale al valore rappresentato. Questi simboli si chiamano cifre *gumal*, che significa, appunto, *somma*.



Le cifre gumal

Le lettere che indicano le decine si trovano a destra di quelle che indicano le unità, probabilmente, a causa della scrittura araba da destra verso sinistra. Per lo zero, si utilizza il simbolo particolare Ьo, che si ipotizza trovi la sua origine nella rappresentazione dello zero nei papiri greci di Alessandria. Nel corso degli anni questa rappresentazione si è evoluta e ha preso poco a poco una forma che assomiglia al segno cirillico dello zero (ъ). Si tratta di un sistema posizionale in quanto il valore del numero di ottiene moltiplicando ogni cifra per la potenza di 60 corrispondente alla posizione che occupa:

$$a_n \cdot 60^n + a_{n-1} \cdot 60^{n-1} + ... + a_0 + a_{-1}60^{-1} + ... + a_{-m} \cdot 60^{-m},$$

nella quale i coefficienti a_k possono assumere i valori da 0 a 59. Le unità frazionarie venivano rappresentate nella stessa maniera dei greci, con l'aiuto dei minuti, dei secondi, dei terzi decimali, e così via. Il modo con cui si effettuano le operazioni nel sistema di numerazione sessagesimale posizionale è spiegato in modo dettagliato nella *Chiave dell'aritmetica* di al-Kashī.

Ghiyāth al-Dīn Jamshīd Mas ūd al-Kashī (1380, 1429 circa), conosciuto come al-Kashī, nome che significa *ausiliario della fede*, era un astronomo originario della città iraniana di Kashan, tra Teheran e Ispahan. È nato nella seconda metà del XIV secolo; negli anni venti del XV secolo si è recato a Samarcanda, dove ha diretto diversi lavori di astronomia. A lui dobbiamo numerose opere di astronomia e tre notevoli trattati di matematica tra cui *Il Trattato sulla circonferenza del cerchio* e la *Chiave dell'aritmetica*.

La *Chiave dell'aritmetica* rappresenta un'eccellente guida di matematica elementare scritta per rispondere ai bisogni di un pubblico molto vasto. Tenendo conto della ricchezza del suo contenuto, della chiarezza e dell'eleganza della sua presentazione, quest'opera mantiene un posto unico all'interno di tutta la letteratura matematica del Medioevo. Naturalmente, gran parte del suo contenuto non è originale; si trovano problemi già studiati da molti secoli. Il titolo del trattato, ispirato a opere precedenti, indica che l'aritmetica viene considerata come una chiave che serve a risolvere i differenti problemi che dovevano essere risolti con il calcolo. Al-Khasī stesso definisce l'aritmetica come il mezzo per determinare le grandezze numeriche incognite con l'aiuto di grandezze conosciute.
L'opera si compone di 5 libri:

1. Sull'aritmetica dei numeri interi;
2. Sull'aritmetica delle frazioni;
3. Sul metodo di calcolo degli astronomi;
4. Sulla misura delle figure;
5. Sulla determinazione di grandezze incognite con l'aiuto dell'algebra, della regola della falsa posizione, etc.

Il sistema di numerazione posizionale sessagesimale è trattato nel terzo libro, dedicato al metodo di calcolo degli astronomi. Per rappresentare un numero, si scrivono successivamente tutte le sue cifre e poi, per indicarne l'ordine di grandezza, si determina o l'ordine di tutte le posizioni, oppure solamente quello dell'ultima. In tal modo, per esempio, 1 33 26 45 37 *secondi* significa il numero

$$1 \times 60^2 + 33 \times 60^1 + 26 \times 60^0 + 45 \times 60^{-1} + 37 \times 60^{-2}$$

