Facoltà di Matematica

Corso di Laurea Magistrale

LA TEORIA DELLE PARALLELE NELLA MATEMATICA ARABA

Tesina per il corso di

Divulgazione e Museologia della Matematica

DOCENTE

Prof.ssa Alessandra Fiocca

STUDENTE

Marinella Orlando

ANNO ACCADEMICO 2016/2017

Sommario

1. La matematica nella cultura araba

La cultura araba ha contribuito allo sviluppo della matematica in maniera consistente. Se i greci furono i primi protagonisti dello sviluppo delle scienze matematiche, fisiche e naturali non sono da sottovalutare gli sviluppi ottenuti dai matematici arabi vissuti tra l'VIII e il XV secolo. Inoltre alcuni testi greci, andati perduti nella lingua originale, sono arrivati fino a noi grazie alle versioni arabe.

Opinione ampiamente diffusa è che la tradizione matematica, dopo aver vissuto un periodo brillante per mano dei greci che gettarono le basi per la matematica moderna, attraversò un periodo di stasi prima che gli europei, all'inizio del XVI secolo, si dedicassero a nuovi studi e approfondimenti.

La percezione comune in merito al periodo che separa il mondo degli antichi greci dal Rinascimento europeo (che va dalla caduta dell'Impero Romano d'Occidente [476 d.C.] a quella dell'Impero Romano d'Oriente [1453 d.C.]), è che poco sia accaduto nel mondo della scienza matematica in quel millennio, tranne alcune traduzioni dei testi greci: sembra che gli arabi abbiano semplicemente "conservato" la cultura greca in modo che fosse a disposizione degli europei.

Ma, invece, molte delle teorie che si attribuiscono a matematici europei dei secoli XVI, XVII e XVIII è ormai noto che siano state sviluppate da matematici islamici già diversi secoli prima del Rinascimento, periodo in cui in occidente si registra il picco massimo del progresso scientifico. E in effetti, per molti aspetti, la matematica che si studia oggi è più vicina nello stile a quella degli arabi che non a quella dei greci.

1.1. La prima Università araba: la "*Casa del Sapere*" a Bagdad

Tracce di rilevanza storica attestano che quando regnava il califfo Harun al-Rashid (766 – 809), il quinto califfo della dinastia abbaside, il cui regno iniziò nel 786, furono assegnate delle borse di studio per promuovere le prime traduzioni dei testi greci in arabo. All'interesse dimostrato dal re Harun e da suo figlio, il califfo Al-Ma'mun, si devono la promozione e l'apprendimento nel mondo arabo delle scienze e del sapere.

Al-Ma'mun (786 - 833), infatti negli anni in cui regnò investì molte risorse per fondare (verso l'830) una vera e propria scuola, la "*Casa del Sapere*" nella città di Baghdad (Fig. 1), dotata di una ricchissima biblioteca, paragonabile a quella del museo di Alessandria, nella quale dimorano studiosi, scienziati e molti traduttori. Si racconta che il califfo, in seguito ad un sogno in cui gli era apparso Aristotele, invia una missione all'imperatore di Bisanzio con l'incarico di portargli i manoscritti greci conservati nei monasteri.

La novità introdotta dalla "*Casa del Sapere*" non era peraltro solo quella di costituire la più grande biblioteca del mondo arabo-islamico con opere in lingua greca, siriaca, ebraica, copta, medio-persiana e sanscrita (in un'epoca in cui le più accreditate biblioteche cristiane-latine non giungevano neppure al migliaio di esemplari), ma anche quella di offrire servizio come Università pubblica dove svolgere corsi d'istruzione superiore e, nel caso della disciplina medica, di far funzionare un ospedale cui avevano libero e gratuito accesso tutti i malati, di ogni sesso e razza.

Figura 1 - Cortile interno della *"Casa del Sapere*" (Bagdad)

Molti degli scienziati arabi di quell'epoca entreranno in contatto con questo centro culturale e proprio qui approfondiranno gli studi e le loro conoscenze.

Tra i più famosi citiamo:

- Al-Khwārizmī (780 - 850 ca.): le sue opere ebbero grande influsso sull'Europa medioevale. Dal suo nome deriva il termine moderno di algoritmo mentre dall'inizio del titolo di una sua opera (che di per sé significa "diversità") è stato introdotto il termine "algebra". Fu noto col nome di Algorizmi nell'Occidente latino.
- Al-Kindī (801 - 873): introdusse la filosofia greca nel mondo arabo, fu pioniere della crittografia e dell'uso della musica in medicina (musicoterapia), noto in Europa come Alchindus o Alkindus.
- I fratelli Banū Mūsā – Ja'far Muhammad ibn Mūsā ibn Shākir (800 - 873 ca.), Ahmad ibn Mūsā ibn Shākir (805 - 873) e Al-Hasan ibn Mūsā ibn Shākir (più giovane dei fratelli, ma del quale non si hanno riferimenti precisi circa la nascita e la morte): matematici e ingegneri, furono tra i primi a spingere oltre i risultati classici della matematica greca e porre le basi della matematica araba e persiana.
- Ḥunayn ibn Isḥāq (704 - 761 ca.): medico, cristiano nestoriano, conosciuto nel mondo arabo come il "grande traduttore" e in Europa come Johannitius. Tradusse in arabo gli Elementi di Euclide.
- Thābit ibn Qurrā (830 - 901): conosciuto in Europa come Thebit, matematico e astronomo, fu uno dei primi riformatori del Sistema Tolemaico. In meccanica è considerato il fondatore della statica. Scrisse in arabo e siriaco, si occupò di teoria dei numeri e di geometria nella tradizione greca. Approfondì lo studio dei quadrati magici proprio della tradizione matematica cinese.
- Al-Rāzī (865 - 925): medico, chimico/alchimista e filosofo, di origine persiana, fu il primo a descrivere il vaiolo e l'asma allergica. Fu noto in Europa come Rhazes.

- Abū Bishr Mattā ibn Yūnus (m. 940 ca.): traduttore dal siriaco all'arabo, maestro di Al-Fārābī (870 - 950 ca.), noto questi come Abunaser o Alpharabius.

Non ci meraviglia che uno tra i più famosi sapienti arabi, riconosciuto e rispettato già nella sua stessa epoca, Omar Khayyâm (1048 - 1131), sia fonte di ispirazione ancora oggi per qualche autore contemporaneo: Francesco Guccini, infatti, lo menziona, nella sua canzone "Via Paolo Fabbri, 43", e Fabrizio De Andrè ne cita qualche verso in "Dormono sulla collina".

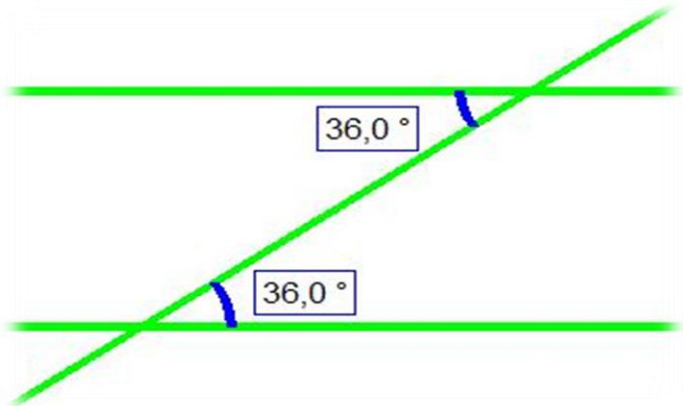
In realtà Khayyâm scriveva poesie solo per diletto, nel tempo libero che riusciva a ritagliarsi tra le lezioni di algebra e geometria del mattino, il lavoro di filosofo e consigliere alla corte del sultano Malik-Shah al pomeriggio e le osservazioni astronomiche notturne. I successi maggiori li aveva ottenuti nel campo della matematica e dell'astronomia e, prima dei venticinque anni, Khayyâm aveva già scritto manuali di algebra, aritmetica e musica, mostrando un genio innato. A lui si deve una teoria sistematica e generale delle equazioni cubiche (quelle cioè di terzo grado).

Dall'algebra di Al-Khwārizmī, all'ottica del fisico ibn Sahl (ca. 940 - 1000), alla medicina di ibn al-Nafis (1213 - 1288), quindi, troviamo molte testimonianze documentate di esponenti di spicco tra gli arabi in innumerevoli settori delle scienze scoprendo, forse con stupore e allo stesso tempo entusiasmo, quanto la cultura araba abbia influenzato da sempre quella occidentale.

