UNIVERSITA DEGLI STUDI DI FERRARA

Dipartimento di Matematica

Tesina di divulgazione e museologia della matematica

Al-Khwarizmi e il suo trattato: “L'*al-Kitāb al-mukhtaṣar fī ḥisāb al-jabr wa al-muqābala”*

Laura Notarangelo
Nicola Ferrara

anno accademico 2016/2017

1. QUADRO GEOPOLITICO

L' era islamica pose le sue radici con l' entrata in scena di Maometto, nato intorno all'anno 570 d.C. alla Mecca. Egli, durante i suoi viaggi, incontrò cristiani ed ebrei che gli risvegliarono sentimenti religiosi fino a indurlo a considerarsi l' apostolo di Dio, mandato sulla terra per guidare il suo popolo. A tal proposito si narra che nel 610 l'Arcangelo Gabriele si rivelò a Maometto, trasmettendogli alcune parti di quello che sarebbe poi diventato il Corano, il libro sacro dei musulmani. Maometto si proclamò l' ultimo inviato di Allah, che concludeva la catena dei profeti biblici. L' anno 622 segnò una "svolta epocale" per gli Arabi. Infatti vi fu la famosa "Egira" (ossia "fuga") di Maometto di fronte a una minaccia di una congiura che attentava alla sua vita. Tale data sancì l' inizio dell' epoca musulmana o per meglio dire l' inizio del "calendario islamico" e dell' espansione di questa fede. Nel 632, mentre si preparava a far guerra ai Bizantini morì a Medina. Nonostante la sua morte l' espansione araba continuò. Il giorno stesso della morte di Maometto, i compagni scelsero il suo successore nella persona di Abu Bakr: questi fu difatti il primo Califfo della storia dell' Islam. In seguito nel 634 ad Abu Bakr successe Omar, sotto il quale iniziò l' irrefrenabile espansione dell' Islam, con la conquista Siria e Palestina strappandole all' Impero Bizantino. Nel 637, a seguito di una battaglia contro i Sasanidi, anche Iraq e Iran entrarono a far parte del nuovo impero musulmano. In seguito a una lunga ed estenuante battaglia contro i Bizantini, nel 642 Omar conquistò l' Egitto e tre anni più tardi la Libia. Col suo successore Othman, l' espansione araba continuò in Africa verso l'Atlantico. Successivamente vi fu la conquista di Afghanistan, Uzbekistan e parte dell' India nord-occidentale. Nel 711 gli arabi continuarono la loro espansione, approdando a Gibilterra e da lì risalirono conquistando Portogallo e Spagna, strappandole ai Visigoti, i quali regnavano in quelle ex-province dell' Impero romano. Nonostante tentativi di espansione oltre i Pirenei, dovettero fermarsi in quanto vi fu una battaglia storica a Poitiers nel 732, nella quale vinsero i Franchi guidati da Carlo Martello. Il dominio arabo sulla Penisola iberica durò per otto secoli, finché non vi fu la famosissima "Reconquista di Granada" nell' anno 1492. Nel 750 subentrò la dinastia degli Abbasidi. Tale dinastia regnò fino al 1258 e la capitale venne spostata da Damasco a Baghdad. Sotto tale dinastia fu conquistata la Sicilia, che fu araba dall' 827 al 1091, quando verrà conquistata dai Normanni. Un nuovo scenario si delineò dal momento in cui vi fu l' avanzata dei Turchi, che segnarono il declino degli Arabi.

Ritornando agli Arabi, nel 641 espugnarono la città di Alessandria d' Egitto, sino ad allora ritenuto il "Centro Matematico" del mondo.

Riportiamo qui un aneddoto molto significativo:

"Si racconta che al capo delle truppe vittoriose, quando chiese cosa dovesse fare con i libri ritrovati ad Alessandria, fu risposto di doverli bruciare poiché, se vi fossero state cose in accordo con quanto affermato dal Corano sarebbero stati superflui; invece, se vi fossero state cose discordanti dal Corano a maggior ragione sarebbero stato necessario bruciarli in quanto pericolosi e dannosi".

Dopo la morte di Maometto ci si pose il problema della sua successione riguardo la conduzione della vita pubblica. E' da qui che nacque la figura del "califfo", già citato in precedenza e ne si dà il significato di "vicario" o "sostituto". Il suo compito consisteva nel mantenere l' unità della comunità e nel far rispettare la legge divina contenuta nella rivelazione e negli insegnamenti del profeta.

Inizialmente non vi fu grande interesse intellettuale da parte degli Arabi. Ciò accadde fino al 750, poiché da quella data iniziò l' assorbimento del sapere sulle civiltà appena conquistate. Si narra, che nel 766, fu portata a Baghdad dall' India un' opera dal titolo "Sindhind" di contenuto astronomico-matematico. Sappiamo che in questo periodo di grande risveglio culturale degli Arabi vennero chiamati a Baghdad molti scienziati e filosofi dalla Siria, dall' Iran e dalla Mesopotamia. Si diffuse sotto i califfi di al-Mansur, ar-Rashid ed al-Mamun un notevole mecenatismo. Proprio in tal periodo la città di Baghdad diventò un vero e proprio centro culturale.

2. BIOGRAFIA DI AL-KHWARIZMI

Sappiamo ben poco sulla vita di al-Khwarizmi. Unico elemento certo nella ricostruzione della biografia sta nel nome al-Khwarizmi, che significa originario della Coresmia o Khwarezm, attiguo alla regione iraniana del Khorasan, località che fa parte dell' odierno Uzbekistan. Al-Khwarizmi sarebbe nato nel 780 circa a Kath, città oggi sepolta nel deserto. Si riferisce che uno storico arabo del IX secolo, al-Tabari , nomina al-Khwarizmi chiamandolo al-Majusi; l'etimologia della parola ne farebbe risalire la derivazione da "magus", termine adottato in lingua pahlavi per indicare i seguaci della religione zoroastriana. Questo avvalorerebbe l'ipotesi di una sua prima formazione matematica ed astronomica legata allo Zoroastrismo, ipotesi però tutt'altro che dimostrabile, sia per la cospicua presenza di preghiere e lodi a Dio e a Maometto presenti nelle sue opere (introduzione all'Algebra), sia per il ruolo subordinato che avevano gli studiosi non musulmani, pur accolti a corte.

Al-Tabari l'avrebbe definito anche al-Qutrubbulli, ossia originario di Qutrubbull, un sobborgo di Baghdad, attribuendo alla Coresmia l'origine di tutta la famiglia.

Infine si segnala la tesi dello storico turco Sayili, secondo il quale l'origine dell'autore potrebbe anche essere turca per due ragioni: il fatto che i Turchi costituissero una buona parte della popolazione della Coresmia (a suo dire) e anche che il califfo l'avesse scelto per una spedizione proprio in quelle terre.

Nel 786 al-Rashid divenne califfo e portò la cultura nella sua corte, in quanto era un periodo abbastanza buio da questo punto di vista presso gli arabi. Ebbe due figli al-Amin e al-Mamun, i quali alla sua morte duellarono per la successione. Alla fine prevalse al-Mamun nell' 813, che diventò califfo e continuò l' opera di mecenatismo avviata da suo padre in precedenza. Fondò a Baghdad un' accademia chiamata "Casa di Wisdom", qui vi studiarono e lavorarono al-Khwarizmi e i suoi contemporanei. La loro funzione consisteva nella traduzione di manoscritti scientifici da lingue tra le quali il greco, il siriaco, l' indiano e così studiarono l'algebra, la geometria e l'astronomia. Inoltre al-Mamun fece costruire una libreria di manoscritti, la prima dopo quella di Alessandria, al cui interno si collezionavano molti lavori dei Bizantini. La loro funzione consisteva nella traduzione di manoscritti scientifici da lingue tra le quali il greco, il siriaco, l' indiano e inoltre studiarono l'algebra, la geometria e l'astronomia. Si narra che al-Khwarizmi fosse così intento in questo compito tanto da imparare il greco autonomamente.

Ben presto a Baghdad verrà fondata la "Bayt al-Hikma", meglio nota come "Casa della sapienza" per volere del califfo al-Mamun, il quale si narra abbia ricevuto in sogno Aristotele ed, in seguito a tale episodio, decise di far tradurre tutte le "opere greche" che venivano ritrovate. Tra queste ricordiamo sicuramente opere di grande spessore nell' antichità e non solo, quali gli "Elementi" di Euclide e l' "Almagesto" di Tolomeo.

Verso l'820, quando al-Khwarizmi già godeva di grande rinomanza come scienziato a Merv, capitale delle province orientali del califfato abbaside, fu chiamato dal califfo al-Mamun a Baghdad, dove divenne primo astronomo e direttore della biblioteca annessa alla Casa del Sapere.