e si legge 1 unità del secondo ordine, 33 unità del primo ordine, 26 gradi, 45 minuti e 37 secondi.
La moltiplicazione e la divisione nel sistema di numerazione posizionale sessagesimale fanno affidamento sull'utilizzo di due tabelle. La prima contiene i prodotti da 1×1 fino a 59×59, la seconda serve per determinare l'ordine di grandezza dei prodotti o dei quozienti di due valori sessagesimali.
Al-Khasī introduce il numero zero come esponente, vale a dire l'unità del sistema sessagesimale; in altri termini, pone $a^0 = 1$.
Per quanto riguarda gli esponenti, egli li classifica in due catene in base alla loro posizione rispetto all'unità: una catena ascendente, che contiene gli esponenti positivi, e una discendente che contiene quelli negativi.

Al-Khasī enuncia le formule moderne

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

nel seguente modo: *il numero dell'esponente del prodotto di due fattori semplici è la somma del numero dell'esponente di questi due fattori se essi si trovano dallo stesso lato dell'uguale, o la loro differenza se essi si trovano da due lati diversi. Il numero dell'esponente del quoziente di un dividendo e di un divisore è la differenza dei numeri dei loro esponenti se si trovano da uno stesso lato dell'uguale, e la loro somma se sono da parti diverse; il numero dell'esponente di questo quoziente si trova nella catena ascendente quando l'esponente del dividendo è maggiore di quello del divisore, altrimenti si trova nella catena discendente.*

Come alcuni suoi predecessori, al-Kashī raggruppa un prodotto di radici sotto un esponente comune e enuncia la seguente formula:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[mn]{a^m \cdot b^n} = \sqrt[mn]{a^m b^n}$$

La moltiplicazione e la divisione dei numeri sessagesimali interi e frazionari si effettuano esattamente come all'interno del nostro sistema decimale. I primi matematici arabi convertivano innanzitutto, come al-Khwarizmi, le frazioni sessagesimali in numeri decimali interi, effettuavano le operazioni all'interno del sistema decimale e li riconvertivano infine nel sistema sessagesimale. Per verificare il risultato, al-Khasī utilizzava la divisione per $59(60-1)$, che gioca lo stesso ruolo della prova del nove $9(10-1)$ nel sistema decimale. Per quanto concerne l'aritmetica sessagesimale di posizione, al-Kashī segue essenzialmente il modello dei numerosi scienziati che l'hanno preceduto. Egli iniziò ad estendere il principio posizionale decimale anche alle frazioni.

4.2 Le frazioni decimali

Un primo uso sistematico delle frazioni decimali in problemi di approssimazione si trova nel *Trattato di aritmetica* del 1172 di al-Samaw'al ibn Yahyā al-Maghribī (1130-1180 circa) che introduce la terminologia *parte delle decine*, *parte delle centinaia*, etc. per indicare i nostri decimi, centesimi etc. Fu, però, con al-Kashī che si ebbe una prima trattazione sistematica e completa delle frazioni decimali. Il suo obiettivo, pienamente raggiunto, fu di costruire un sistema di frazioni nel quale, come in quello sessagesimale, tutte le operazioni si potessero effettuare seguendo le regole che si applicano ai numeri naturali, ma che fossero appoggiati sulla base 10, affinché potesse essere accessibile a tutti coloro che non conoscessero il calcolo degli astronomi.

Nel primo capitolo del secondo libro della *Chiave dell'aritmetica*, dedicato alle frazioni, al-Kashī ha introdotto, basandosi sulle frazioni sessagesimali, le frazioni composte di potenze successive al dieci, introducendo la terminologia *decimi*, *secondi decimali*, *terzi decimali*, etc. Le frazioni decimali sono elegantemente utilizzate in un'opera anteriore di al-Khasī sul calcolo della circonferenza, dove si può conoscere che i matematici arabi introducono diversi tipi di scrittura delle frazioni. Il primo posto, naturalmente, spetta alle frazioni usuali: sopra e sotto una linea si scrivono due numeri, di cui il superiore, il denominante denota quante parti si prendono del numero inferiore, il denominato.