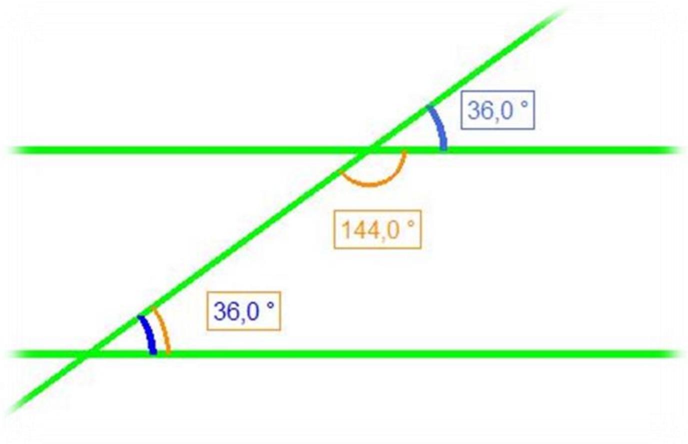
2. La teoria delle parallele

Ritroviamo la "teoria delle parallele" nel Libro I degli "*Elementi*" di Euclide ed è la teoria fondamentale quando si parla di geometria euclidea. Infatti, se volessimo sintetizzare il contenuto di questo libro, potremmo affermare che i ragionamenti di Euclide convergono ad un risultato, caratteristico proprio della geometria euclidea: "**la somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a due angoli retti**". Tale affermazione è, appunto, fondata sulla teoria delle parallele, ovvero su quelle proposizioni presentate e dimostrate da Euclide nel Libro I degli "*Elementi*" che conducono i suoi ragionamenti ad una simile conclusione.
Ci si riferisce principalmente alle proposizioni 27, 28 e 29. Con particolare interesse si guarda alla proposizione 29, la quale ingloba in sé una "questione aperta" che nel corso dei secoli ha coinvolto tanti matematici studiosi di geometria: nel dimostrare questa proposizione, infatti, Euclide per la prima volta farà ricorso all'ultimo postulato presentato nell'opera, il famoso postulato V, conosciuto appunto come "postulato delle parallele" perché alla base di questa discussa teoria.

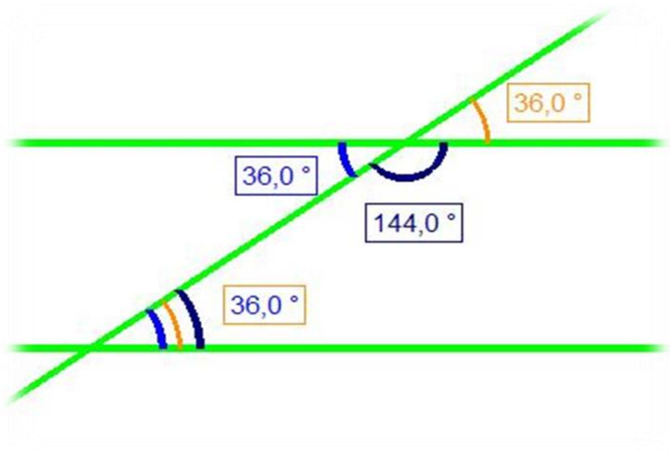
Prop I, 27: *Se una retta che venga a cadere su altre due rette forma gli angoli alterni interni uguali tra loro, le due rette saranno tra loro parallele.*



<u>Prop I, 28</u>: *Se una retta che cade su due rette forma l'angolo esterno uguale all'angolo interno ed opposto e che è dalla stessa parte, oppure angoli interni, dalla stessa parte, la cui somma sia uguale a due retti, le rette saranno parallele fra loro.*



<u>Prop I, 29</u>: *Una retta che cada su rette parallele forma gli angoli alterni uguali tra loro, l'angolo esterno uguale all'angolo interno ed opposto, ed angoli interni dalla stessa parte la cui somma è uguale a due retti.*



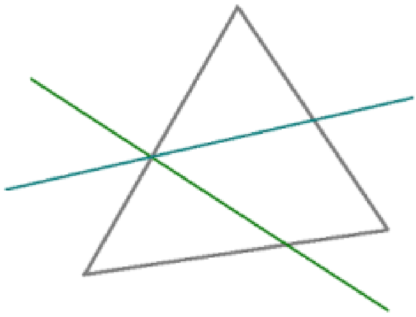
Per affrontare lo studio della teoria delle parallele è utile tener presente anche due assiomi, fondamentali per la geometria, che sono coinvolti nei ragionamenti e ai quali i "geometri" ricorrono spesso nel corso delle dimostrazioni, quello di Eudosso-Archimede (IV-III sec. a.C.) e quello di Pasch (1843-1930).

❖ **ASSIOMA DI EUDOSSO (ARCHIMEDE)**

Dati due segmenti a e b, con a<b, esiste un multiplo di a che supera b. (Dati due segmenti a e b, con a<b, se da b si toglie la sua metà, dalla residua si toglie la metà e così via, dopo un numero finito di operazioni si deve giungere ad una parte residua più piccola di a).

❖ **ASSIOMA DI PASCH**

Se una retta interseca il lato di un triangolo, allora ne interseca anche uno degli altri due, a meno che non passi dal vertice comune a questi due lati.



2.1 Gli Elementi di Euclide

Il Libro degli "*Elementi*" di Euclide, che risale al IV-III secolo a.C., è da considerarsi un pilastro per i matematici: per più di due millenni, infatti, ha rappresentato una sorta di "enciclopedia" al centro della cultura e dello sviluppo della matematica sia in Occidente che in Oriente. La versione più antica che ci giunge è in lingua araba (Fig. 2).

Costituita da 13 Libri, quest'opera fu composta ad Alessandria e affronta lo studio di diversi settori specifici della matematica, inglobando i risultati scientifici di cui si era a conoscenza a quei tempi: geometria piana, teoria delle proporzioni, aritmetica, teoria degli irrazionali, geometria solida. In essa, tra l'altro, si riscontra la prima sistemazione assiomatica mai data ad una branca della matematica, la geometria.

Proprio alla geometria sono dedicati i primi libri dell'opera: qui in particolare ci soffermiamo sul Libro I poiché è in questo libro che viene presentata la teoria delle parallele, come abbiamo illustrato nel paragrafo precedente.

Il Libro I degli "*Elementi*" si apre con tre serie di princìpi, che costituiscono una specie di introduzione generale a tutta l'opera:

- le *Definizioni* – 23 in tutto – che presentano gli enti geometrici elementari: il punto e la linea . Seguono poi le nozioni di retta, superficie, angolo, figura, cerchio, triangolo, quadrilatero e parallelismo tra rette;
- i *Postulati* – che sono 5 – contenenti le proprietà fondamentali del punto, delle rette e del cerchio;
- le *Nozioni comuni* – 8 enunciati – che esprimono principi elementari sul confronto tra le aree.

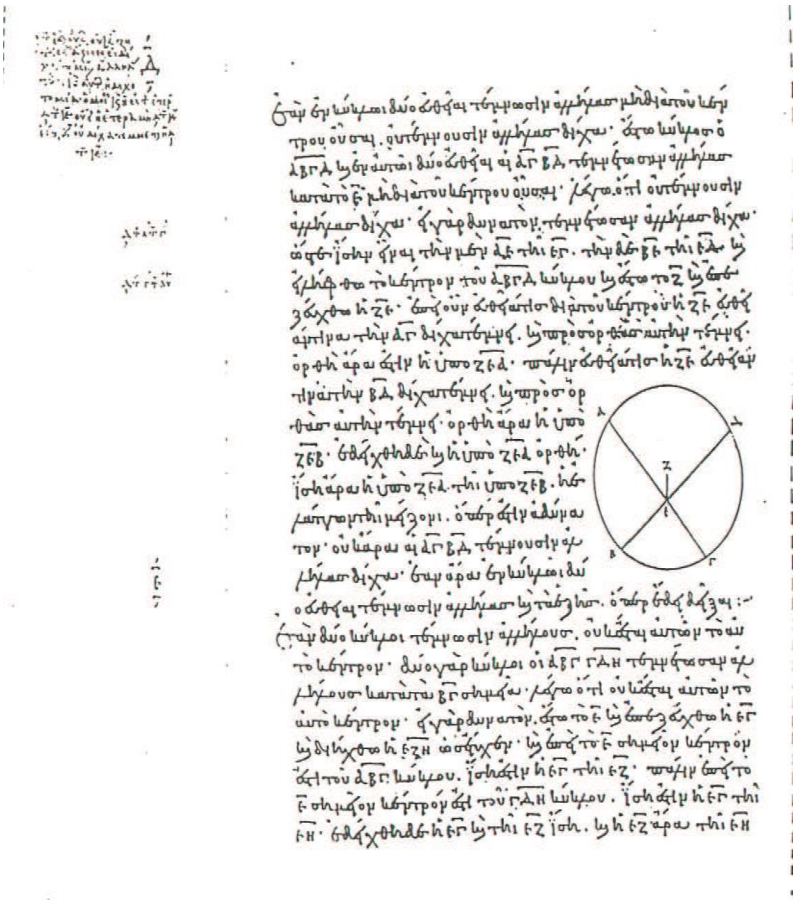


Figura 2 - Il più antico esemplare degli "*Elementi*"
(trascrizione araba)
Ms. d'Orville 301, Oxford, Bodleian Library (888 d.C.)

