Università degli Studi di Ferrara

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

DAI NUMERI ALLE FRAZIONI NEL MONDO ARABO

Divulgazione e Museologia della Matematica

Prof.ssa Alessandra Fiocca

Anno Accademico 2016/2017

Lucia Baron
Francesca Sarti

Indice

Capitolo 1

Introduzione

Nel secolo VIII, presso gli Arabi e le popolazioni sottoposte alla loro dominazione, si assiste ad un progressivo interesse per l'aritmetica ed, in particolare, per i sistemi di numerazione. Gli arabi ancora non conoscevano l'uso dei simboli per rappresentare i numeri e ricorrevano all'espressione verbale. A seguito delle conquiste, però, per esigenze amministrative si pose anche il problema di come scrivere i numeri e questo venne risolto, in un primo tempo, adottando presso i singoli popoli (Greci, Siriani, Egiziani, etc.) i loro rispettivi simboli e, più tardi, usando le lettere dell'alfabeto e la numerazione in base dieci (non posizionale).

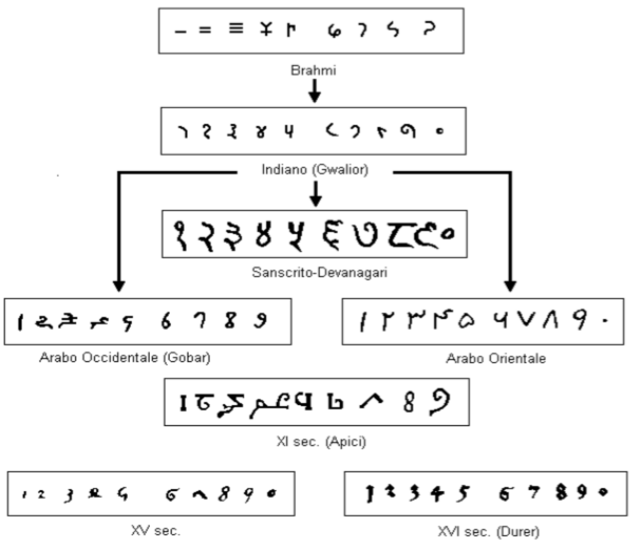
Non appena iniziarono gli interessi per l'astronomia, gli arabi si accostarono agli scritti indiani e da quelli appresero il sistema di numerazione posizionale in base dieci ed il simbolo dello zero. Gli scienziati arabi cominciarono allora, pur con molta lentezza, a privilegiare questo nuovo sistema per la sua semplicità ed efficacia ed intrapresero studi specifici di aritmetica.

Il matematico cui si deve la prima esposizione del sistema di numerazione indiano e delle operazioni effettuate in questo sistema è il persiano abu Jafar Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (780-850 circa), che operò a Baghdad, nella casa della Saggezza, e fu autore di diverse opere. Una delle più celebri ed importanti è il trattato di aritmetica chiamato *"Kitab al-Jam'wa al-tafriq bi-hisab al-Hind"* (Libro sull'addizione e la sottrazione secondo il calcolo degli

Indiani) che esercitò un'influenza considerevole sullo sviluppo ulteriore della matematica. Quest'opera non ci è giunta nell'originale arabo, ma solo in una versione latina presente in un unico manoscritto presso l'University Library di Cambridge dove il sistema decimale posizionale e le operazioni di calcolo condotte sulla base di questo sistema sono soggette ad una spiegazione speciale. Dal manoscritto di Cambridge non si riesce a conoscere la notazione usata per scrivere i numeri da parte di al-Khwarizmi: è possibile che l'autore abbia utilizzato le *lettere dell'alfabeto arabo* per rappresentare i numeri da 1 a 9, ma non è da escludere che potesse utilizzare già le *cifre arabe* d'Oriente. L'uso della forma letterale, infatti, si conserva per molti secoli a fianco della numerazione posizionale, così come la necessità di usare strumenti di calcolo come *l'abaco* per facilitare e velocizzare i conti.
Dopo aver spiegato in dettaglio il sistema decimale posizionale usando le cifre indiane, ci siamo soffermati sulla descrizione delle operazioni di calcolo secondo il metodo indiano presente all'interno del manoscritto nell'ordine seguente: sottrazione, divisione per due, duplicazione, moltiplicazione e divisione.
Abbiamo poi analizzato gli aspetti omessi nel manoscritto e presenti nel *"Liber Algorismi de pratica arismetrice"* di Jean de Séville come alcune semplici definizioni e la trattazione dell'estrazione della radice quadrata.

Nella seconda parte di questa tesina abbiamo invece trattato le frazioni evidenziando come sono state definite nei principali trattati di aritmetica araba e analizzando come sono "nate" nelle diverse città.
Il termine frazione deriva dal latino fràngere, che significa rompere, dividere, frammentare. Il simbolo ha origine incerta, ma certamente fu usato da Leonardo Fibonacci Pisano nel suo *Liber Abaci* del 1202; i numeri frazionari sono ivi chiamati "rupti" o anche "fracti" e il trattino orizzontale posto tra numeratore e denominatore è chiamato "virgula" cioè "bastoncello" (da "virga", bastone).
Le origini delle frazioni si devono all'intensificarsi dei rapporti commerciali

fra le più antiche civiltà che necessariamente portò all'uso dei sottomultipli delle unità di misura allora usate. Documenti storici attestano l'uso delle frazioni già presso gli antichi Egizi nel XVII secolo a.C. A dare un deciso contributo allo sviluppo delle frazioni furono però gli arabi che per diversi secoli convissero con gli Indiani nella creazione e nello sviluppo della matematica finchè presero nettamente il sopravvento.
In questa tesina, nello specifico, abbiamo analizzato come al-Khwarizmi definisce le frazioni nel suo trattato di aritmetica, mostrando le diverse operazioni possibili tra di esse e le particolarità dei popoli che hanno contributo allo sviluppo delle frazioni nei paesi arabi.
Abbiamo poi analizzato questo stesso argomento nell'opera di Abu-l-Wafa "Libro sull'aritmetica necessario agli scribi e ai mercanti" evidenziando il ruolo che gli "Elementi di Euclide" hanno nella stesura di quest'opera e mostrando i diversi procedimenti che Abu-l-Wafa ha elaborato per la messa in rapporto di due numeri. Infine, abbiamo mostrato i motivi che hanno permesso un così rapido sviluppo delle frazioni citando alcuni grandi autori di trattati di aritmetica.



Evoluzione della scrittura delle cifre Indo-Arabe.

Capitolo 2

Il sistema decimale posizionale

Statua di al-Khwarizmi in Uzbekistan.

2.1 Al-Khwarizmi: cenni biografici

Il matematico, cui si deve la prima esposizione del sistema di numerazione decimale posizionale e delle operazioni di calcolo condotte sulla base di questo sistema, è il persiano abu Jafar Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi ($780-850$ circa). Sappiamo poche cose sulla sua vita. L'unico elemento certo nella ricostruzione della biografia sta nel nome. Il fatto che gli fosse stato

assegnato il nome di al-Khwarizmi indica che questo dotto fosse originario della regione centroasiatica del Khwarezm (l'attuale Uzbekistan), mentre il termine Magusi suggerisce che certi suoi antenati fossero dei Magi, cioè dei sacerdoti della religione zoroastra[1]. Questo avvalorerebbe l'ipotesi di una sua prima formazione matematica ed astronomica legata allo zoroastrismo. Nulla fa pensare che la sua religione fosse quest'ultima sia per la cospicua presenza di preghiere e lodi a Dio ed a Maometto presenti nelle sue opere, sia per il ruolo subordinato che avevano gli studiosi non Musulmani, pur accolti a corte. Visse ed operò presso la corte del califfo al-Ma'mun, a Baghdad, diventata il centro degli studi scientifici e degli affari dopo la conquista islamica delle regioni mesopotamiche e persiane. Molti mercanti, filosofi e scienziati dalla Siria, dalla Persia e dall'India arrivarono in questa città, così come probabilmente fece al-Khwarizmi.
Al-Khwarizmi è stato uno dei membri più importanti del gruppo di matematici e astronomi che lavorarono alla *casa della Saggezza*, fondata dallo stesso califfo. Ed è proprio in questo ambiente che ebbe modo di dedicarsi alle ricerche, alla traduzione di manoscritti e alla stesura delle proprie opere.

2.1.1 Le opere

Le opere dell'autore trattavano rispettivamente di:

- aritmetica: *Kitab al-Jam'wa al-tafriq bi-hisab al-Hind* (Libro sull'addizione e la sottrazione secondo il calcolo degli Indiani);
- algebra: *Al-Kitab al-muktasar fi hisab al-jabr wa-l-muqabala* (Breve opera sul calcolo di spostare e raccogliere);
- astronomia: *Zij* (Tavole astronomiche);
- geografia: *Kitab Surat al-Ard* (Libro sulla forma della Terra);
- calendario: *Istikhraj Ta'rikh al-Yahud* (Il calendario ebraico);

[1] Lo zoroastrismo era diffuso nel Khwarezm.

- storia: *Kitab al-Tarik* (testo di storia e astrologia).

Le opere di al-Khwarizmi, in particolare i suoi trattati sull'aritmetica e l'algebra, esercitarono un'influenza considerevole sullo sviluppo ulteriore della matematica. Essi costituirono il punto di partenza di numerosi altri lavori e alcune parti sono state riprese in altre opere. Decine di generazioni si sono formate studiando questi lavori. Al-Khwarizmi ha saputo riunire all'interno delle sue opere tutto quello che era considerato importante per gli uomini di scienza e per i professionisti, tenendo conto in particolare dei bisogni della vita quotidiana.