Alla morte di al-Mamun, al-Khwarizmi rimase al servizio dei suoi successori. Al-Tabari racconta che, quando il califfo al-Wathiq si ammalò seriamente, pregò lo scienziato di fargli l'oroscopo. Al-Khwarizmi giurò al califfo che sarebbe vissuto per altri cinquant'anni, ma dopo dieci giorni la profezia fu smentita dalla morte del sovrano.

Dopo questa breve digressione storica, ritorniamo ad al-Khwarizmi.

Si pensa dalla prefazione del suo libro sull' algebra che egli fosse un musulmano ortodosso, nonostante i suoi studi di astrologia non confermino questa ipotesi. Era così appassionato di Matematica da scrivere sovente problemi di aritmetica. Sognava anche i numeri ed era in grado di trasformare "ogni azione in numero". Portò a termine la maggior parte dei suoi lavori, tutti in lingua araba, tra l' 813 e l' 833.

Certamente è ricordato per i contributi dati all' Algebra mediante il suo famosissimo trattato: "Al-jabr wa'l muqabalah". Non a caso fu proprio da tale trattato che iniziò a circolare il nome "algebra", diventato poi di uso comune in Occidente.

Ricordiamo al-Khwarizmi anche come astronomo, come già citato in precedenza, e per i contributi apportati in geografia e cartografia. Infatti gli si dà grande merito per la realizzazione della prima carta geografica completa e valida che il mondo conoscesse sino ad allora.

Riportiamo qui un “aneddoto” che vede proprio lui come protagonista. Si narra che quando il califfo gli chiese:

“Se volessi interessarti allo studio di altre scienze, diverse da quelle matematiche, quale scienza penseresti di studiare?” egli rispose: “Adesso penso solo a una cosa, ovvero al modo di facilitare lo studio della Matematica a tutta la gente. E’ inutile studiare una scienza che non è utile nella vita pratica.”

Uno degli obiettivi a lui tanto cari era quindi quello di sfruttare tutta la sua conoscenza matematica in campo pratico e trasmetterla tramite le sue opere.

Un’ altra opera di grande spessore pervenutaci in una sola copia di traduzione latina si intitola “De numero indorum” (“Sul calcolo numerico indiano”), Il libro di aritmetica si conosce solo attraverso una versione latina del XIII secolo, conservata a Cambridge e pubblicata a Roma nel 1857 da B. Boncompagni, in quanto la versione araba sfortunatamente è andata perduta. E’ proprio tramite quest’ opera che al-Khwarizmi illustra un’ esposizione completa del sistema di numerazione indiano dando luogo a errate convinzioni, secondo le quali, si pensa che il nostro sistema di numerazione sia di origine araba. Infatti lettori poco accurati e attenti gli attribuirono non solo l’ opera, ma anche il sistema di numerazione che vi era descritto. Non a caso, per essere precisi oggi dobbiamo parlare di cifre indo-arabiche.

Inoltre lo schema di numerazione facente uso di cifre indiane, nel quale vi è la “**prima**” comparsa del numero zero, venne definito latinizzandolo “Algorismo” o meglio ancora “**Algoritmo**” termine derivante proprio dal nome al-Khwarizmi, con cui oggi siamo soliti indicare qualsiasi particolare regola di procedimento o di operazione.

Le due opere sull'aritmetica e sull'algebra sono diventate famose e hanno esercitato notevole influenza sullo sviluppo della matematica medievale occidentale, oltre che sugli studi successivi compiuti dagli arabi.

Al-Khwarizmi compilò anche uno zij (una raccolta di tavole astronomiche derivate dal Sindhind, ma anche dall’astronomia babilonese e tolemaica), il cui testo originale è oggi andato perduto, ma fu trasportato in Europa, tradotto in latino da Adelardo di Bath nel 1126.

Anche la geografia fu oggetto di studio per il matematico arabo. Le opere geografiche e cartografiche di al-Khwarizmi furono legate agli incarichi ricevuti dal califfo al-Mansur :

1. trovare la misura lineare corrispondente ad un grado di longitudine alla latitudine di Baghdad (il risultato ottenuto, 91 chilometri, era abbastanza preciso);
2. utilizzare le osservazioni astronomiche per trovare la latitudine e la longitudine di milleduecento luoghi importanti sulla faccia della terra, tra cui città, laghi e fiumi;
3. confrontare le osservazioni personali dei viaggiatori sulle caratteristiche fisiche di zone diverse del califfato e sui tempi impiegati per raggiungerle.

Al-Khwarizmi raccolse le sue scoperte nel libro Kitab Surat al-Ard, in cui migliorò la precisione della stima della lunghezza del Mediterraneo fatta da Tolomeo e diede rappresentazioni più dettagliate e precise della geografia dell' Asia e dell' Africa.

3. L'ALGEBRA DI AL-KWHARIZMI

3.1. INTRODUZIONE

Rispetto all'aritmetica, il trattato di algebra di al-Khwarizmi, composto fra l'813 e l'833, non ci è pervenuto in uno stato ottimale. La biblioteca dell'università di Oxford ne conserva un manoscritto arabo risalente al 1342. Vi sono anche diverse versioni latine, di cui le più famose sono quelle di Robert De Chester risalenti al 1145 (Segovia), seguite da quelle dell' italiano Gerardo da Cremona.

Nella versione in latino intitolata "Liber algebrae et almucabola" manca una parte considerevole della versione araba. Il testo latino, per esempio , non ha alcuna prefazione: ciò è forse dovuto al fatto che nella versione araba l'autore tributava grandi lodi al profeta Maometto e ad al-Mamun, "Il comandante dei fedeli". Al-Khwarizmi scriveva che quest'ultimo lo aveva invitato a :

"Comporre una breve opera sul calcolo per mezzo (delle regole) di Completamento e Riduzione, limitandosi a quegli aspetti più facili e utili della matematica di cui ci si serve costantemente nei casi di eredità , donazioni, distruzioni, sentenze e commerci e in tutti gli altri affari umani, o quando si vogliono effettuare misurazioni di terreni, scavi di canali, calcoli geometrici e altre cose del genere."

Il testo arabo si intitola "al-Kitāb al-mukhtaṣar fī ḥisāb al-ğabr wa al-muqābala" (Breve libro sul calcolo dell'algebra e l'almucabala) . A proposito del significato dei due termini presenti nel titolo "al-jabr" e "al-muqabala" , non ci sono informazioni certe. La parola "**al-jabr**" sembra si riferisse a qualcosa come "**restaurazione**" o "**completamento**", che in termini pratici consiste nella trasposizione dei termini negativi da un membro all'altro dell'equazione. Mentre si ritiene che la parola "**muqabalah**" si riferisca alla "**riduzione**" o "**equilibrio**", ossia alla cancellazione dei termini simili che compaiono in entrambi i membri di un'equazione. Un'altra testimonianza che conferma quanto affermato in precedenza è presente nel Don Chisciotte, dove l'uso della parola algebrista viene usato a proposito di un guaritore in grado di rimettere a posto o restaurare dislocazioni delle ossa.

È proprio dal titolo di questo trattato che deriva il termine, oggi ampiamente diffuso, "Algebra". La denominazione della trasformazione "al-jabr", che si trova all'inizio del trattato fu presto estesa a tutta la teoria delle equazioni. Per esempio già al-khayyam (1048-1131) parla dei "procedimenti di risoluzione dell'algebra" e degli "algebristi".

La parola Algebra fa la sua comparsa in Europa nel XIV secolo per indicare questa scienza, e si diffonde grazie all'opera di Leonardo Pisano, meglio conosciuto come Fibonacci, intitolata "Liber abaci".

L'opera di al-Khwarizmi consta di una parte propriamente algebrica, seguita da un breve capitolo sui contratti commerciali effettuati utilizzando la semplice "regola del tre"(tecnica utilizzata anche dagli indiani), da un capitolo sulla geometria abbastanza succinto relativo al calcolo di aree e volumi e da una ampia parte dedicata alle questioni testamentarie. Le ultime due parti, però, non sono presenti nelle traduzioni latine, le quali mostrano alcune variazioni.

Si è già evidenziato che lo scopo di al-Khwarizmi, era quello di scrivere un manuale finalizzato alla risoluzione dei problemi della vita quotidiana; questo spiega l'importante ruolo del trattamento dei problemi riguardanti i testamenti e i patrimoni, che occupano anche più di metà opera. Il diritto di successione musulmana era sottoposto (come in molte regioni ancora oggi) a regole ben rigide e complicate , in cui si determinavano le parti destinate agli eredi in funzione del loro grado di parentela (moglie, marito , figli ,ecc…), limitando così i voleri del donatore. E' per questo motivo che i giuristi si trovavano spesso nelle condizioni di dover affrontare problemi contenenti formule abbastanza complesse, ancor più complicate di quelle presenti nei manuali pratici.