DEFINIZIONI

I. *Punto è ciò che non ha parti.*

II. *Linea è lunghezza senza larghezza.*

III. *Estremi di una linea sono punti.*

IV. *Linea retta è quella che giace ugualmente rispetto ai punti su essa (cioè, ai suoi punti).*

V. *Superficie è ciò che ha soltanto lunghezza e larghezza.*

VI. *Estremi di una superficie sono linee.*

VII. *Superficie piana è quella che giace ugualmente rispetto alle rette su essa (cioè, alle sue rette).*

VIII. *Angolo piano è l'inclinazione reciproca di due linee su un piano, le quali si incontrino fra loro e non giacciano in linea retta.*

IX. *Quando le linee che comprendono l'angolo sono rette l'angolo si chiama rettilineo.*

X. *Quando una retta innalzata su una [altra] retta forma gli angoli adiacenti uguali fra loro, ciascuno dei due angoli uguali è retto, e la retta innalzata si chiama perpendicolare a quella su cui è innalzata.*

XI. *Angolo ottuso è quello maggiore di un retto.*

XII. *Angolo acuto è quello minore di un retto.*

XIII. *Termine è ciò che è estremo di qualche cosa.*

XIV. *Figura è ciò che è compreso da uno o più termini.*

XV. *Cerchio è una figura piana compresa da un'unica linea [che si chiama circonferenza] tale che tutte le rette, le quali cadano sulla [stessa] linea [cioè sulla circonferenza del cerchio], a partire da un punto fra quelli che giacciono internamente alla figura, sono uguali fra loro.*

XVI. *Quel punto si chiama centro del cerchio.*

XVII. *Diametro del cerchio è una retta condotta per il centro e terminata da ambedue le parti dalla circonferenza del cerchio, la quale retta taglia anche il cerchio per metà.*

XVIII. *Semicerchio è la figura compresa dal diametro e dalla circonferenza da esso tagliata. E centro del semicerchio è quello stesso che è anche centro del cerchio.*

XIX. *Figure rettilinee sono quelle comprese da rette, vale a dire: figure trilatere quelle comprese da tre rette, quadrilatere quelle comprese da quattro rette, e multilatere quelle comprese da più di quattro rette.*

XX. *Delle figure trilatere, è triangolo equilatero quello che ha i tre lati uguali, isoscele quello che ha soltanto due lati uguali, e scaleno quello che ha i tre lati disuguali.*

XXI. *Infine, delle figure trilatere, è triangolo rettangolo quello che ha un angolo retto, ottusangolo quello che ha un angolo ottuso, ed acutangolo quello che ha i tre angoli acuti.*

XXII. *Delle figure quadrilatere, è quadrato quella che è insieme equilatera ed ha gli angoli retti, rettangolo quella che ha gli angoli retti, ma non è equilatera, rombo quella che è equilatera, ma non ha gli angoli retti, romboide quella che ha i lati e gli angoli opposti uguali fra loro, ma non è equilatera né ha gli angoli retti. E le figure quadrilatere oltre a queste si chiamino trapezi.*

XXIII. *Parallele sono quelle rette che, essendo nello stesso piano e venendo prolungate illimitatamente dall'una e dall'altra parte, non si incontrano fra loro da nessuna delle due parti.*

POSTULATI

Risulti postulato:

I. *che si possa condurre una linea retta da un qualsiasi punto ad ogni altro punto;*

II. *e che una retta terminata (cioè finita) si possa prolungare continuamente in linea retta;*

III. *e che si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro ed ogni distanza (ovvero qualunque raggio);*

IV. *e che tutti gli angoli retti siano uguali fra loro;*

V. *e che, se una retta venendo a cadere su due rette forma gli angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti (cioè tali che la loro somma sia minore di due retti), le due rette prolungate illimitatamente verranno ad incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti (cioè dove la cui somma è minore di due retti).*

NOZIONI COMUNI

I. *Cose che sono uguali ad una stessa sono uguali anche fra loro.*

II. *E se cose uguali sono addizionate a cose uguali, le totalità sono uguali.*

III. *E se da cose uguali sono sottratte cose uguali, i resti sono uguali.*

VII. *E cose che coincidono fra loro sono fra loro uguali.*

VIII. *Ed il tutto è maggiore della parte.*

IV. *[E se cose uguali sono addizionate a cose disuguali, le totalità sono disuguali.]*

V. *[E doppi di una stessa cosa sono uguali fra loro.]*

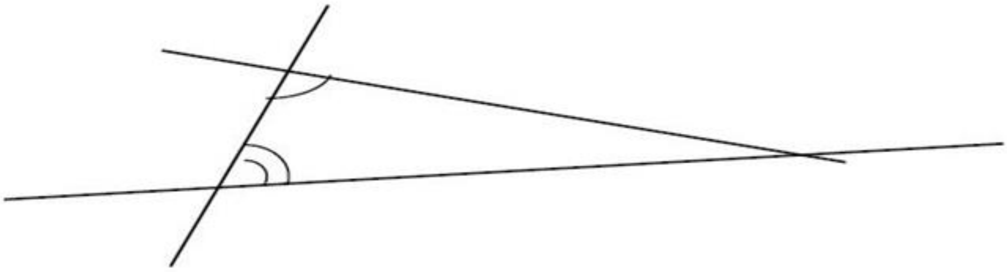
VI. *[E metà di una stessa cosa sono uguali fra loro].*

Successivamente vengono presentate 48 ***Proposizioni*** che rappresentano i primi teoremi della geometria piana. Euclide si avvale sempre dei risultati raggiunti in precedenza per giustificare ciascuna delle sue affermazioni, facendo esplicitamente riferimento, nel corso della trattazione, ai risultati già dimostrati. Questo modo di procedere viene chiamato "metodo deduttivo".

Interessante è notare che fino alla proposizione 28 l'autore non fa uso del V postulato (che, ricordiamo, è noto anche come "*postulato delle parallele*"), nonostante per alcune delle proposizioni precedenti la dimostrazione sarebbe stata più semplice e immediata con l'introduzione di esso. Conseguenza di questo espediente è che le prime 28 proposizioni fanno parte della cosiddetta "**geometria assoluta**", ovvero quella geometria che prescinde dal V postulato.
A partire dalla proposizione 29, invece, tutti i teoremi successivi (ad eccezione del 31) dipendono da esso: questo fa sospettare che Euclide abbia cercato di differire l'uso del V postulato il più a lungo possibile, ricorrendo al suo utilizzo solo quando strettamente necessario. Si direbbe, dunque, che abbia voluto ottenere il maggior numero possibile di proposizioni senza utilizzare il V postulato. Per spiegare questo modo di procedere potremmo ipotizzare che Euclide abbia cercato di dimostrare il V postulato partendo dai primi quattro per ottenerlo come teorema ma, non giungendo alla sua dimostrazione, si trovò costretto ad inserirlo fra i postulati.

Questo postulato presenta diversi aspetti che risultano "problematici" agli occhi degli studiosi: cerchiamo di presentare e spiegare i dubbi sollevati.
A differenza degli altri, enunciati come affermazioni, il quinto postulato è del tipo *"se...allora"*, quindi come struttura più simile ad un teorema che non ad un asserto. Da questa osservazione probabilmente nacque l'esigenza di dover "dimostrare" il quinto postulato.

Il postulato V non si presenta semplice ed evidente come i quattro precedenti, inoltre il suo enunciato è la proposizione inversa della proposizione I,28 che Euclide dimostra. Già i più antichi commentatori del testo euclideo avevano tentato di dimostrarlo: Posidonio e Gemino (I sec a.C.), Tolomeo (87-165 d.C.), Proclo (V sec. d.C.), Simplicio e Aganis (VI sec. d.C.).



Anche in epoca più moderna, molti matematici si addentrarono nella dimostrazione, pur essendo consapevoli di quanto questa "questione" fosse spinosa: Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855), professore all'Università di Göttingen, per esempio, non ritenne di doversi esporre e non pubblicò mai i suoi risultati in merito, per evitare, come egli stesso disse, «le strida dei beoti». Peggio ancora andò all'ungherese Janos Bolyai (1802 - 1860), figlio di Farkas Bolyai (1775 - 1856) il quale a sua volta aveva scritto sulla teoria delle parallele. Farkas così dissuadeva il figlio, brillante ufficiale dell'esercito, dall'occuparsene: «Per amor del cielo, ti imploro di desistere dal tentativo. Il problema delle parallele è una cosa da temere non meno delle passioni dei sensi, poiché anch'esso può rubarti tutto il tempo, e privarti della salute, della serenità di spirito, e della felicità».