2.1.2 Il trattato di aritmetica

Il trattato di aritmetica si conosce solo attraverso una traduzione latina che risale al $XIII$ secolo, conservata presso la biblioteca dell'Università di Cambridge e pubblicata a Roma nel 1857 da Baldassare Boncompagni con il titolo di *Algoritmi de numero indorum*[2].
La traduzione latina del manoscritto di Cambridge non si dimostra essere una traduzione fedele dall'arabo: i diversi errori e le aggiunte fatte al testo lo testimoniano; ma non è dato sapere se questi errori siano dovuti al primo traduttore o al copista. Si ritiene che un primo traduttore del manoscritto possa essere stato Adelardo di Bath, noto filosofo, matematico e astrologo britannico del secolo XII.
Sebbene il manoscritto di Cambridge non abbia titolo si può presumere, confrontando qualche espressione di questo manoscritto con l'elenco del lavoro di al-Khwarizmi situato all'interno del Fihrist al-Ulum (Indice delle scienze), composto da uno storico e bibliografo di Baghdad, che l'opera si possa intitolare in arabo *Kitab al-Jam'wa al-tafriq bi-hisab al-Hind* (Libro sull'addizione e la sottrazione secondo il calcolo degli Indiani). Può essere che al-Khwarizmi abbia citato nel titolo solo le due operazioni più importanti alle quali si riconducono le altre. Non si conosce la traduzione dell'intero trattato, ma per

[2] Il termine *algoritmus*, che qui compare, designa fino al $XVII$ secolo il sistema di numerazione posizionale decimale e successivamente una procedura sistematica di calcolo.

fortuna le ricerche sono facilitate dal fatto che esistono altre due opere in latino che si basano strettamente su questo manoscritto.

1. ***Le Liber Algorismi de pratica arismetrice*** (Il libro degli algoritmi sull'aritmetica pratica) che tratta dell'insieme dei problemi di aritmetica. Con ogni probabilità questo libro è stato scritto da Jean de Séville (o de Tolède) un ebreo spagnolo convertito al Cristianesimo che lavorò a Toledo dal 1135 al 1153 circa. L'inizio del Liber Algorismi si avvicina molto, per il suo contenuto, al manoscritto di Cambridge.

2. ***Le Liber Ysagogarum Alchorismi in artem astronomicam a magistro A. compositus*** (L'introduzione agli algoritmi sull'arte dell'astronomia composto dal maestro A.). Si conoscono diverse copie, una delle quali è datata 1143, le altre sono state redatte un po' più tardi. Si ritiene che l'indicazione "Magister A." designi l'inglese Adelardo di Bath che appartiene alla scuola di Toledo e che avrebbe anche tradotto il trattato di aritmetica di al-Khwarizmi[3].

2.2 Contenuti trattato - Parte I

L'autore nelle prime righe del suo libro, dopo aver reso omaggio a Dio come era uso a quell'epoca, scrive:

"Rendiamo a Dio, nostra guida e nostro protettore, i giusti omaggi che Gli sono dovuti, che spargono la sua gloria e la accrescono. Preghiamolo affinchè ci guidi sulla retta via, che ci conduca lungo la strada della verità e che ci aiuti dall'alto di tutta la sua potenza in ciò che abbiamo deciso di esporre, il modo di contare degli Indiani usando i IX caratteri e di mostrare come, grazie alla loro semplicità e concisione, questi caratteri possano esprimere tutti i numeri. Noi faciliteremo così il compito di chi vorrà apprendere l'aritmetica, cioè un gran numero di bambini e chiunque

[3]Il traduttore potrebbe anche essere un altro inglese, Roberto di Chester che nel 1145 aveva tradotto in latino il trattato di algebra di al-Khwarizmi.

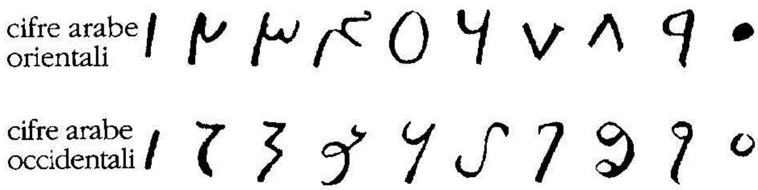
ci si rapporti: la moltiplicazione, la divisione, ma anche l'addizione e la sottrazione.
Ho visto gli Indiani utilizzare IX caratteri per tutti i numeri grazie ad una disposizione che hanno inventato ed ho voluto quindi parlare dell'opera che li utilizza per renderla più leggera a chi vorrà apprendere, se Dio vorrà. Dal momento che gli Indiani hanno avuto tale volontà e che il loro sforzo in questi caratteri ha costituito il soggetto che mi è stato aperto, Dio mi ha condotto fino a qua. Se hanno fatto ciò per una ragione diversa da quella che ho esposto, la stessa domanda potrà avere risposta certa e senza ambiguità grazie a ciò che ho esposto e si aprirà con leggerezza a coloro che guardano ed apprendono."

2.2.1 I caratteri

Non si conosce la forma delle cifre che al-Khwarizmi stesso ha impiegato e non si può giudicare dalle poche cifre che si trovano nel manoscritto latino di Cambridge. È possibile che abbia utilizzato le lettere dell'alfabeto arabo per rappresentare i numeri da 1 a 9, ma potrebbe anche essere che utilizzasse già le cifre arabe d'Oriente. La scrittura numerica, nell'impero arabo, variava da regione a regione e da autore ad autore per il fatto che nel vasto impero vivevano popolazioni di origini etniche molto diverse fra loro (Siriani, Egiziani, Greci, Persiani, Turchi e molti altri) le quali, anche se legate da una comune fede, per divergenze culturali e politiche si scontrarono aspramente. Tali diversità si manifestano anche nella matematica: alcuni autori usarono la *notazione numerica indiana*, altri lo *schema di numerazione alfabetica* dei greci, con la sostituzione delle lettere arabe corrispondenti.

1. La *notazione numerica indiana* basata sul principio posizionale ripreso dai Babilonesi, faceva uso di simboli propri, con una grafia desunta dall'alfabeto arabo, mentre lo zero veniva identificato con un punto. Le cifre arabe, dalle quali derivavano le moderne notazioni numerali, assomigliavano molto alle *cifre devanagari* (o divine) in uso in India nel X secolo. Dalle cifre indiane si svilupparono due tipi di simboli: le

cifre arabe d'Occidente e le **cifre arabe d'Oriente**. Dalle prime derivano le nostre cifre moderne, mentre le seconde sono ancora in uso in Turchia e nei paesi arabi. Le cifre arabe occidentali furono introdotte dagli arabi in Spagna da cui, gradualmente, si diffusero nell'Europa occidentale[4].



Simboli delle cifre arabe d'Oriente e d'Occidente.

2. Lo *schema di numerazione alfabetica* basato sul sistema di numerazione alfabetico greco, faceva uso di 28 lettere dell'alfabeto arabo e ad ogni lettera veniva attribuito un determinato valore. Tuttavia il metodo usato dagli Arabi orientali divergeva da quello degli Arabi d'Africa, per il valore di sei lettere: l'aggiunta di queste sei lettere addizionali dell'alfabeto arabo (le lettere dell'alfabeto fenicio sono 22) fu fatta, in seguito, per arrivare ad esprimere i valori da 400 a 1000. Da una comparazione che si può fare fra le tavole delle lettere-cifre del sistema arabo con quelle delle lettere numerali ebraiche e della numerazione alfabetica siriana, si constata che per i valori inferiori o uguali a 400, i tre sistemi concordano. Questo fa ritenere che l'uso dell'alfabeto numerale presso gli Arabi fu introdotto per l'influsso degli Ebrei e dei Cristiani di Siria per le 22 lettere, ossia per i numeri inferiori o uguali a 400 e per l'influsso dei Greci-Bizantini per le sei lettere restanti, cioè per i valori compresi tra 400 e 1000.

[4]In Europa furono portate da Gerberto d'Aurillac nel X secolo, ma non furono adottate da tutti i Paesi europei.

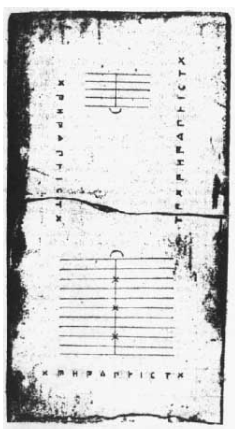
L'uso della forma letterale si conservò per molti secoli a fianco della numerazione posizionale, anche nei manuali di didattica che servivano per l'insegnamento "dell'aritmetica indiana".
La maggior parte della popolazione impiegava il sistema di numerazione puramente letterale. È ciò che testimonia il *Libro sull'aritmetica necessario agli scribi e ai mercanti*[5] , realizzato da Abu-l-Wafā tra il 961 e il 976. Tale uso scomparve completamente nel XII secolo lasciando posto alla notazione posizionale indiana, anche se rimase una differenza nelle forme usate nella parte orientale e in quella occidentale del mondo arabo. Questo fa supporre che le cifre, per la parte orientale provenissero dall'India e per la parte occidentale da forme greche o romane. Il termine arabo *gubār* per indicare la cifra, significa *polvere* e ciò fa pensare che le cifre usate dagli Arabi per scrivere i numeri siano connesse con l'uso di qualche abaco a sabbia. Infatti l'uso dell'abaco rimase generale fino alla metà del XVI secolo.