Nel *Liber Abaci* troviamo scritto *se si pone il due sopra il tre, così:* $\frac{2}{3}$*, si denotano due parti di tre parti dell'intero, cioè due terze. E se due sopra il sette, due settime, eccetera. Analogamente, 13 posto sopra 29 indica tredici ventinovesime. E 13 sopra 347, tredici trecentoquarantasettesime, e così per i restanti numeri.*

Dell'aritmetica araba fanno parte anche le frazioni multiple; si tratta di frazioni in cui invece di un solo numeratore e un solo denominatore compaiono un numero arbitrario di numeratori e di denominatori. Ad esempio, se sotto la linea si pongono il 2 e il 7 e sopra il 2 si scrive 1 e sopra il 7 si mette 4, in questo modo $\frac{1\ 4}{2\ 7}$ la frazione denoterà quattro settime e la metà di una settima. In generale, la *frazione multipla*:

$$\frac{a_n\ \ ...\ \ a_3\ \ a_2\ \ a_1}{b_n\ \ ...\ \ b_3\ \ b_2\ \ b_1}$$

denota il numero

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_1 \times b_2} + \frac{a_3}{b_1 \times b_2 \times b_3} + ... + \frac{a_n}{b_1 \times b_2 \times b_3 \times ... \times b_n}.$$

In particolare,

$$\frac{a_n\ \ \ 0\ \ ...\ \ 0}{b_n\ \ ...\ \ b_3\ \ b_2\ \ b_1}$$

sarà uguale alla frazione usuale

$$\frac{a_n}{b_1 \times b_2 \times b_3 \times ... \times b_n}.$$

Per quanto riguarda questi risultati, troviamo nel *Liber Abaci* delle regole da osservare che Fibonacci enuncia. Egli ricorda che i denominatori vanno disposti in ordine crescente da sinistra a destra; in questo modo si ottiene un'approssimazione migliore. Ad esempio, se scriviamo la frazione $\frac{7}{20}$ come $\frac{1\ 3}{2\ 10}$ e come $\frac{7\ 0}{10\ 2}$; notiamo che la prima dà effettivamente $\frac{3}{10}$ come prima approssimazione, la seconda è essenzialmente la frazione originaria, e non dà nessun valore approssimato.

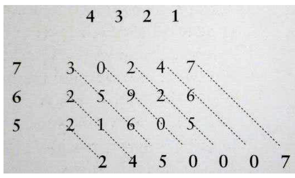
Le principali regole delle operazioni con le frazioni decimali sono descritte in dettaglio nel *Liber abaci*.

4.3 La somma

Per quanto riguarda la somma di 2 o più numeri interi l'unico problema deriva dal fatto che in genere il sistema di multipli e sottomultipli non è mai decimale. Ad esempio, le lire non si dividono in decimi, centesimi, etc., ma una lira si divide in 20 soldi, e un soldo in 12 denari. Lo stesso si può dire per i pesi, per le lunghezze, e in generale per ogni tipo di misura. Di conseguenza, quando si deve fare la somma di varie quantità di moneta, occorrerà sommare separatamente i denari, i soldi e le lire, riducendo poi le eccedenze. Ad esempio,per sommare $4£, 8s, 6d$ con $3£, 13s, 4d$ e con $2£, 11s, 7d$ il modo di procedere è il seguente, si comincerà dai denari: $6 + 4 + 7 = 17$, cioè $1s, 5d$. Si passa quindi ai soldi: $8 + 13 + 11 = 32$, a cui si aggiunge $1s$ proveniente dalla somma dei denari, e dunque si hanno $33s$, cioè $1£$ e $13s$. Infine, le lire danno $4+3+2+1 = 10$, e quindi, la somma è $10£, 13s, 5d$.