La sfida consisteva nel dimostrare il V postulato a partire dagli assiomi e dagli altri postulati. Ma, come fu provato successivamente, il problema era impossibile, poiché il postulato V non è conseguenza dei precedenti, è cioè indipendente da essi.

I commentatori del testo euclideo discussero in prima analisi la **definizione di parallelismo** di due rette data da Euclide: seguendo la sua

impostazione realizzarono che questa condizione non può essere verificata se non attraverso un prolungamento all'infinito; peraltro la definizione di Euclide si presenta in forma grammaticale negativa, considerata "difettosa". Per questi motivi molti autori, antichi e moderni, ritennero opportuno sostituirla con un'altra, espressa in positivo e che non facesse ricorso all'infinito: quella di rette equidistanti. In realtà, la difficoltà così viene solo spostata, poiché a questo punto bisogna dimostrare che *il luogo dei punti equidistanti da una retta è ancora una retta*, ma verrà dimostrato che questa proposizione è di fatto equivalente al postulato V.
Questo procedimento condusse ad una serie di "dimostrazioni" del postulato V che, nella maggior parte dei casi, consistevano nell'ammettere, tacitamente o esplicitamente, al posto del postulato V una proposizione (ritenuta più evidente) ad esso equivalente. Riportiamo le più utilizzate.
Molti furono i matematici che si cimentarono in questa "dimostrazione". Di seguito elenchiamo i principali: come si può osservare compaiono anche diversi autori arabi.

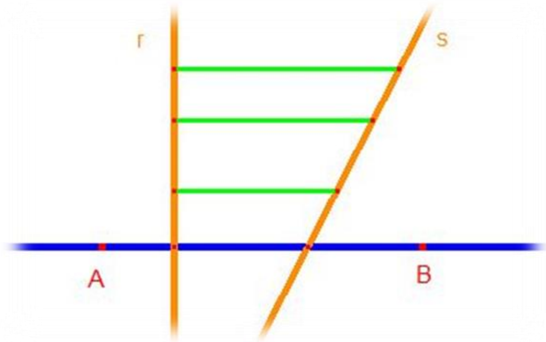
- Posidonio (I sec. a.C.)
- Tolomeo (87-165 d.C.)
- Gemino (I sec. a.C.)
- Proclo (V sec. d.C.)
- Aganis (VI sec. d.C.)
- Simplicio (VI sec. d.C.)
- Al-Jawhari (800 ca.-860 d.C.)
- Qurra (826-901 d.C.)
- Al-Haytham (965-1039 d.C.)
- Al-Khayyam (1045 ca.-1125)
- Nasir ad-Din at-Tusi (1201-1274)

- Al-Maghribi (1130 ca.-1180 ca.)
- Samarkandi (1250 ca.-1310 ca.)
- Leon de Bagnols (Gersonide) (1288-1344)
- Cristoforo Clavio (1537 ca-1612)
- Pietro Antonio Cataldi (1552-1626)
- Giovanni Alfonso Borelli (1608-1679)
- Vitale Giordano da Bitonto (1633-1711)
- André Tacquet (1616-1669)
- John Wallis (1616-1703)
- Gerolamo Saccheri (1667-1733)
- Johann Heinrich Lambert (1728-1777)
- Joseph Louis Lagrange (1736-1813)
- Adrien Marie Legendre (1752-1833)
- Carl Friedrich Gauss (1777-1855)
- Nikolai Ivanovic Lobacevskij (1793-1853)
- Janos Bolyai (1802-1860)

PROPOSIZIONI EQUIVALENTI AL POSTULATO V

- Per un punto esterno ad una retta passa una sola parallela ad una retta data. [Haytham, Playfair]
- Due rette parallele ad una terza sono parallele tra loro.
- Se una retta incontra una di due parallele incontra anche l'altra. [Proclo]
- Gli angoli coniugati formati da due parallele con una trasversale sono supplementari. [Tolomeo]
- Due rette parallele sono equidistanti.
- Il luogo dei punti equidistanti da una retta è una retta.
- Dato un triangolo si può sempre costruire un triangolo simile di grandezza arbitraria. [Wallis]

- Per tre punti non allineati passa sempre una sfera. [Bolyai]
- Per un punto situato fra i lati di un angolo passa sempre una retta che interseca i due lati dell'angolo. [Legendre, Lorenz]
- La somma degli angoli di un triangolo è uguale a due angoli retti. [Saccheri]
- Se due rette 'r' e 's' sono l'una perpendicolare e l'altra obliqua alla trasversale AB, i segmenti di perpendicolare calati dai punti di 's' su 'r' sono minori di AB, dalla parte in cui AB forma con 's' un angolo acuto. [Tusi]



2.2. Critica al V postulato dei matematici arabi

I matematici islamici hanno seguito le orme dei predecessori greci nella critica al postulato V di Euclide: lo testimonia un commento di Simplicio al Libro I degli "*Elementi*" che ci è giunto in una traduzione in arabo (l'originale in greco è andato perso). A partire da questo testo di Simplicio i matematici arabi elaborano le loro teorie nel IX-X secolo d.C.

In seguito viene presentato il lavoro di alcuni tra i principali matematici arabi che si sono occupati della teoria delle parallele. Sarà evidenziato come ciascuno di essi pone l'accento su alcuni aspetti di questa discussa teoria e quali risultati vengono teorizzati dalla tradizione matematica araba circa il V postulato euclideo e la teoria delle parallele.

2.2.1. AL-ABBAS ibn SAID AL JAWHARI (ca. 800 - 860 d.C.)

I primi lavori di cui siamo venuti a conoscenza circa la teoria delle parallele elaborata da matematici arabi sono quelli di un autore contemporaneo e collaboratore di Al-Khwarizmi: Al Jawhari, astronomo e matematico originario di Farab (oggi Otrar, nel Repubblica Sovietica del Kazakistan), che ha scritto un commentario al libro di Euclide: "*La rettifica del Libro degli Elementi*" (*Islah kitab al-Usul*). Conosciamo parte di questa opera grazie ad un'esposizione che ne fece Nasir ad Din at Tusi.

Al-Jawhari propone una dimostrazione del quinto postulato nella quale ammette implicitamente che **se gli angoli alterni determinati da una retta qualunque che taglia due altre rette sono uguali, ogni altra retta che taglierà queste due rette determinerà ugualmente degli angoli uguali**. Al-Jawhari fa intervenire questo "postulato implicito" nella sua prima proposizione, secondo la quale **tali due rette non si tagliano e sono equidistanti**.

Seguendo il suo ragionamento, Al-Jawhari deduce che **la mediana di un triangolo (rettangolo) è uguale alla metà della base** e che **si può, per ogni punto posto all'interno di un angolo, condurre una retta che taglia i due lati dell'angolo** (di là ne fa conseguire allora il V postulato).

Questa seconda proposizione costituisce la teoria sulle parallele di Al-Jawhari e, pur se enunciata in maniera diversa, risulta confermare il postulato che si ritrova negli "*Elementi*".

È sull'ipotesi degli angoli alterni, ammessa implicitamente in questa proposizione, che giace la famosa "prova" del V postulato di Euclide che proporrà, circa mille anni dopo, Adrien-Marie Legendre (1752 - 1833).

2.2.2. ABU-L'ABBAS AL-FADL ibn HATIM AN-NAYRIZI (865 - 922 d.C.)

Abu-l'Abbas al-Fadl ibn Hatim an-Nayrizi, originario di Nayrizi, vicino a Chiraz, vissuto a Baghdad sotto il regno del califfo al-Mu'tadid (892 - 903), si occupò di astronomia e di matematica, redasse un'opera sull'astrolabio sferico e anche sulla determinazione della direzione della Qibla [1]. Egli commenta le opere di Tolomeo e di Euclide: ci sono pervenuti i suoi commentari dei libri I e VI degli "*Elementi*" scritti in lingua araba.

Nel 900, An-Nayrizi riserva alla teoria delle parallele una parte importante dei suoi commenti degli "*Elementi*". An-Nayrizi fa riferimento al filosofo greco Simplicio, vissuto nella prima metà del VI secolo. È molto probabile che sia Simplicio che An-Nayrizi conoscessero la teoria delle parallele di Aganis, un contemporaneo del filosofo greco, di cui quest'ultimo ha esposto in dettaglio la teoria.

Nella definizione delle parallele data da Aganis, **le rette parallele sono due rette che, situate in uno stesso piano, restano equidistanti allorché le si prolunghi arbitrariamente**. Questa affermazione occupa una posizione centrale nella teoria delle parallele di Aganis. Per **distanza fra due rette** Aganis intende, così come An-Nayrizi, **la distanza più corta tra un punto di una retta e l'altra retta**.