2.2.2 L'uso dell'abaco

Si presume che, fin da tempi più antichi, si siano costruiti strumenti per aiutarsi nei conti, che certamente risultarono molto utili anche dopo l'avvento della scrittura e della numerazione scritta per la rapidità e la facilità dell'uso. Indubbiamente uno strumento che ebbe una grande diffusione in tutte le classi sociali fu *l'abaco*, una semplice tavoletta di metallo, marmo o legno, ricoperta di polvere o di sabbia per essere incisa con uno stilo o con le dita. Si presume che la parola abaco derivi dall'antica parola ebraica *abaq*, il cui significato è probabilmente "polvere", "ricoprire di polvere" o "togliere la polvere" proprio per il fatto che sopra alla tavoletta veniva sparsa della

[5] Le prime due parti del libro trattano del calcolo dei numeri interi e delle frazioni, la terza parte delle aree delle figure piane, dei volumi dei corpi solidi, oltre che della misura delle distanze. Le ultime quattro parti, che non sono state ancora studiate trattano dei diversi problemi all'interno dell'aritmetica pratica, come le operazioni commerciali, le imposizioni, le unità di misura, gli scambi di diverse specie di cereali, il cambio dell'oro, le spese riguardanti l'arruolamento e il soldo delle truppe, i conti riguardanti la costruzione degli edifici e delle dighe, etc.

polvere. Da questo termine deriverebbero dunque le parole, *apcar* e *abacus* che sarebbero rispettivamente i nomi che l'abaco assunse presso Greci, Etruschi e Romani. Descrivendo le operazioni, in particolare la moltiplicazione, si prende atto della necessità di procedere con questa operazione su una tavoletta o su un qualsiasi altro oggetto, sulla cui superficie veniva steso uno strato di polvere. Tutti i calcoli complicati venivano svolti in questo modo: si annotavano i risultati parziali dei calcoli e i numeri da ricordare tracciando linee con uno stilo o assegnando a sassolini (calculi) di forma diversa ordini di grandezza diversi. Con il passare del tempo si sviluppò una rappresentazione numerica posizionale: sulla tavoletta di supporto venivano incise delle scanalature alle quali erano attribuiti i valori delle unità, delle decine, delle centinaia e così via, partendo da destra verso sinistra.
L'oggetto che a quel tempo era già conosciuto a Baghdad non era molto utilizzato a causa della sua rarità e del suo prezzo elevato. Più tardi, quando il suo uso venne diffuso si apportarono delle modifiche alla struttura dell'abaco e si iniziò a omettere di scrivere i risultati intermedi che riempivano la pagina e impedivano di avere una buona visione d'insieme del calcolo. Diversi storici della matematica, all'atto di attribuire ad al-Khwarizmi e ai suoi discepoli il metodo che consisteva nel cancellare le cifre, gli attribuirono a torto, secondo Youschkevitch, quello che consisteva nel barrare e di scrivere sopra i calcoli intermedi.



Un esempio di antica tavola di calcolo nota come abaco di Salamina.

2.3 Contenuti trattato - Parte II

Dopo aver spiegato in dettaglio il sistema decimale posizionale usando le cifre indiane, al-Khwarizmi spiega come pronunciare gli aggettivi numerali nel caso dei grandi numeri utilizzando i concetti di unità, decine, centinaia, migliaia. L'autore usa, a titolo d'esempio, un numero molto grande, senza indicare il modo di scriverlo. È il numero: 1 180 703 051 492 863.
L'autore scrive:

> *"Tale numero si legge nel modo seguente: mille di mila di mila di mila di mila di mila (5 volte) e cento di mila di mila di mila di mila (4 volte) e ottantamila di mila di mila di mila (4 volte) e poi settecentomila di mila di mila (3 volte) e tremila di mila di mila (3 volte) e cinquanta e mille di mila (2 volte) e quattrocentomila e novantaduemila e ottocentosessantatre".*

Un modo così dettagliato di indicare i numeri è stato mantenuto a lungo all'interno delle opere arabe ed europee. L'autore descrive poi minuziosamente le operazioni di calcolo secondo il metodo indiano. Negli esempi i numeri vengono dati sia con le lettere sia con le cifre romane. Di tanto in tanto appaiono in una forma mista, come per esempio: "duemilatrecento $XXXVI$" etc. Al-Khwarizmi raccomanda di procedere per l'addizione e la sottrazione da sinistra a destra, cioè cominciando dalle cifre che occupano il rango più elevato, perchè è più vantaggioso e più facile. Raccomanda in modo pressante di non dimenticarsi di scrivere gli zeri per non confondere le posizioni.

2.3.1 La sottrazione

Per quanta riguarda la *sottrazione* al-Khwarizmi esamina a parte il caso in cui ad una posizione qualunque di un numero da sottrarre si trovi una cifra più grande di quella che si trova nella posizione corrispondente del numero da cui si sottrae, cioè quando le unità devono essere prese in prestito da una posizione seguente di rango più elevato o da più posizioni seguenti di rango più elevato del numero da cui si sottrae. Il numero dato in esempio per questo caso difficile, che dovrebbe trovarsi all'interno dell'originale, è omesso all'interno del manoscritto di Cambridge. All'interno del manoscritto l'autore a proposito della sottrazione scrive:

"Per capire più facilmente, è necessario illustrare la sottrazione con un esempio e che la diciamo in tre modi differenti, affinchè nessuno venga portato fuoristrada. Scegliamo dunque un numero qualunque e diciamo, per esempio: scriviamo seimilaquattrocentoventidue secondo le loro posizioni e diciamo che vogliamo sottrarre tremiladuecentoundici. Mettiamo il numero 2 *nella prima posizione, che è a destra,* 20 *nella seconda, quattrocento nella terza e seimila nella quarta. Mettiamo sotto a questo numero il numero che vogliamo sottrarre secondo posizioni analoghe: mettiamo uno sotto al due nella prima posizione,* 10 *sotto al* 20 *nella seconda, duecento sotto quattrocento nella terza e tremila sotto al* 6 *mila nella quarta. La rappresentazione è la seguente:*

$$\begin{array}{cccc} 6 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{array}$$

Quando vogliamo sottrarre un numero da un altro, cioè il più piccolo dal più grande, abbiamo cominciato dalla posizione superiore, cioè la quarta. Noi abbiamo quindi sottratto 3 *dal* 6*, e rimane tre nella quarta posizione. Noi abbiamo anche sottratto due da quattro ed è rimasto due nella terza posizione. Abbiamo anche sottratto uno da due ed è rimasto uno nella seconda posizione. Ed è anche rimasto uno in prima posizione, poichè abbiamo sottratto uno da due che era sopra di lui. La rappresentazione dei resti è la seguente:* 3211*.*

Poniamo poi un altro numero in un altro modo, in modo che non rimanga niente nelle sue posizioni. Sia il nostro numero millecentoquarantaquattro, da cui sottraiamo 140 *quattro. Mettiamo l'uno sotto l'altro nel modo seguente:*

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 4 & 4 \\ & 1 & 4 & 4 \end{array} ."$$

2.3.2 La divisione per due e la duplicazione

In seguito alla sottrazione, al-Khwarizmi parla della *divisione per due* (*mediatio*) per cui raccomanda, contrariamente alle altre operazioni, di procedere nel calcolo a partire dalla posizione che occupa il rango più basso a quella che occupa il rango più elevato.
Nel caso di un numero dispari, uno sottrae un'unità da quest'ultimo, la cui metà viene rappresentata sotto foma di frazione sessagesimale $\frac{30}{60}$. Dopo la divisione per due, al-Khwarizmi descrive brevemente la *duplicazione* (*duplicatio*). Al-Khwarizmi tratta la duplicazione e la divisione per due come delle operazioni particolari. Come sappiamo, infatti, queste due operazioni ebbero un ruolo molto importante anche all'interno della matematica egiziana in quanto venivano utilizzate per svolgere la moltiplicazione e la divisione.
Il problema di conoscere su chi al-Khwarizmi si sia basato per queste due operazioni elementari non è stato ancora chiarito. È possibile che si sia adeguato alle esigenze delle tradizioni antiche[6].
Gli storici della matematica hanno spesso criticato al-Khwarizmi di aver introdotto queste operazioni superflue e particolari, che grazie a lui sono passate in quasi tutte le opere arabe ed europee del Medioevo. Ma è molto probabile che abbia mantenuto queste operazioni per facilitare, coloro che volevano imparare, la procedura di estrazione della radice quadrata. Comunque sapeva bene che la duplicazione e la divisione per due erano rispettivamente dei casi particolari di moltiplicazione e divisione, anche se questa caratteristica non è menzionata nel manoscritto di Cambridge.
Questo aspetto sarà ripreso da Jean de Séville nel suo *Livre d'Algorisme*.

[6]Seguendo diverse tradizioni, i mercanti dell'Oriente hanno utilizzato per molto tempo la duplicazione e la divisione per due per effettuare a mente delle moltiplicazioni e delle divisioni difficili.

2.3.3 La moltiplicazione

All'interno del manoscritto al-Khwarizmi descrive la moltiplicazione:

- Suggerisce di imparare a memoria la tabella delle moltiplicazioni da $1 \cdot 1$ fino a $9 \cdot 9$ inclusi.
- Descrive il modo in cui si devono ordinare i fattori e procedere nelle operazioni.
- Enuncia le proprietà della moltiplicazione dello zero, cioè $0 \cdot n = 0$ e $n \cdot 0 = 0$.
- Offre un esempio di moltiplicazione tra due numeri.