4.4 La moltiplicazione

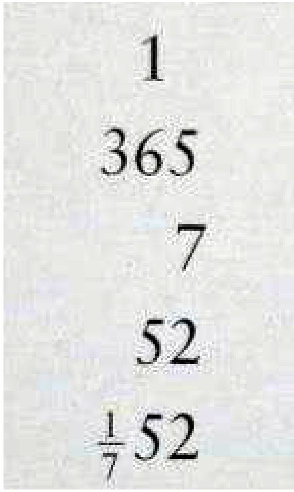
Per quanto riguarda la moltiplicazione tra numeri interi, al-Kashī ci spiega che l'algoritmo che veniva utilizzato era quello della moltiplicazione a scacchiera. Si tratta di una modalità che consiste nel moltiplicare il primo numero per le varie cifre del secondo a cominciare da quella delle unità, sommando poi opportunamente i numeri ottenuti.
Ad esempio, volendo moltiplicare 4321 per 567 si moltiplica successivamente $7, 6, 5$ per 4321; infine si eseguono le somme diagonalmente per ottenere il risultato.



4.5 La divisione

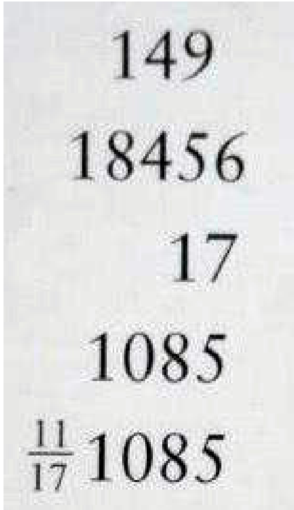
Vediamo ora come viene affrontata la divisione di numeri interi per numeri interi.
È qui che nascono i problemi più interessanti, perché, nonostante vengono considerate solo divisioni tra numeri interi, la divisione costringe a uscire dall'ambito di questi ultimi, e pone il problema della rappresentazione delle frazioni.
Possiamo notare che Leonardo Pisano, nel *Liber Abaci* distingue tre algoritmi: il primo quando il divisore è un numero piccolo, dove per piccolo intende minore o uguale a 13; il secondo quando il divisore è un numero primo maggiore di 13; e il terzo quando il divisore è un numero grande composto.

Il primo algoritmo non si discosta di molto da quello che utilizziamo oggi. Per esempio, se vogliamo dividere il numero 365 per 7, si procede in questo modo: si scrive il 7 sotto il 5, siccome 36 diviso 7 dà 5, e resta 1, si scrive 5 sotto il 6 e l'1 che resta sopra il 6. L'1 unito con il 5 di 365 fa 15, che diviso per 7 dà 2, con resto 1. Si scrive allora 2 sotto il 5, e il resto 1 diviso per 7 dà la frazione $\frac{1}{7}$. Il risultato della frazione è dunque $52\frac{1}{7}$. Si noti che Fibonacci scriveva la frazione prima del numero.



Lo stesso metodo governa la divisione per i numeri primi maggiori di 13, con la complicazione ulteriore delle divisioni singole: quante volte il 31 sta nel 274? Per risolvere queste divisioni, presso gli arabi esistevano delle tabelle di divisione che elencavano i quozienti e i resti delle divisioni per $2, 3, 4$ dei numeri fino a $20, 30$ e 40 rispettivamente, mentre per i divisori da 4 a 13 si limita a un elenco dei multipli, lasciando al lettore il compito di trovare i resti. Purtroppo, non essendo possibile avere una tavola di multipli per tutti i numeri primi, a un certo punto si dovrà eseguire la divisione senza tavole. Per i numeri primi di due cifre, Fibonacci suggerisce di operare nel modo seguente: supponiamo di dover effettuare la divisione 145 per 17. Si prende la decina più vicina a 17, cioè 20, e si divida 140 per 20. Il risultato, 7 o il numero successivo 8, è quello che si deve prendere (infatti si è diviso per 20 che è maggiore di 17; nel caso della divisone per 23 si sarebbe ugualmente diviso per 20, ma prendendo un numero uguale o minore al quoziente, dato che 23 è maggiore di 20). In questo modo si riescono a determinare abbastanza agevolmente i quozienti parziali; naturalmente i calcoli sono via via più intricati man mano che aumentano le cifre del divisore.