La definizione di Aganis è equivalente al V postulato di Euclide. Questa definizione non era nuova. Infatti, da una testimonianza di Proclo sappiamo che anche Posidonio (I sec. a.C.) aveva dato una definizione simile delle parallele. Per Posidonio, **le parallele sono delle rette che, giacenti in uno stesso piano, non si avvicinano né si allontanano l'una dall'altra**; così le perpendicolari

---

[1] Col termine arabo *Qibla* (in arabo: قبلة) si indica la direzione della città della Mecca e del principale santuario islamico della Kaʿba, cui deve rivolgere il proprio viso ogni devoto musulmano impegnato nella preghiera.

condotte da un qualsiasi punto di una di esse sull'altra risultano avere tutte la stessa lunghezza.
An-Nayrizi dimostra in seguito le differenti proposizioni enunciate da Aganis:
1. la distanza tra due parallele è determinata dal segmento perpendicolare alle due rette;
2. due rette perpendicolari a una terza sono parallele fra loro;
3. la somma degli angoli interni situati dallo stesso lato di una retta che taglia due rette parallele è uguale a due retti.

L'ultima proposizione è identica alla proposizione 29 del libro I degli "*Elementi*", che è la prima che Euclide dimostra avvalendosi del suo famoso V postulato.
Nel corso della sua dimostrazione, che si basa sull'esistenza di rette equidistanti, Aganis aveva stabilito anche l'esistenza del rettangolo.

Inoltre, nella proposizione 35, Nayrizi arriva proprio a dimostrare il V postulato: viene data una costruzione del punto di intersezione delle rette considerate in questo postulato. Tale costruzione implica che dividendo in due parti uguali, per un numero sufficiente di volte, uno dei due segmenti di retta dati, si ottiene un segmento che è più piccolo del più piccolo dei due. Tale proposizione è equivalente all'assioma di Eudosso-Archimede.

Le idee espresse nel commentario di An-Nayrizi sono state, poco tempo dopo, più ampiamente sviluppate. La definizione delle parallele data da Posidonio e Aganis rivestirà un'importanza particolare anche per altri studiosi di geometria arabi, tra i quali ad esempio Al-Haytam.

2.2.3. THABIT ibn QURRA (826 - 901)

Fra la teoria delle parallele di Al-Jawhari e quella dei matematici del X secolo e dei secoli successivi, oltre al già citato commentario di An-Nayrizi, due opere di Thabit ibn Qurra segnano lo sviluppo di questa teoria e meritano di essere menzionate:

1) "*Il libro sulla dimostrazione del celebre postulato di Euclide*" (*Magala fi burhan al-musadara al-mashura min Uglidis*);
2) "*Il libro mostrante che due rette condotte secondo due angoli che sono più piccoli di due retti si incontrano*" (*Magala fi anna al-hattayn ida'uhriga'ala agall min zawiyatayn qa'imatayn iltaqaya*).

Queste due prove di dimostrazione del quinto postulato di Euclide sono totalmente differenti tra loro. Si ignora quale sia la cronologia della loro stesura e pubblicazione.

Nella prima di queste due opere Qurra rimane molto vicino ad Al-Jawhari. La sua prima proposizione è simile in fondo alla prima proposizione del suo predecessore: **due rette non si avvicinano né si allontanano l'una dall'altra in una qualsiasi delle due direzioni mentre queste sono tagliate da una terza che forma con esse angoli alterni uguali**. Il termine "*parallela*" non viene utilizzato in questo enunciato.

Qurra dimostra successivamente come tali rette si avvicinino da un lato della secante se si avvicinano anche dall'altro lato di questa secante, cosa che egli considerava impossibile per il fatto che due rette tagliate da una terza devono allontanarsi tra loro da un lato se esse si avvicinano dall'altro lato.

Questa ultima proposizione è una proposizione della *geometria assoluta*.

Più avanti nel testo, Qurra dirà semplicemente: "*Si dimostrerà nella stessa maniera che esse non possono allontanarsi l'una dall'altra*". Così si trova definita una proposizione equivalente al quinto postulato, la seconda proposizione di Qurra: **considerando una retta che taglia altre due rette, queste risultano allontanarsi da un lato della retta secante se si avvicinano ad essa dall'altro lato**. Nella proposizione III, egli dimostra l'esistenza del parallelogramma e ne deduce la proposizione sulla mediana di un triangolo (che corrisponde alla proposizione II di Al-Jawhari). Infine egli dimostra il V postulato facendo ricorso all'assioma di Eudosso-Archimede.

Nella sua seconda opera, Qurra affronta la questione da un punto di vista del tutto differente. Evidenzia in primo luogo, in modo molto dettagliato, la necessità di introdurre il ***concetto di movimento*** nelle dimostrazioni geometriche: questa idea forse gli è suggerita dall'approccio utilizzato da Archimede nelle sue opere, che Qurra conosceva alla perfezione, e probabilmente anche dal fatto che egli si era contemporaneamente dedicato allo studio della meccanica.

Quindi stabilisce che **un punto arbitrario di un corpo che si muove rigidamente di un movimento semplice, in una direzione qualunque, descrive nella direzione di questo movimento una linea dritta**. Questo movimento semplice è evidentemente il *moto rettilineo uniforme*. È su questo fondamento cinematico che risiede, nella proposizione IV, la prova dell'esistenza del rettangolo. Nella proposizione VII, egli dimostra il V postulato di nuovo grazie all'utilizzo dell'assioma di Eudosso-Archimede.

Segnaliamo inoltre che Qurra dimostra nella sua proposizione seconda che **se un quadrilatero ha due angoli consecutivi uguali e sono uguali anche i due lati adiacenti a questi angoli, gli altri due angoli risultano uguali**.

La definizione del quadrilatero data in questo modo, se si considerano retti i due angoli di partenza, è esattamente la figura geometrica che va sotto il nome di "*quadrilatero birettangolo isoscele*" sulla quale lavoreranno poco più tardi gli arabi Al-Haytham, Al-Hayyam e Tusi, ma anche l'italiano Giovanni Girolamo Saccheri molti secoli dopo (1667 - 1733).

Al-Haytam, che era anche un filosofo, riprenderà chiaramente la linea concettuale della prova cinematica di Qurra, ma senza menzionare mai il suo predecessore.

2.2.4. ABŪ ʿALĪ AL-ḤASAN ibn AL-HAYTAM (ca. 965 - 1039 d.C.)

Al-Haytam (latinizzato come Alhazen), ha dedicato due diversi libri all'analisi dell'opera classica di Euclide: "*Il libro del commentario delle proposizioni non dimostrate del Libro di Euclide sugli Elementi*" (*Kitab sarh musadarat kitab Uqlidis fi-l-'Usul*), nel quale sono esaminati le definizioni, gli assiomi e i postulati, e un'altra opera ulteriore: "*Le risoluzioni dei dubbi sollevati dal libro di Euclide gli Elementi*" (*Fi hall sukuk kitab Uqlidis fi-l-Usul*), nella quale sono commentate le proposizioni del geometra greco.
La teoria delle parallele è trattata specialmente nella prima opera.
Visto che non si può rappresentare una retta prolungata infinitamente, Al-Haytam ritiene necessario prima di tutto fissare il concetto di **parallele**, intese come **due rette che, poste in uno stesso piano, non si tagliano in nessun lato quando le si prolunga**. Ne consegue che bisogna dimostrare sia la possibilità di costruire, in modo generale, una retta infinita, sia l'esistenza di rette parallele. Come sia possibile ottenere una retta infinita lo dimostra costruendo una retta ottenuta da un multiplo arbitrario di un segmento dato, quindi, in realtà, per mezzo dell'assioma di Eudosso-Archimede (anche se egli non lo menziona esplicitamente).
Per dimostrare la possibilità di costruire delle rette parallele, Al-Haytam introduce una nuova definizione di queste rette, definizione che contiene implicitamente il V postulato e fa ricorso al movimento continuo delle figure nella geometria. In un piano, egli considera la perpendicolare ad una retta data, ne fissa la lunghezza mentre lascia il piede della perpendicolare libero di

scivolare lungo questa retta. Traccia così, dall'estremità libera della perpendicolare, una linea che risulta in tutti i punti equidistante dalla retta data. Definisce una simile costruzione "movimento semplice".

Introduce delle considerazioni, un po' vaghe anche se ampiamente sviluppate, su “l'uguaglianza e la similitudine” di tutti i punti della perpendicolare in movimento. Questo gli permette di concludere che tutte le traiettorie descritte nello stesso tempo per tutti i punti della perpendicolare sono congruenti e ne deduce che la linea descritta per l'estremità della perpendicolare è una retta equidistante dalla retta data. Al-Haytam dimostra quindi l’esistenza di rette parallele e trova un modo per costruirle; e in effetti, riflettendoci su, conferma già così il V postulato di Euclide.