Nel modello della moltiplicazione di 2326 per 214, viene dato solo il risultato finale. Youschkevitch, nel suo libro sulle matematiche arabe, fornisce i passi principali del calcolo secondo al-Khwarizmi. All'inizio abbiamo posto, sotto la cifra del moltiplicando che occupa il rango più elevato, la cifra del moltiplicatore che occupa il rango meno elevato:

$$\begin{array}{cccccc} & & 2 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & & & \end{array}$$

Si esegue la moltiplicazione di 214 per la cifra del moltiplicando che occupa la posizione più elevata, cioè il numero 2 e si ottiene 428. Questa cifra viene allora scritta sopra al numero 214 in linea con il moltiplicando, dove viene cancellata la cifra 2 e si ottiene:

$$\begin{array}{cccccc} & & \cancel{2} & 3 & 2 & 6 \\ 4 & 2 & 8 & & & \end{array}$$

Nel manoscritto si legge a proposito di questo:

"Non appena la moltiplicazione della cifra che occupa l'ultimo posto del numero più basso sarà stata effettuata, si cancella la cifra che occupa la posizione sopra e la si sostituisce con il risultato della moltiplicazione" [29 p.12].

Poi si riscrive 214 spostandolo di una posizione verso destra:

$$\begin{array}{cccccc} 4 & 2 & 8 & 3 & 2 & 6 \\ & 2 & 1 & 4 & & \end{array}$$

Si moltiplica $3 \cdot 214 = 642$. Questa cifra viene scritta sopra al numero 214 e si aggiunge 64 a 28 che dà 92. Quanto alla cifra 2, la si scrive al posto del 3 che si cancella.

$$\begin{array}{cccccc} 4 & 2 & 8 & \cancel{3} & 2 & 6 \\ & 6 & 4 & 2 & & \end{array}$$

Nello stesso istante si sposta di nuovo il moltiplicatore di un posto verso destra:

$$\begin{array}{cccccc} 4 & 9 & 2 & 2 & 2 & 6 \\ & & 2 & 1 & 4 & \end{array}$$

Si procede allora nello stesso modo con la cifra 2 che si moltiplica per 214 e fa 428. Questa cifra viene scritta sopra al numero 214 dove si aggiunge 42 a 22 che fa 64 e la cifra 8 viene scritta al posto del 2 che si cancella:

$$\begin{array}{cccccc} 4 & 9 & 2 & 2 & \cancel{2} & 6 \\ & & 4 & 2 & 8 & \end{array}$$

Sommando si ottiene:

$$\begin{array}{cccccc} 4 & 9 & 6 & 4 & 8 & 6 \\ & & & 2 & 1 & 4 \end{array}$$

e si sposta nuovamente il moltiplicatore verso destra di una posizione e si moltiplica $6 \cdot 214 = 1284$. Questa cifra viene scritta sopra al numero 214 e si somma alle cifre del moltiplicando dove si cancella il numero 6

$$\begin{array}{cccccc} 4 & 9 & 6 & 4 & 8 & \cancel{6} \\ & & 1 & 2 & 8 & 4 \end{array}$$

Infine si ottiene il risultato finale $4 \quad 9 \quad 7 \quad 7 \quad 6 \quad 4$.

2.3.4 La divisione

Quanto alla divisione l'autore dice che:

"È simile alla moltiplicazione, ma che si procede in maniera inversa a questa, poichè nella divisione si sottrae mentre là, al contrario si aggiunge" [29 p.14].

L'autore dice anche che il risultato della divisione è

"quello che ritorna all'unità" [29, p.14].

Nel manoscritto di Cambridge l'operazione trattata con maggiori dettagli è la divisione 46468 : 324. I principali passaggi di calcolo si effettuano come segue:

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ 4 & 6 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 2 & 4 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ 1 & 4 & 0 & 6 & 8 \\ & 3 & 2 & 4 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & 4 & \\ 1 & 4 & 0 & 6 & 8 \\ & 3 & 2 & 4 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 4 & \\ 1 & 1 & 0 & 8 \\ 3 & 2 & 4 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 8 \\ & 3 & 2 & 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 4 \end{array}$$

2.4 Al-Khwarizmi versus Jean de Séville

Come abbiamo già detto a più riprese, il trattato di aritmetica non ci è giunto nell'originale arabo, ma solo in una versione latina presente in un unico manoscritto presso l'University Library di Cambridge. Parecchi storici della matematica hanno criticato al-Khwarizmi di dare delle spiegazioni incomplete o di aver aggirato, nella descrizione delle operazioni, le principali difficoltà. L'autore, per esempio, omette spesso i caratteri all'interno del manoscritto e lascia degli spazi bianchi riservati per scrivere queste cifre mancanti. Nel manoscritto non si trova nè la definizione di addizione, nè la definizione di sottrazione di numeri interi, così come la descrizione dell'estrazione della radice quadrata. In verità, questo rimprovero può essere fatto solo al manoscritto latino incompleto che noi possediamo e che si ferma a metà di un esempio sulla moltiplicazione delle frazioni. Per fortuna una gran parte degli aspetti omessi nel manoscritto si possono conservare nel *Liber Algorismi de pratica arismetrice* di Jean de Séville che si basa strettamente su questo trattato di al-Khwarizmi. Nei prossimi paragrafi vedremo le caratteristiche mancanti nel manoscritto e presenti invece nell'opera di Jean de Séville.

2.4.1 Jean de Séville: cenni biografici

È stato un traduttore e astrologo spagnolo del XII secolo.
Jean operò forse in Galizia, a Limia (nell'Ourense), dal momento che si firmava Johannes Hispalensis atque Limiensis, durante l'epoca della cosiddetta Reconquista, la prolungata offensiva cristiana per impadronirsi della penisola Iberica, in gran parte dominata dai Musulmani. Le sue traduzioni - il

Secretum Secretorum dedicato a una fittizia regina Tarasia, e la versione originale del **De differentia spiritus et animae** del filosofo arabo del IX secolo Qusta ibn Luqa - erano tutte traduzioni di lavori di medicina.
Nel suo Libro degli algoritmi relativi all'aritmetica pratica, Jean de Séville infine fornisce una delle prime presentazioni a noi conosciute del sistema decimale indiano, la cui introduzione in Europa viene di norma associata al *Liber Abaci* di Leonardo Fibonacci da Pisa.

2.4.2 Le operazioni: come sono definite

Nel suo Livre d'Algorisme a proposito delle definizioni di addizione e di sottrazione, mancanti nel manoscritto di Cambridge, scrive:

*"Addizionare (*aggregare*) significa raccogliere (*colligere*) due o più numeri qualunque in uno solo"* e *"Sottrarre (*diminuere*) significa...rimuovere (*substrahere*) un numero qualunque da uno più grande[7]" [*29*, p.*30 *e* 32*].*

Per quanto riguarda la divisione, Jean de Séville scrive:

*"Dividere (*dividere*) significa suddividere (*partiri*) un grande numero in parti secondo la quantità del numero più piccolo, cioè sottraendo il più piccolo dal più grande tante volte quante quello è contenuto in questo" [*29*, p.*41*].*

In seguito dice che la divisione per due è una sorta di divisione e che la duplicazione è una sorta di moltiplicazione e queste:

*"Sono necessarie per l'estrazione della radice, ottenuta con l'aiuto della duplicazione e della divisione per due. È per questo che queste sono trattate qui in parte, sebbene la loro collocazione ideale sarebbe in seguito alla moltiplicazione e alla divisione" [*29*, p.*38*].*

[7]Si incontrano in numerose opere arabe ed europee del Medioevo, ma anche più tarde, delle definizioni analoghe che rimandano alla logistica greca e che possono essere interpretate nell'ottica della teoria degli insiemi.

2.4.3 L'estrazione della radice quadrata

La descrizione dell'estrazione della radice quadrata non si trova nel manoscritto di Cambridge, ma occupa un posto importante all'interno dell'opera: *Le Liber Algorismi de pratica arismetrice* di Jean de Séville, il quale ci insegna che al-Khwarizmi insegnava l'estrazione della radice quadrata secondo il metodo indiano. Jean de Séville descrive anche il modo "di cercare le radici con l'aiuto dei cerchi", cioè degli zeri. Per l'approssimazione della radice di un numero N, non quadrato, usa la trasformazione:

$$\sqrt{N} = \frac{1}{10^k}\sqrt{N \cdot 10^{2k}}.$$

La parte frazionaria del risultato sarà poi trasformata in frazione sessagesimale. Più si aggiungono degli zeri, più il risultato sarà esatto. L'autore usa a titolo di esempio il calcolo di:

$$\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2000000}}{1000} \simeq \frac{1414}{1000}$$

o approssimativamente:

$$1 + \frac{24}{60} + \frac{50}{60^2} + \frac{24}{60^3}.$$

Precedentemente, Jean de Séville aveva utilizzato lo stesso procedimento per calcolare direttamente $\sqrt{2}$ in frazioni sessagesimali e aveva ottenuto:

$$\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2 \cdot 60 \cdot 60}}{60} = 1 + \frac{24}{60}.$$

In realtà, Jean de Séville spiega che ogni numero possiede una sola radice, ma il numero 2 non possiede una vera radice e in questo caso, la radice viene determinata per approssimazione. Più avanti, Jean de Séville indica la seguente regola per i numeri che non possiedono dei quadrati:

$$\sqrt{N} = \sqrt{a^2 + b} \simeq a + \frac{b}{2a}.$$

Al-Nasawi, un matematico persiano, fornisce la seguente approssimazione per difetto:

$$\sqrt{N} = \sqrt{a^2 + b} \simeq a + \frac{b}{2a+1}.$$

Capitolo 3

Le frazioni

3.1 Le frazioni nel mondo arabo

Nel *trattato di aritmetica* di al-Khwarizmi è presente anche una parte sulle frazioni in cui viene evidenziato uno degli aspetti più interessanti del linguaggio arabo: esistono dei nomi particolari per le frazioni che hanno al numeratore un'unità (fino alla frazione $\frac{1}{10}$).
Nello specifico, le frazioni in questione vengono definite in questo modo:

$$\tfrac{1}{2} = nisf \quad \tfrac{1}{3} = tult \quad \tfrac{1}{4} = rub \quad \tfrac{1}{5} = hums \quad \tfrac{1}{6} = suds \quad \tfrac{1}{7} = sub$$
$$\tfrac{1}{8} = tumn \quad \tfrac{1}{9} = tus \quad \tfrac{1}{10} = usr$$