Ad esempio, la divisione di 18 456 per 17 si compie come segue: 18 diviso per 17 fa 1 col resto di 1; 14 diviso 17 è 0 con resto 14; 145 diviso 17 (che è 7 o 8, dato che 140 diviso 20 è 7) fa 8 col resto di 9; 96 diviso 17 è 5 con resto 11; e dunque in definitiva il risultato è 1085 $\frac{11}{17}$. Da notare che il resto della divisione di 145 per 17 si calcola direttamente, moltiplicando le singole cifre di 17 per 8, e sottraendo da 145.



Per quanto riguarda la divisione con i numeri composti, viene adottata la tecnica basata sulla rappresentazione delle frazioni che abbiamo descritto prima. Bisogna scomporre il denominatore D in modo che risulti:

$$\frac{1}{D} = \frac{1 \;\; 0 \;\; ...0}{b_n b_{n-1} ... b_n}.$$

Si tratta di un scomposizione non in fattori primi, ma composta, cioè si iniziano a cercare nell'ordine i fattori $10, 9, \ldots, 3, 2$, e poi, una volta esauriti questi ultimi, si prendono in considerazione i fattori primi maggiori di 10.
Ad esempio,

$$60 = 10 \times 6; \; 36 = 9 \times 4; \; 66 = 6 \times 11; \; 98 = 7 \times 7 \times 2;$$
$$1200 = 10 \times 10 \times 6 \times 2.$$

A questo punto si procede come segue: si dispongono i fattori del denominatore in ordine crescente da sinistra a destra, e si comincia col dividere N per il fattore più piccolo b_n. Sia q_{n-1} il quoziente e a_n il resto. Si prosegue dividendo q_{n-1} per b_{n-1}, con quoziente q_{n-2} e resto a_{n-1}, e così via, fino a dividere q_1 per b_1, con quoziente Q e resto a_1. Si avrà allora

$$\frac{N}{D} = \frac{a_n \; a_{n-1} \; ... \; a_1}{b_n \; b_{n-1} \; ... \; b_1} \cdot Q$$

Ad esempio, se si vuole calcolare $\frac{175}{396}$ si ha che $396 = 4 \times 9 \times 11$ e inoltre,

$$175 = 43 \times 4 + 3$$
$$43 = 4 \times 9 + 7$$
$$4 = 0 \times 11 + 4$$

per cui risulta

$$\frac{175}{396} = \frac{3\ \ 7\ \ 4}{4\ \ 9\ \ 11}.$$

Questo algoritmo risulta più lontano da quelli attualmente in uso. La causa è da ricercare nelle notazioni con le frazioni: mentre chi usa la notazione decimale può proseguire la divisione quanto vuole secondo un metodo uniforme; per il matematico medievale, che non disponeva di questa notazione, la divisione doveva necessariamente concludersi con un resto o, se si vuole, con una frazione.

Al-Khasī avrebbe potuto in fondo notare semplicemente che queste operazioni si effettuano secondo le regole già conosciute del calcolo degli astronomi, invece egli formalizza di nuovo la regola sugli esponenti per il caso della moltiplicazione e della divisione e di cui prima abbiamo dato l'espressione. Lui pone una grande attenzione alla conversione delle frazioni sessagesimali in frazioni decimali e inversamente. Per facilitare il calcolo, egli ha stabilito delle tabelle estremamente concise per poter esprimere per mezzo di frazioni sessagesimali, numeri decimali della forma

$$a_k \cdot 10^n, \quad \text{con } -10 \leq n \leq 10 \quad \text{ e } \quad a_k = 1, ...9.$$

4.6 Sistema sessagesimale e sistema decimale

Vediamo ora come trasformare un numero scritto in forma sessagesimale nel corrispondente in forma decimale. Al-Kashī sottolinea che quando una frazione sessagesimale non può essere espressa da una frazione decimale finita (si può, invece, sempre esprimere esattamente una frazione decimale come frazione sessagesimale), bisogna arrotondare i valori approssimandoli nel modo che oggi ci è familiare.