Tuttavia si riscontrano interessi verso problemi di eredità anche prima di al-Khwarizmi, ad esempio nell' Antica Babilonia.

3.2. EQUAZIONI, SEI FORME CANONICHE

3.2.1. INTRODUZIONE

Come è stato già anticipato la prima parte del trattato è di stampo prettamente algebrico. Fra i principali concetti qui utilizzati si trova la nozione di equazione di primo e di secondo grado a coefficienti numerici.

Qui al-Khwārizmī si distingue dai predecessori: non si tratta più, come presso gli egizi e i babilonesi, di risolvere problemi aritmetici e geometrici, che si possono tradurre in termini di equazioni, ma al contrario si parte dalle equazioni e i problemi vengono dopo.

La trattazione delle equazioni di secondo grado comportò in alcuni casi la comparsa dei radicali nelle soluzioni.

L'algebra di al-Khwārizmī è interamente retorica; egli non usa infatti alcun simbolo ed è piuttosto prolisso nelle spiegazioni.

La nozione di base è, come si è detto, quella di equazione a coefficienti numerici e i termini di un'equazione sono indicati con nomi diversi.

Mentre in aritmetica, sostiene il matematico arabo, si incontrano solamente numeri ordinari, in algebra è necessario distinguere tre tipi di quantità che indica con i termini:

- "dirham" (unità monetaria)
- "gizr" (radice) o "say" (cosa)
- "mâl" (bene, importo, ma anche quadrato)

Con la simbologia attuale questi termini corrispondono rispettivamente al termine noto, alla x e a x^2.

Per quanto riguarda l'origine dei termini algebrici utilizzati da al-Khwarizmi, sono state avanzate molte ipotesi.

Nella sezione dedicata alle questioni ereditarie o testamentarie, il termine "mâl" significa bene ,ma ha anche acquisito il senso di quadrato rispetto alla radice "gizr". In effetti al-Khwarizmi scrive che "mâl" è il prodotto della radice per se stessa.

La parola "say" è stata probabilmente scelta per indicare l'incognita a causa del suo significato "cosa", ossia qualcosa che viene ricercato. Mentre la parola " gizr" si può tradurre come la radice di un albero, ma anche come le fondamenta o l'elemento di origine. Può essere che ci sia un legame tra la parola "dirham" e il termine corrispondente indiano "rupa", che designa tra l'altro un'unità monetaria. Il senso matematico di questi termini è comunque chiaro, possiamo tradurre semplicemente "gizr" come incognita o radice e "mal" come quadrato.

All'inizio dell'opera al-Khwārizmī distingue sei tipi canonici o normali di equazione a coefficienti interi positivi $(a, b, c > 0)$, che egli presenta semplicemente a parole:

1. I quadrati sono uguali alle radici : $ax^2 = bx$;
2. I quadrati sono uguali ad un numero: $ax^2 = c$;
3. Le radici sono uguali ad un numero: $ax = c$;
4. I quadrati e le radici sono uguali ad un numero: $ax^2 + bx = c$;
5. I quadrati ed i numeri sono uguali alle radici: $ax^2 + c = bx$;

6. Le radici e i numeri sono uguali ai quadrati: $bx + c = ax^2$.

Tutte le altre equazioni non possono essere risolte se non vengono prima ricondotte a una di queste forme, nelle quali tutti i termini devono apparire come grandezze additive. In questo contesto intervengono le due operazioni già menzionate nel titolo dell'opera, "al-jabr" e "muqabala".

Ci si libera dei termini influenzati dal segno con il "jabr", vale a dire il riempimento, operazione che consiste nell'aggiungere ai due membri dell'equazione dei termini uguali a quelli che sono influenzati dal segno. Poi si riducono tutti i termini simili usando la regola della "muqabala", ossia "riduzione" o "equilibrio" ovvero la cancellazione dei termini simili che compaiono in entrambi i membri di un' equazione. Inoltre il coefficiente del termine di secondo grado viene sempre ridotto all'unità, con un'operazione, detta al-hatt, che in particolare è applicata nella risoluzione delle equazioni dei tipi 4 e 5.

Ad esempio per l'equazione nella forma:

$$x^2 + (10 - x)^2 = 58$$

cioè

$$2x^2 + 100 - 20x = 58,$$

al-Khwarizmi con **l' al-jabr** ottiene:

$$2x^2 + 100 = 58 + 20x \quad ,$$

poi, con **l' al-muqabala**:

$$2x^2 + 42 = 20x$$

e infine **l' al-hatt** dà luogo a:

$$x^2 + 21 = 10x.$$

Si ottiene così un'equazione della forma 5.

3.2.2. LE PRIME TRE FORME

Nella risoluzione delle prime tre forme , si possono osservare due particolarità: in primo luogo l'equazione $ax^2 = bx$ (tipologia 1) viene trattata come l'equazione lineare $ax = b$, tralasciando quindi la soluzione nulla $x = 0$.

Questa esclusione , dovuta forse al fatto che tale soluzione non aveva incidenza nei problemi concreti, persisterà nella storia dell'algebra fino al sec. XVII.

D'altra parte, è giusto sottolineare il calcolo, da parte di al-Khwarizmi, del **quadrato della radice di un'equazione** oltre che della radice stessa.

Per esempio riguardo al primo tipo di equazione $x^2 = 5x$, egli afferma: "La radice del quadrato è $x = 5$ e 25 costituisce il suo quadrato" .

Anche nel caso dell'equazione lineare $\frac{1}{2}x = 10$ (tipologia 3), viene fornita oltre alla radice 20, anche il suo quadrato 400.

Inoltre nel primo esempio ($x^2 + 21 = 10x$) egli indica subito che la radice è 3 e il suo quadrato è 9.

Uno dei punti più importanti e innovativi della trattazione, è la ricerca della soluzione algoritmica, ovvero generale, che prescinde dai dati numerici.

Al -Khwārizmī dapprima enuncia, a parole, la regola risolutiva e poi ne fornisce la dimostrazione geometrica, sfruttando l'eredità greca classica.

Inoltre, studia l'equazione come oggetto matematico in sé, ne cura la classificazione, il metodo risolutivo e la discussione di ogni caso. Non tiene però mai conto delle soluzioni negative in quanto vi era un forte legame con le grandezze geometriche (quindi sempre positive), e un ancoraggio ai problemi concreti della vita quotidiana. Peraltro questo atteggiamento rimarrà a lungo immutato anche negli algebristi che seguono e non verrà messo in discussione se non nel sec. XVII.

3.2.3. LE ULTIME TRE TIPOLOGIE

Ecco ora in dettaglio, su alcuni esempi, la risoluzione delle equazioni complete di secondo grado dei tipi 4, 5 e 6, elencati sopra.

Al-Khwārizmī inizia con l'equazione:

$$x^2 + 10x = 39$$

che, come molti altri suoi esempi , si ritrova in quasi tutti i manuali arabi ed europei di età media.

Egli afferma:

"La soluzione è: dividi a metà il numero delle radici, che in questo caso dà 5. Moltiplica questo per se stesso: il prodotto è 25. Aggiungilo a 39, ottenendo 64. Ora estrai la radice di questo, che è 8 e sottrai da questo la metà delle radici, 5; il resto è 3. Questa è la radice del quadrato che cercavi e il suo quadrato è 9."

In notazioni moderne, l'equazione è rappresentabile con $x^2 + px = q$ ed è risolta con la regola:

$$x = \sqrt{q + (\frac{p}{2})^2} - \frac{p}{2}$$

Alle regole risolutive con i radicali, come si è già detto, **al-Khwārizmī** fa seguire la dimostrazione geometrica che, in questo caso, presenta due diverse costruzioni, corrispondenti al procedimento noto come "completamento del quadrato".

La prima (v.fig.1) consiste nel costruire il quadrato x^2 e quattro rettangoli di altezza $\frac{10}{4}$ sui lati di quello. Si completa poi la figura con quattro quadrati di lato $\frac{10}{4}$. Si ottiene così, sapendo che $x^2 + 10x = 39$, un quadrato di area $39 + 4(\frac{10}{4})^2 = 64$, il cui lato, $x + 2\,\frac{10}{4}$, misura 8. Si deduce quindi $x = 3$.