Inoltre, le radici dei termini che le designano (al di fuori di quello definito per $\frac{1}{10}$) sono gli stessi che rappresentano gli interi corrispondenti.
Per esempio: $3 = talata$ e $5 = hamsa$.
Tutte le altre frazioni invece non hanno dei nomi particolari in arabo ma vengono espresse nella forma "una parte di 30 parti" o più semplicemente come "una parte di 30" nello stesso modo in cui noi oggi diciamo $\frac{1}{13}$.
Per quanto riguarda invece le frazioni della forma $\frac{m}{n}$, essi esprimevano "tre quinti" ma non "tre diciassettesimi".
Questo è il motivo per cui, le frazioni aventi per numeratore un'unità, si dicevano "**esprimibili**" fino a $\frac{1}{10}$, mentre le altre "**inesprimibili**".
Esamineremo nei prossimi paragrafi come al-Khwarizmi definisce, nel suo

trattato di aritmetica, le diverse frazioni e le operazioni possibili tra di esse. Innanzitutto l'autore descrive le frazioni sessagesimali che attribuisce, come fa ugualmente Jean de Séville, agli Indiani; esso le scriveva come frazioni comuni, alla maniera indiana, vale a dire su una colonna, scrivendo per primi i gradi, poi più in basso i minuti, poi i secondi e così via.
Prima di proseguire nell'analisi del trattato, vediamo brevemente come nel mondo indiano venivano studiate e scritte le frazioni.

3.1.1 Nel mondo indiano

Gli Indiani furono dei grandi maestri d'aritmetica: crearono un sistema posizionale decimale perfetto, idearono lo zero, le funzioni seno e coseno.
Secondo gli studi più recenti pare ebbero sugli Indiani grande influenza gli studiosi greci che, da Alessandria d'Egitto, elargivano il loro sapere al mondo occidentale, ma soprattutto a quello orientale.
Tipico della mentalità indiana era il vezzo di trasformare spesso la matematica in poesia o in qualsiasi altra forma leggiadra, facendo riferimenti a fiori, amanti, storie varie.

Matematico e astronomo nell'antica India

Gli Indiani formarono il nostro attuale sistema posizionale, intorno al secolo VIII d.C., combinando tre principi fondamentali di origine molto antica:

- La base decimale.
- La notazione posizionale.
- Un simbolo diverso per ciascuna delle dieci cifre.

Non applicarono però lo stesso sistema alle frazioni, per le quali venne adottata la scrittura alessandrina: denominatore fratto numeratore, ma omettendo il trattino orizzontale.
Da evidenziare è il fatto che, mentre per i numeri naturali gli Indiani adot-

tarono un sistema posizionale decimale, per le frazioni la cosa non avvenne, anzi usarono sistemi complicati.
Nel XII secolo, quando la cultura orientale era oramai passata al mondo arabo, ancora vivevano in India matematici di prestigio, tra cui Bhaskaracarya, autore di un curioso e denso trattato di algebra nel quale lo zero è definito come la somma di due numeri opposti. Il titolo di questa opera è *Lilavati*, un nome femminile per il quale ci sono varie interpretazioni: per alcuni è lo spirito (femminile) dell'algebra stessa, per altri il nome della figlia cui sono dedicati vari semplici giochi matematici.
Interessante è il fatto che alcuni degli indovinelli proposti riguardano le frazioni. Per esempio uno di essi è così concepito: uno sciame di api vola sui fiori del giardino. Di esse, $\frac{1}{5}$ si posa sui gelsomini, $\frac{2}{3}$ sui lillà, $\frac{1}{15}$ sui gigli mentre due api s'aggirano qua e lá senza prendere decisioni. Quante sono in tutto le api dello sciame?

3.2 Le operazioni tra frazioni

Ritornando ora al testo latino di al-Khwarizmi analizziamo brevemente come all'interno di questo trattato sono descritte le operazioni tra le frazioni.
L'autore descrive in primis **la moltiplicazione**.
Egli comincia affermando la regola che determina l'ordine di grandezza del prodotto nella moltiplicazione di diverse frazioni sessagesimali. Nella moltiplicazione delle frazioni, esatte o meno, al-Khwarizmi si raccomanda di esprimere ogni fattore nelle unità di ordine inferiore, dopodichè l'intero problema si riduce ad una moltiplicazione di numeri interi nel sistema decimale e ad un prodotto che le porta alla forma di frazioni sessagesimali.
Al-Khwarizmi nota che vi è ancora un altro metodo di moltiplicazione più breve di quello precedente: una moltiplicazione delle frazioni sessagesimali simile alla nostra moltiplicazione con le frazioni decimali e nota ai Babilonesi e ai saggi greci nel periodo tardo.
Per quanto concerne la **divisione**, l'autore esprime il dividendo e il divisore

in un'unità di ordine inferiore. A questo proposito, se il dividendo contiene meno unità di questo ordine è espresso nell'ordine di unità sessagesimali immediatamente successivo.
Al-Khwarizmi descrive poi l'**addizione**, la **sottrazione**, la **duplicazione** e la **divisione per due** di frazioni sessagesimali.
Nell'analizzare il manoscritto si possono inoltre notare alcune particolarità:

- La parte sulle frazioni contiene molti errori.
- L'ultima pagina del manoscritto è dedicata alle frazioni ordinarie.
- Il manoscritto termina nel mezzo dell'esempio in cui si vuole moltiplicare $3\frac{1}{2}$ per $8\frac{3}{11}$.

Quest'ultimo esempio lo troviamo anche in Jean de Séville che, nel suo libro citato nel capitolo precedente, ricorda che:

"Nello stesso modo anche Alcorismus parla della moltiplicazione e la divisione dei numeri interi e delle frazioni, molto meglio che su altre forme"[29, p.68].

Nella spiegazione delle operazioni sulle frazioni ordinarie al-Khwarizmi, nello stesso modo di Jean de Séville, sottolinea l'analogia tra le frazioni sessagesimali e le ore, evidenziando che le frazioni aventi un'unità come numeratore sono simili ai minuti e che il loro prodotto al contrario è simile ai secondi.
Per la moltiplicazione, essi utilizzavano lo schema riportato nella pagina seguente.

8		3
1 2		1 3
1 4		1 9
1 5	|1 080|	
40 358	33 294	27 93
	.30 .894. .1080.	

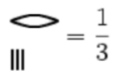
Le frazioni di sinistra $8, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, ridotte al minimo denominatore, sono uguali a $\frac{358}{40}$, mentre le frazioni di destra $3, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}$, ridotte al minimo denominatore, sono uguali a $\frac{93}{27}$. I prodotti danno: $\frac{33294}{1080} = 30\frac{894}{1080}$.
Per quanto riguarda la divisione, essi riducevano i due numeri allo stesso denominatore, in modo tale che la divisone si riducesse ad una divisione di numeri interi.
Jean de Séville sottolinea, nello specifico, che la ricerca del denominatore comune (ottenuta abitualmente attraverso la moltiplicazione di tutti i denominatori) è più importante dentro la divisione e l'addizione piuttosto che dentro alla sottrazione. Per estrarre la radice di una frazione, nel denominatore non ci deve essere necessariamente un numero al quadrato, ma si servivano della regola $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{ab}}{b}$.
In questo modo si otteneva una frazione del tipo $\frac{M}{60^{2k-1}}$ moltiplicando il numeratore e il denominatore per 60.

L'esempio che abbiamo riportato sopra riguardo alla moltiplicazione mette inoltre in luce un'aspetto molto importante: i matematici dei paesi islamici, all'epoca di al-Khwarizmi e probabilmente anche prima, rappresentavano le frazioni ordinarie come somme di frazioni aventi un'unità al numeratore. Questo procedimento esisteva già nell'antico Egitto e nei Babilonesi. Vediamo ora brevemente come le frazioni venivano definite da questi due popoli.

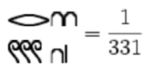
3.2.1 Nel mondo egizio

È certo che gli Egiziani usassero le frazioni ed avessero un loro modo di rappresentarle.
Per esprimere le frazioni, gli Egizi si servivano, in genere, del geroglifico della bocca

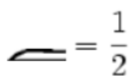
che, nel contesto, significava “parte” e che veniva posto sopra il numero facente funzione di denominatore:



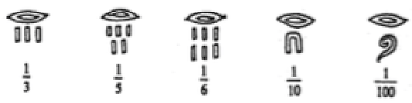
Quando il denominatore non poteva essere rappresentato tutto intero sotto il segno della “bocca”, essi scrivevano l’eccedenza di seguito:



Alcune frazioni, inoltre, erano raffigurate con segni speciali.
Per $\frac{1}{2}$ usavano semplicemente il geroglifico che segue e che si leggeva GeS ed esprimeva l’idea della metà:



Mentre per le altre frazioni venivano utilizzati i seguenti simboli:



Si è soliti affermare che gli Egizi avessero solo frazioni "unitarie". In realtà ciò non è esattamente vero, essi infatti avevano anche altre due frazioni, $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$, alle quali riservavano simboli particolari come mostrato di seguito:

Il simbolo superiore rappresentava $\frac{2}{3}$ mentre quello sottostante $\frac{3}{4}$.