Per esempio, dopo aver constatato che $8'29''44'''$ (la parte frazionaria di π) è uguale a $0,141592$, che dà ancora un resto di $35'33''20'''$ dell'ultima decimale, pertanto più della metà; egli arrotonda la frazione decimale aumentando di 1 l'ultima cifra, ottenendo $0,141593$.

Il modo di procedere per trasformare il numero sessagesimale in decimale è il seguente:

$$\frac{8}{60} + \frac{29}{60^2} + \frac{44}{60^3} = \frac{x}{10} + \frac{y}{10^2} + \frac{z}{10^3}$$

se moltiplichiamo per 10, otteniamo

$$\frac{80}{60} + \frac{290}{60^2} + \frac{440}{60^3} = x + \frac{y}{10} + \frac{z}{10^2} \tag{4.1}$$

ma, essendo in un sistema sessagesimale, rappresento gli addendi del primo membro dell'equazione 4.1 in modo che tutti abbiano cifre comprese tra 0 e 59:

$$\frac{440}{60^3} = \frac{420}{60^3} + \frac{20}{60^3}$$

Semplifico e ottengo:

$$\frac{440}{60^3} = \frac{7}{60^2} + \frac{20}{60^3}$$

Procedo analogamente per gli altri fattori l'equazione 4.1 risulta:

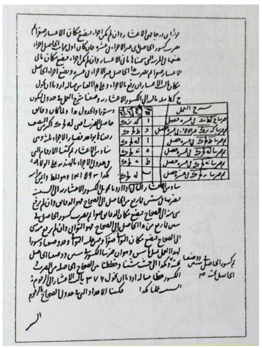
$$1 + \frac{24}{60} + \frac{57}{60^2} + \frac{20}{60^3} = x + \frac{y}{10} + \frac{z}{10^2}$$

Di conseguenza, segue che $x = 1$, che rappresenta la prima cifra decimale e possiamo procedere, analogamente a quanto fatto finora, con l'equazione:

$$\frac{24}{60} + \frac{57}{60^2} + \frac{20}{60^3} = \frac{y}{10} + \frac{z}{10^2} + ...$$

per continuare la ricerca delle altre cifre decimali.

Ecco una tabella, tratta dall'opera la *Chiave dell'aritmetica*, che mostra la trasformazione della frazione sessagesimale $8'29''44'''$ nella frazione decimale $0,141592$.

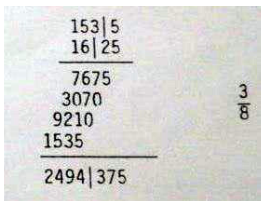


Si noti che al-Kashī ha calcolato 16 cifre decimali esatte del numero π, precisione che non sarà superata fino alla fine del XVI secolo. Egli non ha, però, menzionato, né osservato, la periodicità evidente della frazione $0,1415(592)$ che aveva ottenuto.