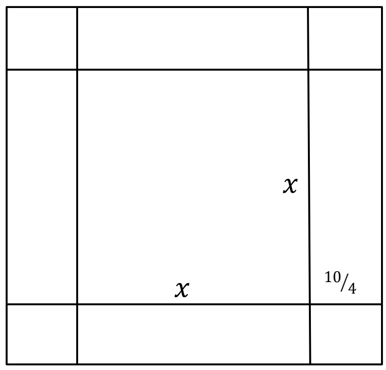

Fig.1

Nel caso dell'equazione $x^2 + px = q$, queste trasformazioni geometriche corrispondono alle seguenti trasformazioni algebriche:

$$x^2 + 4\left(\frac{p}{4}x\right) + 4(\frac{p}{4})^2 = q + 4(\frac{p}{4})^2,$$

$$(x + 2\frac{p}{4})^2 = q + 4(\frac{p}{4})^2,$$

$$x + 2\frac{p}{4} = \sqrt{q + 4(\frac{p}{4})^2}.$$

Da cui si ricava poi la regola di al-Khwarizmi riportata sopra:

$$x = \sqrt{q + (\frac{p}{2})^2} - \frac{p}{2}.$$

La seconda dimostrazione geometrica si deduce dalla Fig. 2

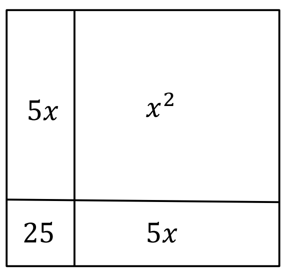

Fig.2

e corrisponde alla seguente trasformazione: :

$$x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2}x + (\frac{p}{2})^2 = q + (\frac{p}{2})^2 \text{ ecc.}$$

Per i più temerari, che si vogliano cimentare nel ripercorrere dettagliatamente gli algoritmi proposti nel trattato, riportiamo qui di seguito le dimostrazioni delle due forme successive.

Nel caso dell'equazione del **tipo 5** ($x^2 + q = px$), **al-Khwārizmī** sa che si possono avere due radici, una sola (doppia) o nessuna (quando le radici non sono reali).
Per mostrare la completezza della trattazione, si riporta per esteso il ragionamento di **al-Khwārizmī** relativo all'equazione

$$x^2 + 21 = 10x,$$

seguito dalla traduzione in simbolismo moderno delle operazioni espresso a parole.
"Quadrati e numeri uguali a radici. Il seguente esempio è un'illustrazione di questo tipo: un quadrato e 21 unità uguali a 10 radici. La regola risolutiva è la seguente: dividi per 2 le radici, ottieni 5. Moltiplica 5 per se stesso, hai 25. Sottrai 21 che è sommato al quadrato, resta 4. Estrai la radice, che dà 2 e sottrai questo dalla metà delle radici, cioè da 5, resta 3. Questa è la radice del quadrato che cerchi e il suo quadrato è 9. Se lo desideri, aggiungi quella alla metà della radice. Ottieni 7, che è la radice del quadrato che cerchi e il cui quadrato è 49."
In termini algebrici moderni l'algoritmo si può esprimere nel modo seguente:

$$x^2 + 21 = 10x$$

$$10:2 = 5$$

$$5 \cdot 5 = 25$$

$$25 - 21 = 4$$

$$\sqrt{4} = 2$$

$$5 - 2 = 3$$

$$x = 3$$

$$x^2 = 9$$

$$2 + 5 = 7$$

$$x = 7$$

$$x^2 = 49$$

E si può riassumere nella formula:

$$x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}.$$

Sono così presentate le due soluzioni positive dell'equazione, seguite dal commento:

"Se tu affronti un problema che si riconduce a questo tipo di equazione, verifica l'esattezza della soluzione con l'addizione, come si è detto. Se non è possibile risolverlo con l'addizione, otterrai certamente il risultato con la sottrazione. Questo è il solo tipo in cui ci si serve dell'addizione e della sottrazione, cosa che non trovi nei tipi precedenti. Devi inoltre sapere che, se in questo caso tu prendi la metà delle radici e la moltiplichi per se stessa e il prodotto risulta minore del numero che è aggiunto al quadrato, allora il problema è impossibile. Se invece risulta uguale al numero, ne segue che la radice del quadrato sarà uguale alla metà delle radici che sono col quadrato, senza che si tolga o si aggiunga qualcosa."

Gli ultimi due casi corrispondono ad avere discriminante negativo $(\frac{p}{2})^2 < q$, dunque nessuna soluzione in campo reale, e discriminante nullo, vale a dire due soluzioni coincidenti ($x = \frac{p}{2}$).

La dimostrazione geometrica di al-Khwārizmī, distingue due possibilità, corrispondenti alle due soluzioni $x = \frac{p}{2} - \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$ e $x = \frac{p}{2} + \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$.

Della prima è data una costruzione dettagliata, mentre per la seconda si hanno pochi cenni nel testo arabo e alcune figure nelle versioni latine.

Ecco come viene presentata la prima costruzione (Fig. 3):

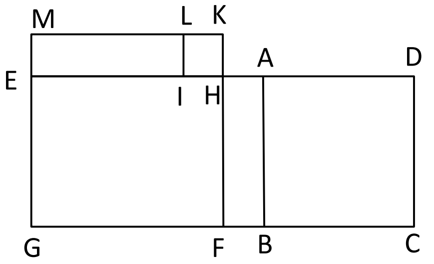

Fig.3

il rettangolo $GCDE$, di lati $GC = p$ e $CD = x$, è formato dal quadrato $ABCD = x^2$ e dal rettangolo $GBAE = (p - x)x = q$. Se si pone $x < \frac{p}{2}$ cosa che al-Khwarizmi non dice esplicitamente, si può innalzare in F, punto medio di GC, la perpendicolare FH e GC e prolungare FH del segmento $HK = AH = \frac{p}{2} - x$. Si costruiscono quindi i quadrati $GFKM = (\frac{p}{2})^2$ e $IHKL = (p/2 - x)^2$.

Dalla costruzione risulta che i rettangoli $EILM$ e $FBAH$ sono congruenti, per cui $IHKL$ risulta essere la differenza fra $GFKM$ e $GBAE$, cioè $(\frac{p}{2} - x)^2 = (\frac{p}{2})^2 - q$.

Dunque:

$IH = AH = \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$ e $AD = HD - HA$,

ossia $x = \frac{p}{2} - \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$.

Per la costruzione della seconda radice, al-Khwārizmī dice solo che si ottiene la maggiore delle radici aggiungendo DH a IH. È tuttavia quasi certo che egli ne conoscesse la dimostrazione, dal momento che nelle versioni latine si trovano le figure relative.

Supponendo infatti (fig. 4) $x > p/2,$ il punto F, medio di $GC = p,$ cade all'interno di $BC = x.$

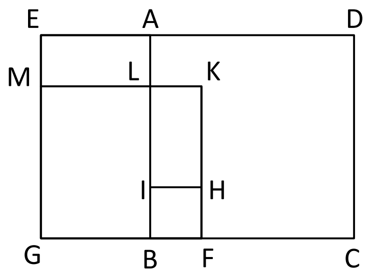

Fig.4

Si prenda $AB = BC$. Il quadrato $BFHI$, avendo lato $BF = x - p/2$*, è* uguale alla differenza del quadrato

$GFKM = (\frac{p}{2})^2$ e della somma delle aree $GBLM + IHKL = GBAE = q$.

Così $BF = \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$ e $x = CF + FB = \frac{p}{2} + \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$ **.**

Al-Khwārizmī presenta poi, come esempio di equazione del **tipo 6,**

$$3x + 4 = x^2$$

di cui considera solo la soluzione positiva e non quella negativa. La regola, espressa in notazioni moderne, relativamente all'equazione $px + q = x^2$, corrisponde alla soluzione :

$$x = \frac{p}{2} + \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}\ .$$

La dimostrazione geometrica consiste nella costruzione (fig.5) del quadrato $ABCD = x^2$ composto dai rettangoli $ARHD = px$ e $RBCH = x^2 - px = q$.

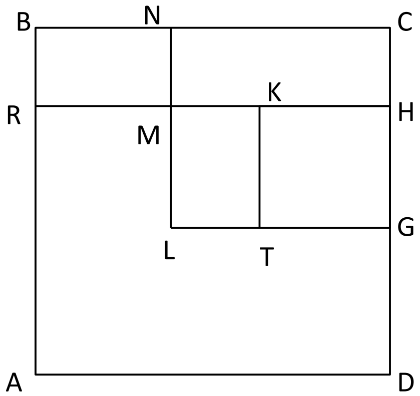

Fig. 5

Sia G il punto medio di HD e si costruisca il quadrato $TKHG = (\frac{p}{2})^2$. Sul prolungamento di TG si prenda $TL = CH = x - p$. Si innalzi in L la perpendicolare a LG, che incontri BC in M e il prolungamento di KH in N. Ora GL risulta uguale a CN e uguale a CG poiché GL=GT+LT=GH+HC e TL = CH = MN, per cui LTKM = BMNR. Dunque MCHN + BMNR = BCHR = *q* = MCNH + LTKN. Inoltre

$$LNCG = TKHG + q = (^{p}/_{2})^2 + q$$

E

$$CG = \sqrt{(^{p}/_{2})^2 + q}$$

Da cui

$$CD = x = CG + GD = \sqrt{(^{p}/_{2})^2 + q} + \frac{p}{2}$$

3.2.4. OPERAZIONI

Nella sezione che segue la trattazione delle equazioni, l'autore mostra alcune regole fondamentali per eseguire le operazioni algebriche con l'incognita. Espone alcuni esempi in forma parametrica, (indicando il termine noto mediante un valore generico), altri con casi numerici.