Una delle problematiche sulle frazioni che più appaiono dibattute è quella relativa alla riduzione di frazioni complesse in frazioni unitarie; in questo, i papiri rivelano che gli Egizi furono veri e propri maestri. Per esempio si trova, tra molti esempi, la seguente uguaglianza:

$$\frac{3}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10}$$

Per esprimere, ad esempio, la quantità $\frac{5}{3}$ usavano i simboli corrispondenti a $\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$; mentre la frazione $\frac{47}{60}$ era rappresentata con i simboli relativi a $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$. Gli Egizi avevano quindi bisogno, per eseguire il calcolo con le frazioni, di "tavole" sulle quali leggere le scomposizioni di ogni frazione di uso comune in somma di frazioni con numeratore unitario, in modo che il numero di queste fosse il più piccolo possibile.

Un testo importante egizio è il papiro di Rhind (datato intorno al 1650 a.C.), un manuale di istruzione di aritmetica e geometria. Oltre a fornire formule per aree e procedimenti di moltiplicazione, divisione e operazioni con frazioni a numeratore unitario, contiene l'evidenza di altre nozioni matematiche come numero primo, media aritmetica, media geometrica, media armonica e numeri perfetti.

Una parte del papiro di Rhind.

3.2.2 Nel mondo babilonese

Il sistema sessagesimale babilonese, grazie al meccanismo posizionale, permetteva di rappresentare in modo efficace sia numeri interi che frazionari. In particolare, i numeri frazionari venivano rappresentati in modo omogeneo a quello usato per i numeri interi per semplice estensione del sistema base facendo ricorso alle frazioni sessagesimali: $\frac{1}{60}$, $\frac{1}{3600}$, ecc.
Ad esempio, il numero 5;7,30 (dove per nostra comodità il punto e virgola separa la parte intera da quella frazionaria e la virgola separa le cifre sessagesimali) rappresenta il numero $5 + \frac{7}{60} + \frac{30}{3600}$, cioè nella nostra notazione $5 + \frac{1}{8}$.
Il grande vantaggio dal punto di vista computazionale di un sistema frazionario di questo tipo è quello di poter eseguire le operazioni aritmetiche sulla parte non intera con gli stessi algoritmi di calcolo impiegati per i numeri interi: è ciò che avviene oggi con i numeri decimali con la virgola. I calcoli

di divisioni potevano essere realizzati facilmente facendo ricorso al concetto di reciproco di un numero.
I problemi più grossi nella notazione babilonese, invece, erano:

1. La mancanza di un meccanismo esplicito per separare chiaramente la parte intera da quella frazionaria.

2. Il non poter rappresentare in modo esatto tutte le quantità frazionarie, ovvero tutte le frazioni i cui denominatori non sono divisori esatti di 60, come ad esempio la frazione $\frac{3}{7}$; in questo caso era necessario ricorrere ad una rappresentazione approssimata.

Uno dei più famosi esempi di matematica babilonese è la tavoletta chiamata Plimpton 322 che prende il nome dalla collezione di G.A. Plimpton alla Columbia University.

3.3 Abu-l-Wafā: cenni biografici

Come abbiamo visto nel capitolo precedente, un ruolo fondamentale nella diffusione della teoria delle frazioni fu quello di Abu-l-Wafā che le trattò nel dettaglio nel suo libro precedentemente citato: *Libro sull'aritmetica necessario agli scribi e ai mercanti.*

Prima di analizzare nei prossimi paragrafi il suo libro, vediamo brevemente alcuni cenni biografici di Abu-l-Wafā.
Fu un astronomo persiano nato a Buzhgan in Iran.
Nel 959 si trasferì in Iraq, dove studiò matematica e si specializzò nel campo della trigonometria. Scrisse una serie di libri, la maggior parte dei quali è andata però perduta.
Nelle sue opere dimostra di saper usare già tutte le sei funzioni trigonometriche principali e di possedere tavole per i seni con incrementi di 0,25 gradi, con una precisione di 8 cifre decimali, come pure tavole dei valori delle tangenti.
Abu-l-Wafā sviluppò la formula trigonometrica $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ e realizzò un quadrante a muro per accurate misure astronomiche della declinazione delle stelle; introdusse, inoltre, la funzione trigonometrica tangente, migliorò i metodi di calcolo delle tavole trigonometriche ed affrontò problemi trigonometrici.

Abu l-Wafa Muhammad al-Buzjani

3.4 Libro sull'aritmetica necessaria agli scribi e ai mercanti

Il *Libro sull'aritmetica necessaria agli scribi e ai mercanti* raggruppa e sviluppa le basi delle conoscenze dei conti arabi.
Dato che era destinato a dei professionisti, esso non contiene delle dimostrazioni ma solamente delle regole e degli esempi.
La prima parte del libro di Abu-l-Wafā è dedicata alle frazioni ed è la prima esposizione completa che oggi conosciamo. Se infatti l'autore in questa prima parte riporta i procedimenti largamente in uso prima di lui, li espone però secondo un ordine che partecipa dello stesso desiderio di razionalizzazione mostrato dalla pratica aritmetica.
Inoltre, se contrariamente alla maggior parte degli autori di trattati d'aritmetica, Abu-l-Wafā fa precedere all'esame delle operazioni sugli interi la sezione sulle frazioni, è verosimilmente perchè le frazioni costituiscono assieme agli interi gli oggetti primari della disciplina. In effetti per il calcolo indiano la divisione tra interi è una divisione senza resto il cui risultato viene dato in generale mediante frazioni. Si ha così che:

$$n : d = q + \tfrac{r}{d}$$

dove q e r sono interi e $\frac{r}{d}$ una frazione con $r < d$.
Al-Karaji organizza diversamente da Abu-l-Wafā la sua esposizione ed è costretto a utilizzare il linguaggio delle frazioni prima ancora di averle introdotte.
Abu-l-Wafā inoltre, per definire le frazioni, fa uso della nozione euclidea di rapporto e osserva che vi sono tre tipi di rapporto tra i numeri:

1. quello dal più piccolo al più grande;

2. quello dal più grande al più piccolo;

3. quello tra due numeri uguali.

Una frazione è allora, come nel caso dei risultati forniti dalla divisione di due interi, sempre un rapporto del primo tipo, cioè dal più piccolo al più grande. Si ritroverà questo stesso concetto generale di frazione propria, almeno implicitamente, in tutti gli autori dei trattati di aritmetica sul calcolo indiano. Questo modo di trattare le frazioni è di origine greca.
Un trattato a cui Abu-l-Wafā fa riferimento in più occasioni sono gli *Elementi di Euclide*.

3.4.1 Contenuti - Parte I

Abu-l-Wafā all'interno del suo libro spiega come si opera con delle frazioni ordinarie e come le si riduce.
Nello specifico, tutta la prima parte del libro è dedicata al processo della "messa in rapporto di due numeri" e cioè, l'atto di esprimere i rapporti attraverso delle frazioni che hanno come numeratore l'unità, che è l'elemento che attira principalmente la sua attenzione dal momento che questo procedimento veniva usato dai commercianti dell'epoca.
Abu-l-Wafā distingue tre gruppi di frazioni che noi indicheremo con il nome di frazioni fondamentali:

1. Le **frazioni principali**, cioè le frazioni che hanno come numeratore l'unità da $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{10}$ inclusi.

2. Le **frazioni composte** del tipo $\frac{m}{n}$; $m < n \leq 10$, fra le quali la frazione $\frac{2}{3}$ occupa uno spazio particolare.

3. Le **frazioni unificate**, cioè i prodotti di frazioni principali del tipo $\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n} \cdot \ldots\ldots \cdot \frac{1}{p}$ (ad eccezione delle frazioni principali stesse).

Tutte le altre frazioni vengono definite **frazioni sorde**, ovvero che non si possono esprimere componendo frazioni dei tipi precedenti. Abu-l-Wafā chiama le frazioni fondamentali, così come tutte le frazioni composte dalla somma o dal prodotto di frazioni fondamentali, frazioni "esprimibili" o "pronunciabili" (muntaq) mentre chiama le altre "inesprimibili" o "mute" (asamm). Con lo stesso termine, gli altri islamici indicavano anche, come vedremo poi, i numeri irrazionali.

- **Esprimibili** sono le frazioni i cui denominatori contengono i fattori 2,3,5 e 7;
- **Inesprimibili** sono quelle il cui denominatore comprende dei fattori primi più grandi di 7.