Nella sua trattazione, procede poi alla dimostrazione del V postulato. Egli si basa essenzialmente sulla definizione delle parallele appena data e include diversi spunti di grande interesse storico che riprenderanno i suoi successori diretti e indiretti, ivi compresi i geometri del XVIII secolo. Egli considera un quadrilatero ABDC nel quale gli angoli alla base A e B sono retti. Egli fa partire da un punto qualunque C del lato AC la perpendicolare CD su BD, cioè considera un quadrilatero con tre angoli retti (è un quadrilatero simile a quello di cui si servirà Johann Heinrich Lambert (1728 - 1777) per elaborare la sua teoria delle parallele). Al-Haytam ricorre a questa costruzione per dimostrare che il quarto angolo in C è ugualmente retto. A questo scopo, dimostra che il lato adiacente al quarto angolo è uguale al lato opposto AB. In questa dimostrazione utilizza un procedimento che si ritrova spesso studiando la geometria: è il metodo della dimostrazione per assurdo, che conduce a una contraddizione se si prende per

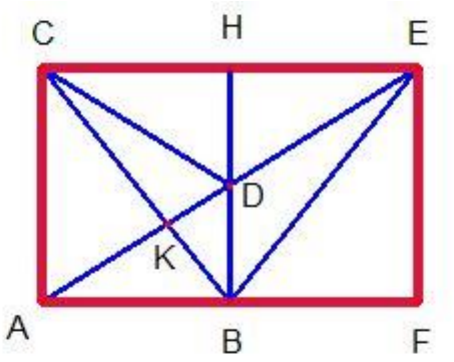


Figura 3 - Dimostrazione di Al-Haytam della proposizione sul quadrilatero con 3 angoli retti ipotesi che AC sia più grande di BD o che AC sia più piccolo di BD. Al-Haytam suppone dapprima che AC sia maggiore di BD (Fig. 3). Prolunga AD fino a un punto E tale che DE=CD. Sul prolungamento di AB, egli abbassa la perpendicolare EF e traccia le rette BC e BE. Egli dimostra in seguito senza difficoltà che FE=AC. Ma, tenuto conto delle ipotesi, EF è allora più grande di DB. Al-Haytam suppone poi che EF, pur restando perpendicolare a FBA, si muove lungo quest'ultima fino a coincidere con CA. Quando F coincide con B, la retta EF si trova in BD e, per l'ipotesi, occupa la posizione di BH. BH è allora più grande di BD. Ciò porta a una contraddizione. In effetti, per sua costruzione, la linea EHC è una retta, come anche la linea EDC. Così, l'ipotesi secondo la quale AC sia più grande di BD non è possibile.

Si dimostra pure che AC non può essere più piccolo di BD.

Bisogna segnalare che il quadrilatero ACEF non è altro che il celebre quadrilatero di Al-Hayyam e di Saccheri (*birettangolo isoscele*).

Dopo aver dimostrato l'uguaglianza dei lati AC e BD, Al-Haytam dimostra facilmente che il quarto angolo del quadrilatero, i cui tre angoli sono retti, è ugualmente retto, cioè egli dimostra l'esistenza di un rettangolo e, per lo stesso motivo, dimostra il V postulato. In merito all'angolo ACD distingue tre casi, esaminandoli separatamente e supponendo l'angolo:

1) retto;

2) acuto;

3) ottuso.

In questa sua stesura, Al-Haytam presenta come evidente una proposizione che, nel 1882, sarà formulata da Moritz Pasch quale assioma importante della planimetria. Si tratta di uno degli "assiomi d'ordine", utilizzando la terminologia di Hilbert (1862 - 1943): **una retta che taglia uno dei lati di un triangolo e non passa per nessuno dei suoi vertici, taglia anche uno degli altri lati**. Tusi utilizzerà più tardi questa proposizione di Al-Haytam.

In conclusione, Al-Haytam, dichiara che il quinto postulato, che a questo punto crede di aver dimostrato, deve essere soppresso dalla lista dei postulati e deve precedere, in quanto teorema, la proposizione 29 del libro I degli "*Elementi*". Tuttavia egli ritiene che nell'opera di Euclide ai primi quattro assiomi converrebbe aggiungere questo: "*due rette non possono delimitare un piano*".

Una delle conseguenze importanti della teoria di Al-Haytam è stata di mettere chiaramente in luce la relazione reciproca che esiste tra il postulato delle parallele e la somma degli angoli di un quadrilatero: se è ammesso il postulato V, allora per ogni quadrilatero la somma degli angoli interni è pari a 4 angoli retti. Negli "*Elementi*" di Euclide questa relazione non era ancora evidente: dal postulato delle parallele risultava che la somma degli angoli di un quadrilatero è uguale a 4 angoli retti ma non era evidenziata la diretta correlazione con l'assunzione di validità del postulato.

Bisogna ancora segnalare che Al-Haytam ha enunciato un'altra proposizione che ha giocato un ruolo importante nello sviluppo della teoria delle parallele: si tratta della proposizione secondo la quale **due rette che si tagliano non possono essere parallele a una stessa retta**. Egli se ne serve nella dimostrazione della proposizione 29 del libro I degli "*Elementi*".

2.2.5. UMAR AL-HAYYAM (1048 - 1131 d.C.)

La teoria delle parallele è stata sviluppata in seguito da Umar al-Hayyam (latinizzato con Omar Khayyam). Nel suo "*Commentario sui postulati problematici del libro d'Euclide*", Al-Hayyam è dapprima in disaccordo con Al-Haytam: seguendo l'esempio di Aristotele e di Euclide, egli si schiera contro l'impiego del movimento in geometria. Al-Haytam aveva invocato, per introdurre la sua definizione delle parallele, l'autorità dello stesso Euclide, che ha definito la sfera come il risultato della rotazione di un semicerchio intorno al suo diametro. Al-Hayyam sostiene, al contrario, che l'autore degli "*Elementi*" sia stato, nella fattispecie, incoerente con se stesso. I libri di geometria solida, fa osservare, contengono delle negligenze che Euclide si è probabilmente permesso perché pensava che il lettore, giunto allo studio di questi libri, doveva avere acquisito in geometria una esperienza sufficiente per permettergli di individuarli. Prova ne è che Euclide non ha definito il cerchio come una figura generata dalla rotazione in un piano di un segmento intorno a una delle sue estremità fissata. Al-Hayyam propone di sostituire il postulato delle parallele con un principio che già Aristotele aveva proposto: **due rette concorrenti (cioè che si avvicinano) si tagliano e non possono allontanarsi l'una dall'altra nella direzione dove esse concorrono**. Tutto il primo libro del suo "*Commentario*" è volto ad affermare il postulato delle parallele a partire da questo principio.

La teoria delle parallele di Al-Hayyam contiene delle debolezze, delle lentezze e qualche inesattezza. Già dall'inizio il suo ragionamento non convince: il “principio” che egli propone, difatti, è composto da due proposizioni, ciascuna equivalente al quinto postulato. E si potrebbe scegliere di ometterne una.
Ma non intendiamo qui fare una critica alle riflessioni di Al-Hayyam, per cui ci soffermeremo su alcuni punti importanti della sua teoria che hanno avuto rilevanza nella storia della matematica.

Al-Hayyam formula dapprima l'assioma di Archimede e l’assioma appena citato sulle rette concorrenti. Egli deduce da questo assioma che **due perpendicolari ad una retta sono equidistanti**. Poi stabilisce otto proposizioni con cui ritiene vada sostituita la proposizione 29 del Libro I degli "*Elementi*". Esamina quindi il "quadrilatero di Saccheri", formato da una retta data AB, dalle perpendicolari uguali tra loro AC e BD condotte dalle estremità di AB e CD (Fig. 4).

Al-Hayyam dimostra, nella proposizione I, che i due angoli superiori di questo quadrilatero sono uguali. Nella proposizione II dimostra che la perpendicolare EG elevata dal centro della base inferiore è anche perpendicolare alla base superiore e la divide in due parti uguali.

La proposizione III di Al-Hayyam è di importanza fondamentale. In questa sono esaminate le tre ipotesi sugli angoli superiori del quadrilatero:

1) gli angoli sono acuti;
2) gli angoli sono ottusi;
3) gli angoli sono retti.

Grazie all'impiego del nuovo postulato delle parallele, le prime due ipotesi conducono a una contraddizione, per cui risultano non ammissibili gli angoli acuti o ottusi. Infatti si prolunga la perpendicolare EG, elevata dalla metà della base inferiore, fino a un punto K tale che GK=EG. Si conduce FH perpendicolare a EK: i punti F e H sono determinati dall'intersezione di FH con i prolungamenti dei lati AC e BD. Così nel quadrilatero CDFH i lati CH e DF risultano uguali.