Il paragrafo dedicato alla moltiplicazione, il più dettagliato e lungo, tratta di come moltiplicare le incognite tra loro:

1. quando sono da sole (monomi);
2. quando numeri sono sommati ad esse (ax + b) o sottratti da esse (ax – b) (binomi);

Riportiamo alcuni esempi in cui si fa uso delle operazioni con l'incognita:

(10 – x) x oppure (10 + x) (x – 10).

All'addizione e alla sottrazione è dedicato un paragrafo sintetico che tratta di calcoli con radicali o incognite. Si nota che al-Khwarizmi preferiva evitare di porre il coefficiente davanti al radicale, lo si vede chiaramente nell'esempio:

$20-\sqrt{200}-\left(\sqrt{200}-10\right)=30-2\sqrt{200}=30-\sqrt{800}$.

Lo studio dei radicali è affrontato anche nel paragrafo dedicato alla divisione che è costituito solo da esempi, prevalentemente numerici, salvo la generalizzazione:

$\frac{m\sqrt{p^2}}{\sqrt{q^2}}=\sqrt{\frac{m^2p^2}{q^2}}$.

È interessante notare come le frazioni improprie siano ricondotte alla somma di un intero più una frazione propria, ad esempio:

$$\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\sqrt{2+\frac{1}{4}}=1+\frac{1}{2}.$$

Vengono affrontate anche trasformazioni come $a\sqrt{x}=\sqrt{a^2x}$ o $\sqrt{a^2x}=a\sqrt{x}$, supportate da semplici esempi del tipo : $2\sqrt{x}=\sqrt{4x}, \sqrt{5}\cdot\sqrt{10}=\sqrt{50}$, ecc…

Il matematico arabo dedica una parte della sua opera alle dimostrazioni degli esempi forniti con il supporto del metodo grafico e affrontando addizioni e sottrazioni tra segmenti.

Insiste sulla necessità di rispettare sempre l'omogeneità dimensionale: ribadisce il fatto che non si può operare su grandezze differenti. Non si può quindi rappresentare tramite una figura un' espressione della forma:

$$(100+x^2-20x)+(50+10x-2x^2)\ ,$$

perché vi compaiono tre dimensioni differenti; sostiene invece che la si può esprimere attraverso l' uso di parole.

Sono presentati anche i prodotti notevoli, dimostrati successivamente sempre con il supporto della geometria.

Si può evidenziare come nei capitoli di quest'opera, i quali costituiscono una vera e propria introduzione al calcolo algebrico, vi sia un'allusione all'esistenza di quantità **irrazionali**, ribattezzate da al-Khwarizmi col nome "gidr asamm", ossia radice "muta" o "cieca".

Probabilmente questo termine deriva dalla parola greca "άλοϒος" , da intendere come qualcosa di inesprimibile in un discorso, piuttosto che un numero non rappresentabile sotto forma di frazione (come diremmo noi oggi). Gherardo da Cremona tradusse la parola "asamm" dal latino "surdus" che si è mantenuto fino al XVIII secolo accanto al termine "irrationalis", che si riscontra già nel Medioevo. Del resto, bisogna precisare che al-Khwarizmi fa un uso limitato delle grandezze irrazionali.

I suoi esempi di equazioni hanno tutti coefficienti razionali e le loro soluzioni sono sempre numeri interi. Unica eccezione qualche equazione della forma $x^2 = q$ (tipologia 2) ed un' equazione di 2° grado della forma: $10x = (10 - x)^2$ ossia $x^2 + 100 = 30x$, la cui soluzione irrazionale $x = 15 - 5\sqrt{5}$ non è data.

3.2.5. I SEI ESEMPI

E' presente anche una sessione dove al-Khwarizmi riporta esempi numerici di equazioni per ciascuna delle sei forme in precedenza analizzate, nei quali ogni equazione rappresentativa di un problema viene metodicamente riportata a uno dei casi presentati.

In definitiva, il procedimento presentato dall'autore per la soluzione di un problema, si può sintetizzare nei seguenti passi:

1. Tradurre il problema in un'equazione algebrica;
2. Ricondurre l'equazione a uno dei casi noti, ossia a una sorta di forma normale;
3. Applicare l'algoritmo appropriato per arrivare alla soluzione.

I sei casi completano tutte le possibilità di equazioni lineari di secondo grado con radici reali positive, pertanto lo studente poteva certamente trovare la modalità più idonea per risolvere il proprio problema.

Riportiamo in maniera dettagliata il primo esempio per mostrare il modo in cui il matematico arabo si poneva nei confronti del lettore, affiancando le sue parole con espressioni matematiche odierne al fine di facilitarne la comprensione.

Al-Kwarizmi esordiva così:

«Tu hai diviso dieci in due parti (x e $10-x$); hai moltiplicato la prima delle due parti per l'altra ($x(10-x)$) ; poi hai moltiplicato la prima delle due per se stessa in modo che il prodotto sia il quadruplo del prodotto della prima delle parti per l'altra

($4x(10-x)=x^2$).

Si ricava così: poni una delle due parti uguali alla cosa (x) e l'altra uguale a dieci meno una cosa ($10-x$): moltiplica la cosa per dieci meno la cosa ($x(10-x)$); fa dieci cose meno un quadrato ($10x-x^2$). Poi moltiplicalo per quattro ($4(10x-x^2)$), perché l'esempio dice che è il quadruplo. Il risultato sarà il quadruplo del prodotto di una parte per la seconda, ossia quaranta cose meno quattro quadrati $40x-4x^2$. Dopo tu moltiplichi una cosa per una cosa, vale a dire una parte per se stessa (x^2) . Si ottiene allora un quadrato uguale a quaranta cose meno quattro quadrati ($x^2=40x-4x^2$). Riduci ora di quattro quadrati (al-jabr) ($x^2+4x^2=40x$) e aggiungili al quadrato unitario (al-muqabalah) ($5x^2=40x$). Allora *l'equazione è: quaranta cose sono uguali a cinque quadrati* $(40x = 5x^2)$ *e un quadrato è uguale a otto radici (al-hatt)* $(x^2 = 8x)$*, cioè a sessantaquattro; la radice di questo è otto e questa è una delle due parti, in particolare quella che viene moltiplicata per se stessa. Il complemento a dieci è due che è l'altra parte. Questo problema ti riconduce a uno dei sei casi, in particolare a quello quadrati uguali a radici* $(ax^2 = bx)$*. Ricordalo».*

I successivi 5 esempi si basano sulle seguenti equazioni:

- $(2+\frac{7}{9})x^2 = 10^2$, ossia $x^2 = 36$
- $\frac{10-x}{x} = 4$, ossia $5x = 10$.
- $\left(\frac{1}{3}x+1\right)\left(\frac{1}{4}x+1\right) = 20$ ossia $x^2 + 7x = 228$
- $x^2 + (10-x)^2 = 58$ ossia $x^2 + 21 = 10x$.
- $(\frac{1}{3}x)\left(\frac{1}{4}x\right) = x + 24$ ossia $x^2 = 12x + 288$.

Approfondiamo in questa sede un altro esempio, che al-Khwarizmi recita nel seguente modo:

"Dividi dieci in due parti, dopo moltiplichi ciascuna parte per se stessa e addizioni i prodotti. Si ottiene cinquantotto dirham. Si può pertanto scrivere: poni una delle due parti uguale a una cosa, l' altra uguale a dieci meno una cosa. Moltiplichi dieci meno una cosa per se stesso; ottieni cento più un quadrato meno venti cose. Moltiplica una cosa per una cosa; ottieni un quadrato. Addizioni ad esso il quadrato; il tutto sarà cento più due quadrati meno venti cose uguale a cinquantotto dirham. Sviluppando il quadrato si ottiene cento più due quadrati uguale a cinquantotto dirham più venti cose. A questo punto subentra l' operazione citata in precedenza col nome di "al-muqabalah" ossia "riduzione". Quindi riduci il tutto a un solo quadrato e prendine la metà. Infine otteniamo cinquanta dirham più un quadrato uguale a ventinove dirham più dieci cose. Riduci, sottraendo ventinove a cinquanta; resta ventuno più un quadrato uguale a dieci cose".