Nei sistemi di numerazione polinomiali, come il nostro, si pone il problema di distinguere la parte intera da quella decimale nella scrittura dei numeri. I simboli usati dai matematici furono diversi. I tentativi di introdurre le frazioni decimali risale a un'epoca anteriore rispetto a quella di al-Khasī. Ci sono segnalazioni del loro uso in Cina;

egli non fu nemmeno il primo matematico del mondo islamico a utilizzare le frazioni decimali. Esse si trovano anche nel *Trattato di aritmetica indiana* di Abú'l Hasan Ahmad ibn Ibrāhīm al-Uqlīdisī (920-980 circa), composta a Damasco nel 952 o nel 958. Il suo cognome, al-Uqlīdisī, significa probabilmente che fu un grande specialista e traduttore di Euclide. Egli scrisse le frazioni decimali in un modo simile al nostro, separando la parte intera di un numero con un tratto tracciato sopra; non le ha però utilizzate in modo sistematico e non ha nemmeno influenzato lo sviluppo di questo campo dell'aritmetica.
È certo che è stato al-Kashī il primo a spiegare chiaramente la teoria di queste frazioni, che le ha utilizzate frequentemente e ne ha descritto le loro operazioni.

Al-Kashī distinse la parte intera da quella decimale utilizzando metodi diversi: o separando la parte intera da un tratto verticale, o scrivendo la parte frazionaria di un altro colore, o indicando sopra ciascuna cifra la posizione che occupa; spesso egli indica solamente l'ultima posizione, che determina le altre. Le frazioni decimali di al-Khasī hanno conosciuto un notevole sviluppo in Turchia, nella seconda metà dei secoli XV e XVI. Questo è ciò che è evidenziato da due problemi tratti da una raccolta bizantina di un autore anonimo del secolo XV. Nel trentaseiesimo problema di questa opera si legge: *I Turchi fanno le moltiplicazioni e le divisioni secondo un procedimento particolare di calcolo.* Il metodo spiega come trasformare le frazioni ordinarie in frazioni decimali.



Per moltiplicare i numeri $153\frac{1}{2}$ e $16\frac{1}{4}$(problema 36) sostituiamo $\frac{1}{2}$ con 5 e $\frac{1}{4}$ con 25. Otteniamo quindi la moltiplicazione $1535 \times 1625 = 2494375$. Separiamo poi le cifre che occupano le ultime tre posizioni nel prodotto e otteniamo $2494,375$.
Vogliamo ricondurre la parte decimale in una frazione decimale. Utilizzando il procedimento inverso a quello precedentemente usato osserviamo che la parte decimale vale:

$$\frac{3}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{5}{10^3}$$

Portando allo stesso denominatore otteniamo: $\frac{375}{10^3}$, che semplificando risulta uguale a $\frac{3}{8}$.

Il calcolo viene fatto, nel sistema di numerazione di posizione, utilizzando delle lettere greche che rappresentano le cifre, e la parte frazionaria è separata da un tratto. Lo zero è indicato da un punto, come in arabo.

Nel problema successivo, il 37 ,si vede come anche nella divisione valga lo stesso procedimento. Per dividere 3562 per $53\frac{3}{8}$, si sostituisce a $\frac{3}{8}$ il valore 375 ottenuto nel problema precedente. A questo punto è necessario aggiungere tre zeri al dividendo, per avere lo stesso numero di cifre dopo la virgola; si ottiene $3562|000 : 53|375 = 67$.

Bibliografia

[1] Adof P. Youschkevitch, *Les mathématiques arabes (VIIIè-XVè siècles)*, VRIN REPRISE (1976).

[2] W. Maraschini, M. Palma, *Matematica*, Le Garzantine (2014).

[3] P. Zellini, *La matematica degli dèi e gli algoritmi degli uomini*, ADELPHI (2016).

[4] Il Giardino di Archimede, *Un ponte sul mediterraneo*, EDIZIONI POLISTAMPA (2002).

[5] R. Kaplan, *ZERO Storia di una cifra*, BUR (1999).

[6] L. Pepe, *Insegnare matematica, Storia degli insegnamenti matematici in Italia*, CLUEB (2016).

[7] E. K. Akyeampong, H. L. Gates, *Dictionary of African Biography*, Oxford University Press (2012).

[8] *MacTutor History of Mathematics archive*,
URL: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/index.html

[9] *Mathematica Italiana*,
URL: http://mathematica.sns.it/