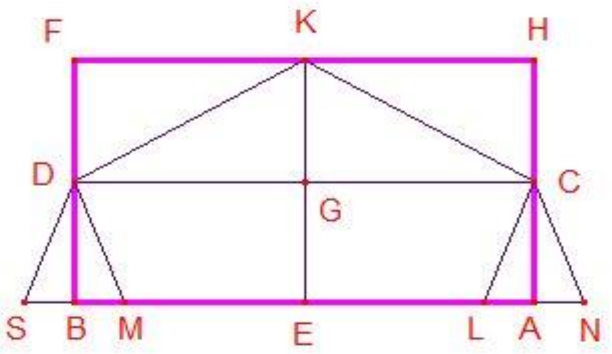


Figura 4 - Dimostrazione della proposizione III di Al-Hayyam

Ribaltiamo la figura intorno alla retta CD. Nell'ipotesi dell'angolo acuto, il segmento HF diviene il segmento SN che è più grande della base inferiore. Al contrario, nell'ipotesi dell'angolo ottuso, HF è trasformato in LM, che è più piccolo della base inferiore. Ma le due perpendicolari alla retta sono equidistanti, dunque è dimostrato, per questo motivo, che solo l'ipotesi dell'angolo retto può essere considerata.

Al-Hayyam espone in seguito un certo numero di proposizioni per dimostrare la sua proposizione VII, identica alla proposizione 29 del Libro I degli "*Elementi*", e la proposizione VIII, contenente il V postulato di Euclide.

Bisogna sottolineare che le spiegazioni date da Al-Hayyam a questo riguardo testimoniano, in più punti, che egli ha ben noto il commentario di Nayrizi: Al-Hayyam cita questo commentario e anche qualche altro tentativo di dimostrazione del quinto postulato.

2.2.6. NASIR AL-DIN AL-TUSI (1201 - 1274)

La tappa successiva, nello sviluppo della teoria delle parallele, è stata raggiunta da Tusi, di cui conosciamo tre opere che trattano questo argomento.

La prima è "*La discussione che dissipa i dubbi relativi alle linee parallele*" (*Ar-risala as-safiya'an as-sakk fi-l-hutut al-mutawaziya*), anteriore al 1251. Le altre sono due redazioni differenti dell'"*Esposto di Euclide*", cioè due edizioni degli "*Elementi*", argomentati e modificati da Tusi.

Nella sua "*Discussione*", Tusi espone in dettaglio, talvolta letteralmente, sebbene ometta certi passaggi essenziali, la teoria delle parallele di Al-Jawhari, di Al-Haytam e di Al-Hayyam. Ogni teoria è sottoposta ad una analisi critica e, così facendo, Tusi sviluppa la propria teoria delle parallele.

Egli si basa ampiamente sulle considerazioni di Al-Hayyam e parzialmente su quelle di Al-Jawhari. Più tardi, egli riprenderà e migliorerà questa teoria nella prima versione dell'"*Esposto di Euclide*" (che sarà pubblicato soltanto nel 1888 a Teheran). La novità che caratterizza questa opera è che Tusi tenta di provare il quinto postulato senza ricorrere ad una ipotesi supplementare. Ma in questo modo egli si serve implicitamente di una proposizione che nella prima versione dell'"*Esposto di Euclide*" sostituiva il quinto postulato.

Il postulato formulato da Tusi si enuncia così: **se due rette situate in un piano si allontanano l'una dall'altra in una direzione data, esse non possono, fintanto che non si tagliano, concorrere nella stessa direzione**.

Tusi ha inserito poi una serie di proposizioni dopo la proposizione 28 del libro I degli "*Elementi*". Egli considera il medesimo *quadrilatero birettangolo isoscele* e la sua proposizione III è identica alla proposizione III di Al-Hayyam. Tuttavia egli confuta in maniera differente l'ipotesi dell'angolo acuto e dell'angolo ottuso.

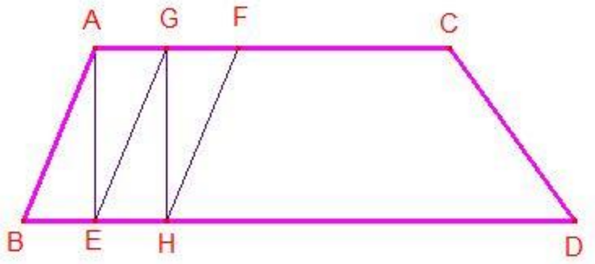


Figura 5 - Dimostrazione della proposizione III di Tusi

Nell'ipotesi dell'angolo ottuso, egli traccia dal vertice A le perpendicolari AE e AC (Fig. 5). Se B è un angolo retto, l'ipotenusa AE del triangolo ABE è più lunga del lato AB. Egli traccia in seguito da E la retta EG perpendicolare a BD. L'ipotenusa EG del triangolo AEG è più lunga di AE. Ripetendo all'infinito questa costruzione, si vede che le basi AC e BD del quadrilatero si allontanano l'una dall'altra nella direzione che va da AB verso CD. Si dimostra allo stesso modo che le rette CA e DB si allontanano nella direzione che va da CD verso AB. Così l'ipotesi dell'angolo ottuso, tenuto conto del postulato sopracitato, porta ad una contraddizione. L'ipotesi dell'angolo acuto è rifiutata allo stesso modo: in questo caso le basi devono concorrere nelle due direzioni opposte.

Dopo aver stabilito che nel quadrilatero considerato tutti gli angoli sono retti, Tusi dimostra nella proposizione V - come aveva fatto Al-Hayyam - la proposizione 29 del libro I degli "*Elementi*".

Tusi formula in seguito due varianti della dimostrazione del V postulato.

Nella prima di queste varianti dimostra che **due rette, che formano con una terza retta l'una un angolo obliquo l'altra un angolo retto, si incontrano** (proposizione sesta). Da ciò deduce il quinto postulato (nella proposizione VII).

Nella seconda variante, egli dimostra che **per un punto situato entro i lati di un angolo si può condurre una retta che taglia i due lati di questo angolo** (proposizione settima) e ne deduce ancora il quinto postulato (questa volta nella proposizione VIII).

Nella seconda versione dell’"*Esposto di Euclide*", Tusi cambia completamente strategia e al postulato della prima versione sostituisce due ipotesi:

1) Siano due rette AB e CD (Fig. 6) tali che le perpendicolari EF, GH, KL abbassate su CD a partire dai punti situati su A generano sempre gli angoli adiacenti diseguali, acuti nella direzione di B e ottusi nella direzione di A. Ciò posto, le due rette AB e CD si avvicinano l'una all'altra fino a che esse si tagliano dal lato degli angoli acuti e si allontanano l'una dall'altra dal lato degli angoli ottusi; cioè la lunghezza delle perpendicolari diminuisce dal lato dei punti B e D e aumenta dal lato dei punti A e C.

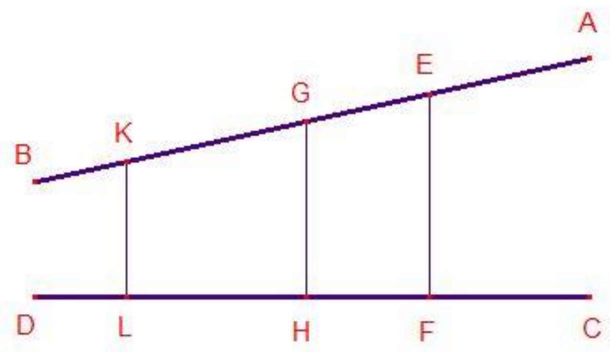


Figura 6 - Seconda versione della dimostrazione di Tusi

2) Se, viceversa, la lunghezza delle perpendicolari così abbassate diminuisce nella direzione dei punti B e D e aumenta nella direzione dei punti A e C in modo tale che le rette AB e CD si avvicinano l'una all'altra nella direzione dei punti B e D, allora quando quelle si allontanano nella direzione opposta, ogni perpendicolare forma con la retta AB due angoli di cui uno è acuto e l'altro ottuso, gli angoli acuti sono posti dal lato dei punti B e D e gli angoli ottusi dal lato opposto.