Tale problema si è ricondotto a una delle sei tipologie, esattamente alla quinta, tradotta in altri termini:

"Dei quadrati e un numero sono uguali a delle radici"

$$ax^2 + c = bx$$

È importante evidenziare che al-Khwarizmi è più propenso a utilizzare frazioni aventi l'unità per numeratore, in particolare nei calcoli del secondo problema nel momento in cui divide 100 per $\frac{25}{9}$, scrive la frazione $\frac{9}{25}$ sotto forma di : $\frac{1}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5}$.

3.2.6. ALTRI PROBLEMI

Al-Khwarizmi prosegue poi la sua trattazione con altri trentaquattro problemi. Il testo dei primi problemi incomincia con <<dividi 10 in due parti…>>, cui segue una condizione che le parti devono soddisfare, operando con le parti x e $10 - x$,ossia con la "cosa" e con "10 meno la cosa". Sostituendo "x" e "y" alle due parti in cui 10 viene diviso possiamo immaginare questi problemi come sistemi di due equazioni in due incognite aventi come prima condizione "$x + y = 10$".

Qui di seguito riportiamo la seconda condizione dei primi cinque "sistemi":

- $xy = 21$,
- $y^2 - x^2 = 40$,
- $x^2 + y^2 + (y - x) = 54$,
- $\frac{y}{x} + \frac{x}{y} = 2 \cdot \frac{1}{6}$

Oltre ai problemi della tipologia appena enunciata compaiono casi in cui si parla della ricerca di un mal e casi in cui si ha a che fare con un certo numero di dirham divisi tra persone.

Un problema che merita un'attenzione particolare è quello nel quale si deve determinare un numero x di persone, sapendo che : $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{6}$. $(x = 2)$.

3.3. PROBLEMI RIGUARDANTI LE EREDITA'

I problemi in cui intervengono equazioni di tipo lineare sono, d'altro canto, molto più numerose nell'algebra: esse occupano tutta la parte dell'opera dedicata alle eredità e ai testamenti. Studiando uno di questi problemi ci accorgiamo che, nonostante l'assenza di scrittura simbolica , la quale rende lunga e scomoda l'esposizione della soluzione non viene meno la natura algebrica.

A tal proposito sembra doveroso fornire nel dettaglio un esempio:

"Un uomo lascia alla sua morte una parte uguale del suo capitale a ciascuno dei suoi quattro figli, mentre lascia ad un'altra persona una parte uguale a ciascuna di quelle spettante ai suoi figli, più un quarto di quello che resta di un terzo del capitale dopo aver ritirato questa quota più un dirham."

Indichiamo il capitale con la lettera "z", la parte di un figlio con la "x" e la parte donata alla persona con la "y", abbiamo in tal modo le equazioni seguenti:

$z = y + 4x \qquad y = x + \frac{1}{4}\left(\frac{z}{3} - x\right) + d$

Quindi il risultato che otteniamo dopo le trasformazioni necessarie è l'equazione :

$$z = \left(5 + \frac{2}{11}\right)x + \left(1 + \frac{1}{11}\right)d$$

ovvero il capitale in funzione della parte destinata a ciascun figlio.

Al-Khwarizmi opera nel seguente modo:

"Si prende un terzo del capitale e si ritira una parte. Si ritira quindi un quarto di ciò che resta di un terzo del capitale meno una parte e un dirham, in modo che rimanga un quarto del capitale meno tre quarti di una parte meno un dirham"

(vale a dire in notazione moderna):

$$\frac{1}{3}z - x - \frac{1}{4}\left(\frac{z}{3} - x\right) - d = \frac{1}{4}z - \frac{3}{4}x - d$$

Al fine di ottenere $z - y$ si aggiungono poi ad esso $\frac{2}{3}z$, ovvero due terzi del capitale.

Effettuando le opportune trasformazioni si ottiene undici dodicesimi della parte del capitale meno tre quarti di parte, meno 1 dirham in modo tale che siano uguali a quattro parti, ossia:

$$\frac{2}{3}z + \frac{z}{4} - \frac{3}{4}x - d = \frac{11}{12}z - \frac{3}{4}x - d = 4x$$

In seguito si aggiunge tre quarti di una parte più un dirham; pertanto otteniamo undici dodicesimi di parte del capitale uguali a quattro e tre quarti di parte più 1 dirham, ossia:

$$\frac{11}{12}z = \left(4 + \frac{3}{4}\right)x + d.$$

Arrivati a questo punto si moltiplica per dodici undicesimi e si trova che il capitale

$$z = \left(5 + \frac{2}{11}\right)x + \left(1 + \frac{1}{11}\right)d$$

ammonta a $5 + \frac{2}{11}$ di una parte più $1 + \frac{1}{11}$ dirham.

In questo problema e negli altri analoghi, il dirham funge da parametro.

Illustriamo adesso un altro esempio di eredità.

"*Un uomo muore e lascia due figli, donando per testamento un terzo del suo avere a una persona estranea. Lascia una proprietà del valore di dieci dirham e la rivendicazione di dieci dirham nei confronti di uno dei due figli.*"

Stranamente la soluzione non è effettivamente ciò che ci si aspetterebbe, in quanto la persona estranea riceve soltanto cinque dirham. Il tutto accade poiché secondo la legge araba, un figlio debitore nei confronti del padre di una quantità superiore alla parte di patrimonio che gli spetta conserva l' intera somma dovuta, visto che una parte viene considerata come patrimonio che gli spetta naturalmente, mentre la restante parte come donazione del padre. Ed è proprio il complesso di leggi arabe sulle eredità che hanno spinto lo studio dell' algebra nel mondo arabo.

In realtà vi è qui una serie di problemi sulle equazioni indeterminate e spesso omogenee. Negli altri problemi la condizione data è espressa da un' equazione a un' incognita che non rappresenta il capitale nel senso proprio del termine, bensì è indicata dalla parola "cosa". Non è chiaro se al-Khwarizmi scoprì qualcuno di questi risultati. All' inizio del suo trattato, egli dice che un certo numero di scienziati li avevano già trovati, mentre altri ancora si erano sforzati di esplicare i passaggi difficili dei loro predecessori per facilitarne la comprensione, e altri avevano ordinato infine le conoscenze già acquisite correggendo le inesattezze e perfezionando le idee "senza orgoglio, né vanto".

Al-Khwarizmi non si è attribuito alcuna scoperta nuova.

3.4. LA GEOMETRIA

???La sezione del trattato dedicata alla geometria descrive enti geometrici ricorrendo anche all'approccio grafico: si parte dalla definizione di misura seguita dall'indicazione delle formule per calcolare l'area delle principali figure piane regolari, segmento circolare a una base, ed i volumi di poliedri regolari (parallelepipedi, coni , piramidi)

La maggior parte delle definizioni e delle regole sono accompagnate rispettivamente da brevi spiegazioni e dimostrazioni.

Per quanto riguarda le **figure piane**, al-Khwarizmi si occupa di triangoli , quadrilateri e cerchi .

Lui distingue tre tipi di **triangoli** classificandoli in rettangoli, acutangoli e ottusangoli, associando ad ognuno esempi di calcolo delle aree, come negli Elementi di Euclide .

In seguito viene dimostrata la proprietà dei triangoli, nota in occidente come Teorema di Pitagora, nel caso particolare del triangolo rettangolo isoscele, la sua dimostrazione è intuitiva guardando la figura 6:

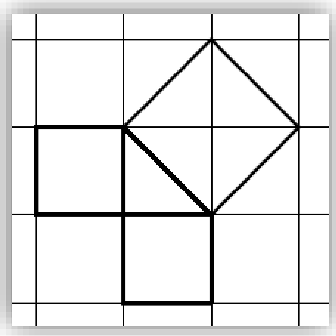

Fig.6

Questa dimostrazione coincide con quella conosciuta in Grecia e in India.

Al-Khwarizmi distingue successivamente cinque tipi di quadrilateri in base ad una casistica che dipende dalle combinazioni di lati e angoli:

1. Lati uguali ed angoli retti (quadrati),
2. Lati opposti uguali ed angoli retti (rettangoli),
3. Lati uguali ed angoli non retti (rombo),
4. Lati opposti uguali ed angoli non retti (romboide),
5. Lati ed angoli diversi.

Per ciascuno dei primi quattro gruppi si fornisce un esempio per il calcolo dell'area. Questa classificazione delle forme dei quadrilateri è esattamente identica a quella del libro I degli Elementi di Euclide. Erone d'Alessandria aggiunge la definizione del trapezio.

Seguono a questa trattazione la risoluzione di due problemi rispettivamente su volume di un tronco di piramide e lato del massimo quadrato inscrivibile in un triangolo isoscele. In entrambi i problemi nel testo arabo si parte da una contestualizzazione nel mondo reale (volume di un pilastro e superficie di terreno), anche se piuttosto generica.

Il secondo problema è trattato anche da Erone, anche se con alcune differenze sostanziali.