Questa terminologia è legata chiaramente alla particolarità a cui si è già accennato della lingua araba.
L'eleganza suggerita dei calcolatori raccomandava inoltre la decomposizione di ogni frazione in somma di frazioni principali ($\frac{2}{3}$ ha un ruolo particolare). Senza che fosse una regola, si preferiva perciò scrivere $\frac{3}{4}$ come $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ o $\frac{1}{3}+(\frac{2}{3})\cdot(\frac{1}{10})$ e la maggior parte dei matematici continuò a osservare questa forma di scrittura.
Abu-l-Wafā formula nella prima parte del libro un gran numero di regole per decomporre in questo modo le frazioni esprimibili o per dare alle frazioni sorde un'approssimazione dello stesso tipo.
Il principio generale equivale a uno sviluppo delle frazioni in frazioni sessagesimali che poi si esprimono per mezzo di frazioni del tipo richiesto.
Per esempio:

$$\frac{4}{5}=\frac{48}{60}=\frac{30}{60}+\frac{12}{60}+\frac{6}{60}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}$$

Questo metodo era largamente utilizzato anche per la contabilità, la finanza e in generale quando si dovevano effettuare dei calcoli nella vita pratica di tutti i giorni soprattutto dagli abitanti del Vicino e Medio Oriente. In fondo, tutto consiste in uno sviluppo delle frazioni in frazioni sessagesimali che, a loro volta, sono espresse attraverso delle frazioni fondamentali.
Vediamo ora più nel dettaglio i metodi che vengono definiti da Abu-l-Wafā.
Prima di tutto, bisogna distinguere due tipi di rapporti nelle frazioni fondamentali e nelle frazioni composte, vale a dire i rapporti rappresentati da frazioni il cui denominatore è 60 e i rapporti rappresentati da frazioni il cui

numeratore è formato da un numero intero, fratto o misto.
In cima alle quattro regole corrispondenti a queste frazioni sono posizionate quattro tabelle nelle quali le frazioni più comuni vengono rappresentate attraverso frazioni sessagesimali, cioè i numeri il cui denominatore è 60.
Abu-l-Wafā stesso designa queste ultime come "scomposizioni formate da sessantesimi".
Le 4 tabelle sono così definite:

- **La tabella 1** mostra le frazioni principali.

$$\frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{7}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{9}\ \frac{1}{10}\ 30\ 20\ 15\ 12\ 10\ 8\frac{4}{7}\ 7\frac{1}{2}\ 6\frac{2}{3}\ 6$$

- **La tabella 2** comprende diverse frazioni composte che vanno da $\frac{2}{3}$ a $\frac{9}{10}$.
  Abu-l-Wafā fornisce anche per queste frazioni (ad eccezione di $\frac{2}{3}$) delle "espressioni più eleganti" sotto forma di somme di frazioni principali e di frazioni composte, per esempio:

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{10}, \ldots.., \frac{9}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{10}$$

- **La tabella 3** comprende alcune somme particolarmente importanti di frazioni prese due a due, per esempio $\frac{1}{2} + \frac{1}{7}$ ecc., fino a $\frac{1}{9} + \frac{1}{10}$.

- **La tabella 4** infine fornisce sotto forma sessagesimale alcuni prodotti di frazioni prese due a due, per esempio $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7}$ ecc. fino a $\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{10}$.

Queste tabelle poi vengono tutte utilizzate per scomporre altre frazioni.

- **Rapporti del tipo $\frac{n}{60}$ con n che è un numero intero inferiore a 60.**
  Si scompone secondo le seguenti regole:

– Per $n = 10k + 5$, in cui $k = 2, 3, 4, 5$, si sottrae 15 da n al numeratore, cioè si utilizza la trasformazione:

$$\frac{n}{60} = \frac{n-15}{60} + \frac{1}{4}$$

– Per $n = 10k + 2$ e $n = 10k + 7$, in cui $k = 1, 2, 3, 4, 5$ si sottrae 12 da n al numeratore e si ottiene la trasformazione:

$$\frac{n}{60} = \frac{n-12}{60} + \frac{1}{5}$$

– Per $n = 6, 7, 8, 9$, $n = 10k+1$, $n = 10k+3$, $n = 10k+6$, $n = 10k+8$, in cui $k = 1, 2, 3, 4, 5$, si sottrae 6 da n al numeratore, e cioè:

$$\frac{n}{60} = \frac{n-6}{60} + \frac{1}{10}$$

– Per $n = 10k + 4$ e $n = 10k + 9$, in cui $k = 1, 2, 3, 4, 5$, la trasformazione:

$$\frac{n}{60} = \frac{n-4}{60} + \frac{1}{15}$$

permette di diminuire il numeratore di quattro unità.

Per esempio:

$$\frac{49}{60} = \frac{45}{60} + \frac{4}{60} = \frac{30}{60} + \frac{15}{60} + \frac{4}{60} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{10};$$

Anche il numero $\frac{48}{60}$ non si scrive sotto forma della frazione composta $\frac{4}{5}$, ma secondo questa formula:

$$\frac{48}{60} = \frac{42}{60} + \frac{6}{60} = \frac{30}{60} + \frac{12}{60} + \frac{6}{60} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10}$$

Questo è dovuto al fatto che si preferiva presentare anche le frazioni unificate e le frazioni composte (ad eccezione di $\frac{2}{3}$) sotto forma di frazioni principali e di frazioni composte, benché venissero utilizzate frequentemente nelle operazioni intermediarie.

- **Rapporti del tipo $\frac{n+\alpha}{60}$, in cui n è $<$ 60 e in cui α è un numero del tipo $\frac{p}{q}$ o $\frac{p}{q} \cdot \frac{1}{k}$, con $1 \leq p \leq q \leq k \leq 10$ o la somma di più frazioni di questo tipo.**
  Abu-l-Wafā fornisce a questo punto un ampio numero di regole per diversi valori di alfa. Senza entrare nei dettagli, possiamo semplicemente notare che in generale la scomposizione di $\frac{n+\alpha}{60}$ non si ottiene attraverso la semplice addizione delle scomposizioni di $\frac{n}{60}$ e di $\frac{\alpha}{60}$, ma tramite un certo numero di scomposizioni ausiliarie che permettono di scrivere il numeratore sotto forma di somme che portano a un risultato completamente diverso.
  L'algoritmo della scomposizione non viene sempre utilizzato nello stesso modo: la preferenza ricade sull'espressione o sulle espressioni che si compongono di un numero più piccolo di frazioni principali.

- **Altri rapporti**.
  Negli altri casi, la scomposizione viene effettuata moltiplicando il numeratore per 60 e dividendo in seguito la frazione per 60.
  Negli esempi di Abu-l-Wafā, si utilizza la trasformazione:

  $$\tfrac{s}{t} = \left(\tfrac{s \cdot 60}{t}\right) : 60 = \tfrac{n+\alpha}{60} \qquad n < 60, \alpha < 1$$

  attraverso la quale la scomposizione viene riportata direttamente ai casi precedenti. Si può anche, in caso di necessità, ripetere il processo moltiplicando di nuovo per 60 e dividendo per 60. Quando altri fattori primi non scomponibili appaiono nel denominatore, il processo di scomposizione, che può essere portato avanti all'infinito, viene interrotto o dopo la prima o dopo la seconda scomposizione.

Per esempio:

$$\tfrac{3}{17} = \tfrac{180}{17} : 60 = \tfrac{10+\frac{10}{17}}{60}$$

Abu-l-Wafā arrotonda in questo caso a 11 il numeratore sottolineando che 10 è $> \frac{1}{2} \cdot 17$:

$$\frac{3}{17} \approx \frac{11}{60} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{10}$$

Per ottenere un livello di esattezza maggiore, bisogna spingere questo processo ancora oltre:

$$\frac{3}{17} = \frac{10+\frac{10}{17}}{60} = (10 + \frac{600}{17} : 60) : 60 = (10 + \frac{35}{60} + \frac{5}{17} : 60) : 60.$$

Partendo dal presupposto che 5 è minore di $< \frac{1}{2} \cdot 17$, Abu-l-Wafā trascura l'ultimo termine della somma tra parentesi e ottiene:

$$\frac{3}{17} \approx (10 + \frac{3}{60}) : 60 = (10 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}) : 60 = (6 + 3\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) : 60 =$$
$$= \frac{1}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8}$$

Questo processo forse è stato scoperto da Abu-l-Wafā stesso. Gli scribi invece in questi casi erano soliti aggiungere un numero qualsiasi al numeratore e al denominatore di una frazione "inesprimibile" per renderla "esprimibile". E così come nell'esempio che è citato nella pagina precedente:

$$\frac{3}{17} \approx \frac{3+1}{17+1} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$$

Il valore approssimativo è intaccato da un margine di errore tanto più grande quanto il numero che viene aggiunto è più grande; e la scelta di frazioni abbastanza piccole che vengono aggiunte diventa più difficile. È per questo che Abu-l-Wafā raccomanda l'utilizzo del metodo descritto qui sopra.
Si ottiene, infatti, per i primi due valori approssimativi forniti più in alto, dei margini di errore corrispondenti rispettivamente al 4% e allo 0,05% mentre un margine d'errore del 26% per il valore $\frac{2}{9}$.
Abu-l-Wafā stesso indica che l'errore assoluto del secondo valore approssimativo è di $\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{17}$ e calcola ancora un terzo valore approssimativo con un errore assoluto di $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{17}$ che corrisponde ad un errore relativo del 0,001%.

3.4.2 Contenuti - Parte II

Nella seconda parte del libro Abu-l-Wafā descrive le operazioni relative ai numeri interi, alle frazioni ordinarie e alle frazioni espresse con l'aiuto di frazioni fondamentali. Noi abbiamo già menzionato la divisione dei numeri interi.
Notiamo come le operazioni di duplicazione e divisione per due siano assenti nel libro e come Abu-l-Wafā raccomandi con grande insistenza la formazione del più Piccolo Comune Multiplo quando si tratta di determinare il denominatore comune.
I metodi di calcolo frazionario che utilizzavano gli scribi e i calcolatori erano in parte di natura sessagesimale; questo appare chiaro negli esempi di addizione e moltiplicazione forniti qui sotto:

$$\tfrac{4}{5} + \tfrac{2}{3} + \tfrac{3}{10} = \frac{\frac{4}{5}\cdot 60+\frac{2}{3}\cdot 60+\frac{3}{10}\cdot 60}{60} = \frac{106}{60} = 1 + \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{10};$$

$$\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\right)\cdot\left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5}\right) = \frac{(\frac{1}{4}\cdot 60+\frac{1}{5}\cdot 60)(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})}{60} = \frac{22\frac{1}{2}}{60} = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8}$$

L'origine di tutti questi processi genera ancora problemi ma è fuori questione che si siano diffusi molto rapidamente nei paesi arabi. Si tratta molto probabilmente di vestigi di metodi di calcolo che risalgono all'epoca babilonese perchè è molto probabile infatti che l'utilizzo delle frazioni che avevano per numeratore l'unità sia passato dall'antico Egitto, a Babilonia, agli stati ellenici e nei paesi arabi.
Tuttavia i metodi descritti da Abu-l-Wafā sono così originali, anche per quanto riguarda la scelta delle frazioni fondamentali all'inizio delle operazioni e anche per quanto riguarda le trasformazioni utilizzate, al punto che possiamo ammettere, a ragion veduta, l'esistenza di tradizioni nazionali fortemente radicate che hanno permesso ai matematici dell'Islam di raggiungere un livello molto elevato di perfezione nei calcoli.