Supportato da queste ipotesi, Tusi tenta di dimostrare che nel *quadrilatero birettangolo isoscele* tutti gli angoli sono retti, cioè prova a dimostrare la proposizione III della sua prima versione dell’"*Esposto di Euclide*". Fa qui ricorso alla dimostrazione per assurdo. Tusi si serve in questo caso, senza nemmeno rendersene conto, di una proposizione equivalente al V postulato. Ciò implica che le due ipotesi che abbiamo appena enunciato - dimostrabili dalla geometria assoluta, cioè indipendentemente dal V postulato - non sono sufficienti per dimostrare la proposizione III della prima versione dell'"*Esposto*". Non ci soffermeremo su questa lacuna nell'opera di Tusi, lacuna che Saccheri percepirà chiaramente più tardi, ma evidenzieremo piuttosto un altro punto importante. Nel corso della dimostrazione della proposizione III, Tusi prova che **la somma degli angoli di un triangolo è uguale a due retti**. Egli lo dimostra dapprima nel caso del triangolo rettangolo (figura che ottiene dividendo con una diagonale un quadrilatero che ha i suoi quattro angoli retti). Estende poi questa dimostrazione a un triangolo qualunque, dividendo ciascun triangolo per mezzo di un'altezza in due triangoli rettangoli. Infine dimostra la proposizione 29 del libro I degli "*Elementi*". Nel corso di questa dimostrazione, egli formula di sfuggita, come aveva fatto prima di lui Al-Haytam, l'assioma chiamato più tardi “assioma di Pasch”.

2.2.7. SAMS AD-DIN MUHAMMAD ibn ASRAF AL-HUSAYNI AS-SAMARKANDI (ca. 1250 – ca. 1310)

É opportuno, a questo punto, citare una dimostrazione del V postulato scoperta in epoca più recente. Essa è opera di un matematico e filosofo della seconda metà del XIII secolo, Samarkandi, che l'ha esposta nelle sue "*Proposizioni fondamentali*" (*Askal at-ta'sis*).

Non si sa molto della vita di Samarkandi, né delle sue opere, però ci giunge questo componimento di sole 20 pagine in cui egli discute 35 delle proposizioni di Euclide. Anche se la sua analisi è breve, Samarkandi dimostra di aver consultato ampiamente le opere dei matematici arabi che lo hanno preceduto

prima di cimentarsi a scrivere. Ad esempio fa riferimento agli scritti di Al-Haytham, Al-Khayyam, Al-Jawhari, Tusi e Abharī (morto nel 1262 o nel 1265).
In questa opera, l'autore analizza le definizioni e i postulati (ad eccezione del V postulato) e dimostra 35 proposizioni che reputa “fondamentali”, che comprendono 48 proposizioni degli "*Elementi*" (per lo più appartenenti al Libro I). La proposizione che serve da fondamento alle sue riflessioni è la seguente: **da un punto situato all'interno di un angolo si può sempre condurre una retta che taglia i due lati di questo angolo**.

Le "*Proposizioni fondamentali*" erano ancora conosciute nel XV secolo: Qadi Zada ar-Rumi (1364 – 1436), per esempio, scrisse un commentario a questa opera nel 1413.
Dunque, 150 anni dopo Tusi e Samarkandi, la teoria delle parallele suscita ancora l'interesse di matematici e studiosi di geometria anche nel mondo arabo.

3. La geometria euclidea verso sviluppi futuri

Le idee dei matematici arabi occupano un posto particolarmente importante sia nello sviluppo della teoria delle parallele "classica" sia nello sviluppo di quelle teorie più recenti che giungono, molti secoli più tardi, a formalizzare una geometria non-euclidea. Tuttavia, i matematici arabi erano assolutamente ignari che fosse possibile creare una geometria differente dalla geometria euclidea: si erano soltanto impegnati a dimostrare il postulato delle parallele, fondandolo su proposizioni che pensavano essere più evidenti. A quanto pare, nel corso dei secoli la geometria non euclidea viene "scoperta" almeno quattro volte: specialmente in periodi in cui molti studiosi si dedicano allo stesso problema e le comunicazioni fra di loro sono scarse, le scoperte simultanee indipendenti non sono rare nella storia della scienza e della matematica.

Al-Hayyam e Tusi, anche se non totalmente consapevoli del contributo che apportavano con il loro studio, hanno ottenuto importanti risultati. Abbiamo già presentato uno di essi, cioè la **dipendenza reciproca tra il postulato delle parallele e la somma degli angoli del quadrilatero** birettangolo isoscele e, per conseguenza, del triangolo: assumendo valida la geometria euclidea, risulta che la somma degli angoli interni di un quadrilatero è pari a due angoli retti (180°).

Un altro punto importante da sottolineare è il loro tentativo di **rifiutare nel quadrilatero birettangolo isoscele l'ipotesi degli angoli acuti e ottusi**, riconducendola ad una contraddizione. In realtà, Al-Hayyam formulava già qualche proposizione semplice di geometria non-euclidea quando stabiliva, nell'ipotesi dell'angolo acuto o dell'angolo ottuso, che la base superiore del

quadrilatero fosse rispettivamente più lunga o più corta della base inferiore. Ma era ben lontano dal pensare che tali proposizioni fossero ammissibili esse stesse.
Segnaliamo ancora una volta **l'utilizzo dell'"assioma di Pasch"**, anche se questo assioma non interviene presso gli autori arabi in quanto tale (giacché verrà formulato come assioma solo sul finire dell'Ottocento).

L'opera di Al-Hayyam rimarrà a lungo ignota: è stata pubblicata la prima volta nel 1936, a Teheran, in una edizione araba. La seconda stesura dell'"*Esposto di Euclide*" di Tusi apparve a Roma, dapprima in arabo, nel 1594, poi in una traduzione latina (incompleta) nel 1657.
La dimostrazione di Tusi fu studiata da J. Wallis (1616 – 1703) che l'espose nella sua opera sul V postulato. Essa fu ben nota anche al padre gesuita Girolamo Saccheri (1667 - 1733): volendo rifiutare l'ipotesi degli angoli acuti ed ottusi considerati da Tusi nel quadrilatero, Saccheri si basa sulla dimostrazione di quest'ultimo per tentare, in una maniera particolarmente ingegnosa, di "purificare Euclide da qualsiasi macchia" (l'opera che pubblica Saccheri a seguito dei suoi studi di geometria si intitola proprio "*Euclides ab omni naevo vindicatus*").


EUCLIDES
AB OMNI NÆVO VINDICATUS:
SIVE
CONATUS GEOMETRICUS
QUO STABILIUNTUR
Prima ipsa universæ Geometriæ Principia.
AUCTORE
HIERONYMO SACCHERIO
SOCIETATIS JESU
In Ticinensi Universitate Matheseos Professore.
OPUSCULUM
EX.MO SENATUI
MEDIOLANENSI
Ab Auctore Dicatum.
MEDIOLANI, MDCCXXXIII.
Ex Typographia Pauli Antonii Montani. Superiorum permissu.

Nei libri di geometria, il *quadrilatero birettangolo isoscele* è tutt'oggi denominato "quadrilatero di Saccheri".

Bibliografia

- Youschkevitch A. P. 1976

  Les mathématiques arabes, Vrin, Paris

- Hankel E. 1872

  Storia delle matematiche presso gli arabi

dal *Bullettino di bibliografia e di storia delle Scienze Matematiche e Fisiche*, Boncompagni

- Rashed R. 1985

  D'Alexandrie a Bagdad, in *Le matin des mathématiciens… par E. Nöel*, Belin Paris

- Buyukkara, M. Ali, 2002

  "Al-Ma'mun choice of 'Ali al-Rida as his heir", in *Islamic studies*

- Pinto O., 1928

  Le biblioteche degli Arabi nell'età degli Abbasidi, Firenze

- .Cooke R. L., 2005

  The History of Mathematics: A Brief Course , Wiley

- G. S. Klügel, 2012

  Tentativi di dimostrare la teoria delle parallele, Ed. Melquiades, Milano

- F. Bertolini, 2009

  L'evoluzione della geometria, ARACNE editrice

Sitografia

- https://www.wired.it/scienza/spazio/2013/12/04/genio-matematico-mondo-arabo/

- http://www.arab.it/islam/la_matemtica_del_mondo_islamico.htm

- http://hist.science.online.fr/greece/matematica/arabi.htm

- https://areeweb.polito.it/didattica/polymath/htmlS/argoment/APPUNTI/TESTI/Apr_02/Cap4.html

- http://www.lidimatematici.it/blog/2010/11/13/il-v-postulato-di-euclide-un-dogma-violato-che-cambio-il-mondo/

- http://www.matefilia.it/argomen/euclide/geonon9.htm

- http://www.fe.infn.it/u/mandreot/SSIS/DidMateModuloII/borgato1.pdf

Noi onoriamo l'antica Grecia come la culla della civiltà occidentale. Là, per la prima volta, è stato creato un sistema logico, meraviglia del pensiero, i cui enunciati si deducono così chiaramente dagli altri che ciascuna delle proposizioni dimostrate non solleva il minimo dubbio: si tratta della Geometria di Euclide.
Quest'opera ammirevole della ragione ha dato al cervello umano la più grande fiducia nei suoi sforzi ulteriori.
Colui che nella sua prima giovinezza non ha provato entusiasmo davanti a quest'opera non è nato per fare lo scienziato teorico.

Albert Einstein - "Come io vedo il mondo" (1954)