All'interno di un triangolo isoscele i cui lati misurano 10 m la cui base è di 12 m va inscritto un quadrato: si chiede quale sia il lato di tale quadrato .

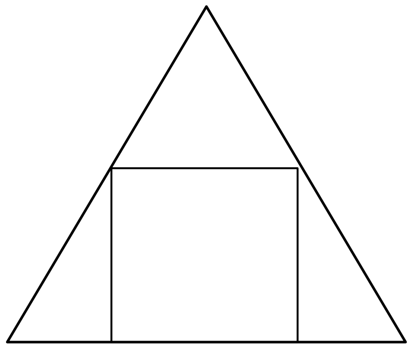

Fig.7

L'autore dell'algebra, trova innanzitutto mediante il teorema di Pitagora che, l'altezza del triangolo misura 8 e quindi l'area misura 48 m^2 . Chiamando il lato del quadrato con il nome di "cosa" , fa osservare che si trova il quadrato della "cosa" togliendo dall'area del triangolo grande le aree dei tre piccoli triangoli che si trovano al di fuori del quadrato. Egli sa che la somma delle aree dei due piccoli triangoli inferiori è uguale al prodotto della "cosa" per sei meno la metà della "cosa" ($x \cdot \left(6 - \frac{x}{2}\right)$) e che l'area del piccolo triangolo superiore è uguale al prodotto di otto meno la "cosa" per la metà della "cosa" . Per tanto giunge all'ovvia conclusione che la "cosa" misura $4 + \frac{4}{5}\ m$ (il lato del quadrato)

La differenza sostanziale tra la presentazione di questo problema tra i due autori, è che Erone cerca il lato del quadrato, supponendo note la base e l'altezza del triangolo, ed esprime direttamente il lato del quadrato con la frazione $\frac{8 \cdot 12}{8+12}$ (utilizzando le proprietà dei triangoli simili).

Erone opera quindi in modo geometrico-aritmetico, mentre il metodo di al-Khwarizmi è algebrico-geometrico.

Il caso appena citato non è l'unico esempio di similitudine tra i due matematici, molti problemi di al-Khwarizmi si trovano già in Erone con gli stessi valori numerici. Ad esempio i problemi sul calcolo delle aree del triangolo equilatero con lato di lunghezza 10 e del triangolo ad angoli acuti con i lati uguali rispettivamente 13, 14 e 15.

Non mancano differenze anche in questi casi, per esempio nell'ultimo problema al-Khwarizmi sceglie come incognita (Fig. 8)

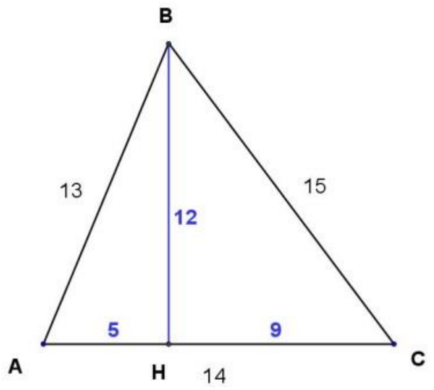

Fig.8

la parte $AH = x$ del lato AC , compresa tra il piede dell' altezza e il lato BA che incontra formando l' angolo in A . Calcolando in due modi diversi l' altezza secondo il teorema di Pitagora ottenne l' equazione:

$$13^2 - x^2 = 15^2 - (14 - x)^2$$

o

$$28\,x = 140,$$

da cui si ricava che $x = 5$, che l'altezza è uguale a 12 e l'area a 84.

Erone, invece, utilizza il teorema 13 del libro II degli Elementi sul quadrato di un lato di un triangolo acuto cioè:

$BC^2 = BA^2 + CA^2 + 2AC \cdot AH,$

Da cui si ricava che $AH \; = x = 5$ (*si ricordi che si incontra questo problema anche nei matematici indiani Mahavira ,IX secolo, e Bhaskara II ,XII secolo*).

Gli esempi che riguardano il calcolo dell'area di un triangolo ottuso sono diversi per al-Khwarizmi ed Erone.

Rapporto tra circonferenza e diametro

Per quanto concerne le questioni relative al cerchio al-Khwarizmi associa al rapporto tra la circonferenza e il diametro tre valori , $3+\frac{1}{7}$; $\sqrt{10}$, e $\frac{62\,832}{20\,000}$; quantità che afferma essere quasi uguali .

Più avanti, esprime l' **area del cerchio** come il prodotto della metà del diametro per la semicirconferenza. Lui spiega questa proprietà facendo notare che l' area di un poligono regolare è uguale al prodotto del suo semiperimetro per il semidiametro del cerchio inscritto e dà, come espressione dell'area S del cerchio in funzione del diametro d, la seguente formula:

$$S = d^2 - \frac{1}{8}d^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}d^2.$$

Non ne riportiamo la dimostrazione, come non lo faremo per le formule successive, in quanto l'intento è semplicemente quello di fornire al lettore i risultati principali dell'opera di al-Khwarizmi, senza necessariamente entrare nel dettaglio.

Anche nel lavoro di Erone troviamo un'espressione di S , ma al posto del prodotto $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}$, caratteristica dell' aritmetica araba, troviamo solo la frazione $\frac{1}{14}$.

Al-Khwarizmi riporta anche una formula finalizzata a calcolare **l'area di un segmento circolare** in funzione dell' arco s, della corda a e dell' altezza h del segmento.

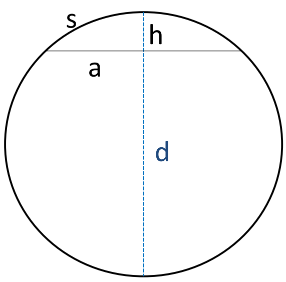

Fig.9

Lui determina prima il diametro:

$d = \frac{a^2}{4h} + h$.

Ottiene poi, per un segmento inferiore al semicerchio:

$\sigma = \frac{d}{2} \cdot \frac{s}{2} - (\frac{d}{2} - h)\,\frac{a}{2}$,

e per un segmento superiore al semicerchio:

$\sigma = \frac{d}{2} \cdot \frac{s}{2} + (h - \frac{d}{2})\,\frac{a}{2}$.

Sembra che i termini di al-Khwarizmi siano di origine indiana. Lui chiama l' arco del cerchio con il nome gaws (l' arco come l' arma) e l' altezza del segmento con la parola sahm (freccia).

Geometria solida

Al-Khwarizmi dà anche le formule che permettono di calcolare il **volume** del prisma retto, del cilindro, della piramide, del cono, del tronco della piramide a base quadrata, con la base e l' altezza date. Quest' ultimo volume è considerato come la differenza di due piramidi intere le cui altezze sono già determinate. La sfera non è trattata.

Il capitolo di geometria dell'Algebra di al-Khwarizmi attesta la conoscenza che aveva l' autore del libro di Erone e della geometria indiana.

È interessante osservare che la trattazione geometrica di al-Khwarizmi rivela l'influsso di un' importante opera ebraica di geometria dal titolo " Mishnat Ha-Midot " (teoria della misura) , che presenta però anche diversi punti in comune con la il lavoro di Erone. Si può interpretare questo come una testimonianza del collegamento tra la matematica greca e islamica.

A differenza di al-Khwarizmi nell'opera ebrea a π viene associato solo il valore $3 + \frac{1}{7}$, il problema del calcolo dell' area del triangolo in funzione dei tre lati si risolve seguendo la formula di Erone ($Area = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$), così come la questione del calcolo dell'area del segmento circolare che frutta la formula:

$$s = (1 + h)\frac{h}{2} + \frac{1}{14}(\frac{1}{2})^2 ,$$

dove "*s*" è l' area segmento , "l" la lunghezza della base e "h" l' altezza.

Si pensa che al-Khwarizmi sia venuto a conoscenza di quest' opera in una traduzione siriana o persiana, ma è anche possibile che fosse a conoscenza della lingua ebraica. Questo perché è stata recentemente scoperta e pubblicata un' opera di al-Khwarizmi intitolata <u>Determinazione di un calendario giudaico</u> (*Risāla fī istikhrāj taʾrīkh al-Yahūd),* contenente alcune citazioni bibliche mostrando che il matematico arabo aveva conoscenze riguardo la religione ebraica.

Malgrado la brevità, il capitolo di geometria contenuto nell' <u>Algebra</u> di al-Khwarizmi ha apportato un contributo molto importante alla geometria in quanto esposto in una forma comprensibile e sufficientemente corretta. Gli agrimensori di quel periodo avevano conoscenze modeste riguardo la geometria e utilizzavano regole elementari a volte anche sbagliate. Abu-l-Wafa scrive che essi calcolavano l' area di un triangolo, di un poligono o di un cerchio, elevando al quadrato un quarto del perimetro (ciò restituisce per il cerchio π=4) e che la superficie di un quadrilatero qualunque era ottenuta con il prodotto delle semisomme dei lati opposti.