3.5 Le frazioni negli altri autori arabi

Successivamente numerosi autori di manuali di aritmetica scriveranno ancora le frazioni ordinarie sotto forma di somme e di prodotti di frazioni che hanno per numeratore l'unità: ad est con al-Karaji, a ovest con Abu Zakariya Muhammad ibn Abdallah al-Hassar, Abu-l-Hasan Ali ibn Muhammad al-Qalasadi e altri.

3.5.1 Al-Karaji: cenni biografici

Al-Karaji nello specifico, è considerato il primo e principale esponente dell'indirizzo aritmetico-algebrico. Vissuto tra la fine del X e l'inizio dell'XI secolo, fondò a Baghdad una vera e propria scuola di allievi e seguaci. Viene perciò spesso citato come al-hisabi, cioè maestro di aritmetica, per le sue eccezionali doti didattiche. Scrisse molte e importanti opere, di cui si ricordano in particolare il manuale sulla scienza dell'aritmetica e il vasto trattato di algebra intitolato *Al-Fahri* dal soprannome Fachr'al mulk (gloria del regno), dato al vizir Abu Galeb, cui lo scritto era dedicato.
Nella prefazione dell'*Al-Fahri*, al-Karaji dichiara fra l'altro per la prima volta in modo esplicito qual è lo scopo dell'algebra: determinare le grandezze incognite mediante quelle note, utilizzando i metodi più efficaci. Egli espone qui anche lo studio delle potenze dell'incognita e, seguendo Diofanto, preferisce utilizzare il principio moltiplicativo per designare le potenze superiori, per cui ad esempio $x^5 = x^2 \cdot x^3$ è chiamato quadrato-cubo, $x^6 = x^3 \cdot x^3$ cubo-cubo, e così via.

3.5.2 Al-Kashi: cenni biografici

Ghiyath ad-Din Jamshid Masud al-Kashi detto al Kashi perchè nativo di Kashan (Iran) nel 1380, si autodefinisce in una sua opera “inventore delle frazioni decimali”, forse perchè le aveva davvero concepite all'interno del sistema posizionale decimale cosa che non era riuscita a nessuno in modo completo.

Al-Kashi elaborò una trattazione esauriente e sistematica delle operazioni con frazioni decimali.
Egli fece uso, oltre che della linea di frazione (che si diffuse in Europa solo nel tardo Medioevo ad opera di Leonardo Pisano), di una scrittura numerica superiore che specificava il numero delle cifre decimali; ad esempio, 36^2 avrebbe indicato 0,36.

Raffigurazione di al-Kashi

Questo metodo di rappresentazione delle frazioni decimali si diffuse nel mondo islamico col nome di "metodo turco". La conoscenza di questo metodo si diffuse a Vienna dove apparve nel 1562 in una raccolta di problemi bizantini.
Al-Kashi inoltre indicò come convertire delle frazioni ordinarie in danag, tasug e saira e inversamente come convertire quest'ultime in frazioni ordinarie, ma questo processo lo vedremo meglio nel prossimo paragrafo.

3.5.3 I sistemi monetari nel mondo arabo

Un fattore che sicuramente incentivò lo sviluppo e la conoscenza delle frazioni fu il sistema monetario in uso nei paesi Arabi d'oriente; tra i diversi sistemi monetari, infatti, uno dei più diffusi e sviluppati era quello che si basava sul seguente rapporto delle unità monetarie 1 dinar = 6 danaq = 60 saira.
I Musulmani non coniarono monete proprie, ma adottarono quelle delle province bizantine conquistate, rimpiazzando in genere la croce con un segno arabico. Fu il quinto califfo Abd el MaIik, a coniare per primo alcune monete arabe, sempre comunque attenendosi al modello bizantino. Dei pezzi di Bisanzio gli arabi assunsero perfino i nomi, adattandone la pronuncia alla loro fonetica. Dalla moneta d'oro, il denarius aureus si ebbe il **dinar** o **dinaro** (oggi ancora unità di moneta in Tunisia, Algeria, Giordania e Jugoslavia),

dalla moneta d'argento la dramma, si ebbe il **dirham** oggi ancora in Marocco e dal follis si ebbe il **Fels** o **Fils** (che anche oggi sono denominazioni di monete divisionali in Iraq e Giordania).
Le monete arabe oltrepassarono di molto i confini dei regni dell'Islam: esse arrivarono fino alla Scandinavia; se ne trovarono lungo le antiche strade commerciali dei Normanni, che commerciavano oltre il Volga ed il Dnjepr e lungo la via della seta, che dal Turkestan si spingeva attraverso l'Asia centrale fino alla muraglia cinese.
Il dirham è nominalmente stato mantenuto come unità di conto in numerosi paesi arabi, nella maggior parte dei casi come frazione della moneta di base qualora essa sia chiamata dinar.
I popoli dell'Asia centrale e dell'Iran, in particolare i commercianti, calcolavano correttamente in danag, tasug e saira. Questi calcoli, di cui troviamo una descrizione dettagliata presso al-Kashi, erano ugualmente effettuati con l'aiuto di frazioni che avevano per numeratore un'unità. I danag, tasug e saira, erano delle unità di peso e di moneta del medioevo che rappresentano $\frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{96}$ dell'unità fondamentale. Per rappresentarli si utilizzano delle cifre particolari siyaka, che proveniva da una sorta di scrittura stilografica dei numeri arabi. Per ottenere delle frazioni ancora più piccole si formava il danaq della saira, il tasug della saira e la saira della saira, ovvero le frazioni: $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{96}, \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{96}, \frac{1}{96} \cdot \frac{1}{96}$ etc.
Al-Kashi indica prima di tutto come convertire delle frazioni ordinarie in danag, tasug e saira e inversamente come convertire quest'ultime in frazioni ordinarie. Nel primo caso, il processo è identico a quello che abbiamo dimostrato nel paragrafo precedente, a parte il fatto che, al posto del fattore 60, appaiono uno dopo l'altro i fattori 6, 24 e 9, per esempio:

$$\frac{5}{7} = \frac{30:7}{6} = \frac{4}{6} + \frac{8:7}{24} = \frac{4}{6} + \frac{1}{24} + \frac{4:7}{96} = 4d \cdot 1t \cdot \frac{4}{7}s$$

Per moltiplicare e dividere le frazioni scritte in questa forma, utilizzavano delle tabelle contenenti i prodotti dei multipli di alcune frazioni elementari. Per esempio, per moltiplicare $5d\ 3t\ 3s \cdot 4d\ 1t\ 2s$ loro cercavano direttamente dentro alla tavola i 9 prodotti intermedi che venivano scritti gli uni sotto gli altri e così si otteneva addizionandoli il risultato $4d1t1s1ds2ts2ss$. E in maniera analoga per la divisone.

Bibliografia

[Al-Khwarizmi, 1990] Al-Khwarizmi, *Le calcul indien (Algorismus)* (trad.A. Allard), Collection Sciences dans l'histoire, Collection d'etudes classiques, (1990).

[Ambrosetti N., 2008] N. Ambrosetti, *L'eredità arabo-islamica nelle Scienze e nelle Arti del calcolo Dell'Europa Medievale*, LED, (2008), pp. $47-51$.

[Donnini A., 2000] A. Donnini, *5 mila anni di Pensiero Matematico, Note di storia della matematica*, il Capitello, (2000), Torino, pp. $401-403$.

[Enciclopedia, 2002] *Storia della Scienza Volume III*, Treccani, (2002).

[Gazalè M., 2001] M. Gazalè, *Il numero. Dalla matematica delle piramidi all'infinito di Cantor*, EDIZIONI DEDALO, (2001).

[Youschkevitch A., 1976] A. Youschkevitch, *Les Mathematiques Arabes: $VIII-XV$ siecles*, VRIN, (1976).

[Rashed R., 1996] R. Rashed, *Encyclopedia of the History of Arabic Science*, Routledge, (1996), Torino.

[Rossi P., 1989] P. Rossi, *Storia della scienza*, UTET, (1989), Torino.

Sitografia

- Per una biografia di al-Khwarizmi si veda *Wikipedia, l'Enciclopedia libera,* alla pagina web

  https : //it.wikipedia.org/wiki/Muhammad_ibn_Musa_al−Khwarizmi

- Per la parte introduttiva si veda *Il giardino di Archimede, un museo per la matematica*, alla pagina web

  http : //web.math.unifi.it/ archimede/archimede/islam/islam.html

- Per una biografia di Jean de Séville si veda *Wikipedia, l'Enciclopedia libera,* alla pagina web

  https : //fr.wikipedia.org/wiki/Jean_de_Séville

- Per una biografia di al-Karaji si veda *Il giardino di Archimede, un museo per la matematica*, alla pagina web

  https : //php.math.unifi.it/archimede/archimede/fibonacci/catalogo/roero.php

- Per una biografia di al-Kashi si veda *MacTutor History of Mathematics archive*, alla pagina web

  http : //www−groups.dcs.st−and.ac.uk/history/Biographies/Al−Kashi.html

- Per un approfondimento sul sistema monetario nel mondo arabo si veda *Nascita ed evoluzione delle monete*, alla pagina web

  https : //www.cambiovarallo.it/storia − 2.htm