3.5. LE FONTI

L'*Algebra* di al-Khwarizmi viene comunemente considerata un vero e proprio spartiacque nella storia della matematica e della scienza in generale.

Nella ricerca delle fonti di al-Khwarizmi, cominciata nel 1797 ad opera di Cossali, non si può fare a meno di ricordare che l'origine dell'algebra risale ad un'epoca ben più antica sia di Diofanto sia di al-Khwarizmi , ossia all'antico Egitto e al popolo babilonese, dove già nel 2000 a.C. si scrivevano manuali di aritmetica, algebra e geometria.

Ci sono tre diverse fonti che molto probabilmente hanno influenzato l' opera di al-Khwarizmi. A tal proposito ricordiamo quella indiana, quella greca e infine la tradizione locale siriaco-persiana.

Influenza indiana

Il lessico matematico indiano offre significativi punti di contatto con le corrispondenti espressioni arabe: il vocabolo indiano che indica una quantità positiva (*dhanam*), è l'esatto corrispettivo di *mal*, dal momento che significa «quantità di denaro, proprietà». La parola indiana *rupa* indica una moneta e il numero, proprio come *dirham*; l'incognita, è denominata *yavat tavat*, ossia *tanto quanto* o *qualcosa* proprio come *shay*; *mala* (radice) corrisponde a *jadhr*. Questo parallelismo potrebbe far pensare, oltre che ad una stretta comunicazione fra i due popoli, anche a una fonte comune, da cui entrambi potrebbero aver attinto la terminologia.

L' Algebra di al-Khwarizmi presenta tuttavia una serie di particolarità che la differenziano da quella indiana. In quest'ultima infatti, non vi è alcuna spiegazione geometrica delle regole introdotte per risolvere equazioni quadratiche o operazioni che comprendono variabili algebriche, parte che in al-Khwarizmi ha un certo rilievo. A differenza del matematico arabo che previlegia numeri positivi ed equazioni con coefficiente del termine di grado massimo pari ad uno, gli indiani fanno uso anche di numeri negativi e presentano fin dall'inizio la regola di risoluzione di un'equazione quadratica completa con un coefficiente qualsiasi del termine di secondo grado.

Altre differenze si notano se confrontiamo il matematico, astrologo e astronomo indiano Brahmagupta (VII d.C.). Innanzitutto, nel tipo di approccio alle equazioni, i due autori si differenziano nettamente; prendendo ad esempio il caso

$$x^2 + 10x = 39$$

al-Khawarizmi utilizza il caso conforme all’equazione; Brahmagupta invece applica una formula valida per tutte le equazioni di secondo grado, che non prevede il vincolo $a,b,c > 0$, basata sul completamento del quadrato.

Infine, Brahmagupta risolve riordinando l’equazione nella forma :

$$ax^2 + bx = c$$

(indipendentemente dal segno dei coefficienti e del termine noto), mentre al-Khwarizmi indica una serie di passaggi, compresa la normalizzazione del coefficiente del quadrato, per ricondurre l’equazione ad uno dei sei casi canonici.

Come si vede, la distanza fra le due tecniche è molta.

Confronto con matematica greca, in particolare Euclide e Diofanto.

Sembra che al-Khwarizmi unisca all’algebra greca la costruzione geometrica delle radici di un'equazione quadratica, ma nel complesso il metodo è sostanzialmente differente dall’ algebra geometrica degli Elementi di Euclide. L’unica vera somiglianza è quella tra la seconda costruzione di al-Khwarizmi per le equazioni di secondo grado e la proposizione 2 del libro II degli elementi, che corrisponde alla nota formula:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

La figura di al-Khwarizmi (corrispondente al primo caso dell’ equazione della **quinta forma** ricorda la costruzione della prop. 5 del libro II, presentando però delle differenze considerevoli. In più la prop. 5 non restituisce la seconda radice dell’ equazione con “ l’aiuto dell’ addizione”, come non la dà anche la prop. 28 del libro VI degli elementi.

La costruzione di al-Khwarizmi per le **sesta forma** delle equazioni non ha somiglianze con quella di Euclide. In conclusione lo stile di spiegazioni e dimostrazioni in questi due autori è fondamentalmente differente.

Anche se l’ algebra geometrica dei predecessori ha avuto un’ influenza su al-Khwarizmi, sono stati effettuati degli adattamenti per soddisfare i bisogni dell’algebra numerica.

Questa ipotesi non si basa su nessuna giustificazione storica.

Riguardo alle origini dell' Algebra non è un caso pensare all' "Arithmetica" di **Diofanto**.

Quest'ultima, infatti nonostante il nome è una trattazione di algebra e appartiene alla stessa tradizione di al-Khwarizmi, che rimanda ai matematici babilonesi.

In particolare si può osservare che, come Diofanto, al-Khwarizmi riduce l' equazione di secondo grado a tre forme canoniche (con la differenza che Diofanto non dà ai coefficienti dei termini di secondo grado il valore dell' unità).

Ma su tanti altri punti esistono differenze fondamentali tra i due autori. Del resto, un' influenza diretta di Diofanto è poco possibile perché, da quello che sappiamo, le prime traduzioni arabe delle opere di Diofanto furono fatte a Baghdad dallo studioso cristiano Qusta ibn Luqa al-Ba labakki, e più tardi da Abul-wafa .

Entriamo adesso nel dettaglio in merito al confronto Diofanto al-Khwarizmi, in cui si evidenzieranno principalmente le differenze, piuttosto che le analogie.

L' Arithmetica, o più precisamente i sette libri, sono stati tradotti in arabo 50 anni dopo la redazione dell' Algebra di al-Khwarizmi. Questa traduzione araba è stata fatta con il linguaggio usato da al-Khwarizmi e, in questo senso, sarebbe piuttosto Diofanto il successore del matematico di Baghdad.

Possiamo evidenziare che l' opera di al-Khwarizmi è di livello molto più elementare rispetto a ciò che si riscontra nei problemi diofantei; inoltre l' Algebra di al-Khwarizmi è del tutto retorica e non è vi è alcun utilizzo delle forme di abbreviazioni tipiche dell' "algebra sincopata" come invece riscontriamo in Diofanto , nella versione greca.

Diofanto inoltre, risolve dei problemi che conducono a sistemi della forma:

$x + y = a$, $xy = b$,

o

$x + y = a,\quad x^2 \pm y^2 = b$,

aggiungendo una grandezza ausiliaria incognita $\frac{x-y}{2} = z$.

Al-Khwarizmi invece, riconduce tutto a una delle sei tipologie delle equazioni di secondo grado.

Possiamo concludere dicendo che Diofanto procede con la scelta di un' incognita ausiliaria che evita la formazione dell' equazione cubica.

Questa differenza tra al-Khwarizmi e Diofanto è stata rimarcata dagli algebristi del decimo secolo, che conoscono perfettamente i loro scritti, e che hanno più di tutti interpretato algebricamente l' Arithmetica di Diofanto. Infatti durante il suo studio dell' equazione quadratica, al-Karaji parla del metodo di completamento del quadrato come della "Via di Diofanto".

Diofanto aveva in mente un progetto ben chiaro, che mirava a difendere una teoria aritmetica, in cui i "protagonisti" sono i numeri, ciascuno considerato come una pluralità di unità.

Al-Khwarizmi invece aveva in mente ben altro: creare un calcolo di incognite e quindi fondare una vera e propria teoria delle equazioni di primo e secondo grado, la quale necessita dell' utilizzo dei radicali.

Lo stile di al-Khwarizmi è il seguente: formulare le equazioni di primo e secondo grado a una sola incognita e studiare le operazioni di aritmetica sui binomi e trinomi associati. Solo più tardi si applicherà questa teoria alla soluzione dei problemi.

Mentre nelle Arithmetiche non vi è alcuno studio degli oggetti geometrici, nell' algebra di al-Khwarizmi l' incognita può essere vista come un oggetto geometrico, e l' algebra si applica per risolvere per l' appunto tali questioni.

Inoltre, mentre Diofanto cerca le sue soluzioni sotto forma di numeri razionali positivi, al-Khwarizmi ammette delle soluzioni irrazionali, per esempio $x = \sqrt{5}$ o $x = \sqrt{30}$.

4. BIBLIOGRAFIA E SITOGRAFIA

- Mathèmatiques Arabes, Youschkevitch
- Storia della matematica, Carl B. Boyer
- Al-Khwārizmī, Le commencement de l'algèbre, éd. Roshdi Rashed

- L’eredità arabo islamica nelle scienze e nelle arti del calcolo dell’europa medievale, Nadia Ambrosetti
- www-history.mcs.st-and.ac.uk