UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FERRARA

Corso di Divulgazione e Museologia Matematica

L'INDIPENDENZA DELLA TRIGONOMETRIA ARABA

Il quadrilatero completo, il calcolo della circonferenza

e la trisezione dell'angolo

Realizzato da:
Arianna Caselli
Marta Lazzarini

Prof.ssa:
Alessandra Fiocca

Anno accademico 2016-2017

"'Qual è 'l geometra che tutto s'affige per misurar lo cerchio,
e non ritrova, pensando, quel principio ond'elli indige,..."
Divina Commedia, XXXIII Paradiso

Indice

Introduzione

In questa tesi abbiamo trattato tre argomenti fondamentali riguardanti la trigonometria: il quadrilatero completo, il calcolo della circonferenza e la trisezione dell'angolo. Come sottolinea il titolo abbiamo esposto la trigonometria indipendentemente da altre discipline quali l'astronomia. L'arco temporale in cui sono vissuti i matematici arabi che abbiamo analizzato abbraccia un periodo che va dal XII al XV secolo. Dopo le difficoltà dovute alle invasioni mongole del XII secolo che portarono distruzione in molte regioni islamiche, l'Impero arabo si rissolevò con un periodo fiorente a livello culturale e scientifico grazie al sovrano Ulugbek, uomo di grande intelletto. La tesi è strutturata in tre capitoli: il primo riguarda il *Trattato sul quadrilatero completo* di Nasir ad-Din al-Tusi dove l'autore introduce la risoluzione dei triangoli piani e sferici attraverso metodi che fanno uso e non delle proposizioni sul quadrilatero completo; il secondo riguarda il *Trattato sul cerchio* di Giyat ad-Din al-Kashi nel quale viene effettuato un calcolo di π migliore di quello di Archimede, utilizzando però lo stesso ragionamento: per misurare la circonferenza da cui ricavare poi il π si calcola la media aritmetica tra il perimetro di un poligono inscritto di n lati e quello di un poligono circoscritto sempre di n lati; infine l'ultimo capitolo espone la risoluzione algebrica della trisezione dell'angolo da parte di al-Kashi nel trattato "Su la corda e sul seno", purtroppo a noi mai pervenuto. L'intera dimostrazione è centrata su due importanti teoremi (di Tolomeo e di Euclide) per ottenere una stima del $\sin 1°$.

Capitolo 1

Il trattato di Nasir ad-Din al-Tusi sul quadrilatero completo

1.1 Riferimenti bibliografici dell'autore

Nasir ad-Din al-Tusi

Il più illustre studioso islamico nel campo della trigonometria fu Abu Gàfar Muhammad ibn Muhammad Nasir ad-Din al-Tusi.
Egli nacque il 18 Febbraio 1201 a Tus, centro culturale nelle regioni nord-orientali iraniche del Khorasan. La sua famiglia era originaria di Hamadhan, probabilmente ismaelita, perdette il padre in giovane età e intraprese da subito con impegno l'attività di studente e studioso. Il padre fu giurista del Dodicesimo Imam, la principale setta dei musulmani sciiti e l'insegnamento del figlio avvenne in una struttura religiosa. Tuttavia, al-Tusi ricevette insegnamenti in campo scientifico dallo zio, figura di rilievo in campo intellettuale.

Egli apprese nozioni di fisica, metafisica, logica non chè di matematica, in particolare algebra e geometria. Al-Tusi nacque all'inizio di un secolo che avrebbe visto la conquista del mondo islamico da parte dei Mongoli, dalla Cina fino all'Europa; non fu sicuramente un buon periodo per gli studiosi di perseguire le loro opere e ricerche.

Nel 1214, quando aveva 13 anni, si trasferì da Tus a Nishapur, cittadina poco distante, nella quale completò la propria formazione scientifica e filosofica. Fu proprio qui che cominciò ad acquisire reputazione come studioso eccellente e diventò famoso in tutta la regione.
Nel 1220 l'invasione mongola raggiunse Tus dove lasciò parecchia distruzione. Al-Tusi su invito del principe ismaelita Nasir ad-Din Àbd ar-Rahim entrò a far parte del gruppo degli Assassini, che praticavano una forma intellettuale estremista sciita controllando il castello di Alamut. Fu proprio in questo periodo che scrisse importanti opere di logica, filosofia, matematica e astronomia tra cui un'opera di etica, Akhlaq-i Nasiri 1232, dedicata a Nasir ad-Din Àbd ar-Rahim.

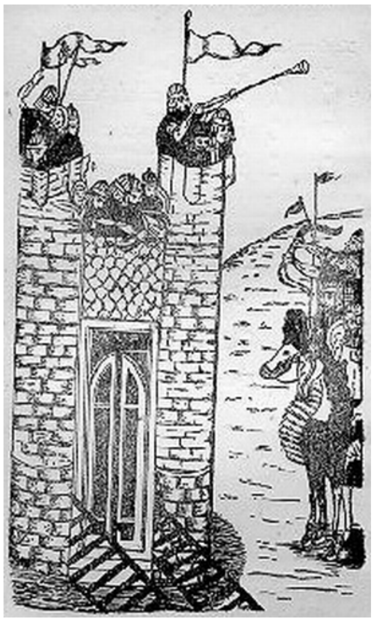


Immagine medievale del Castello di Alamut

Nasir ad-Din al-Tusi all'Osservatorio di Maragha

Nel 1256 al-Tusi si trovava al castello di Alamut quando le forze mongole, guidate dal nipote di Gengis Khan, Hulagu-Han, invasero e distrussero Alamut. Hulagu, nuovo sovrano dell'Iran, nutriva un forte rispetto scientifico nei confronti di al-Tusi e lo introdusse nel circolo dei suoi più vicini collaboratori e fece costruire intorno al 1259, sotto suo consiglio, un Osservatorio a Maragha, la città che egli aveva scelto come capitale. In questo Osservatorio, che divenne operativo nel 1262, al-Tusi si trovò a capo di un gruppo di studiosi provenienti da Damas, Massul, Kaswin, Tbilissi e alte regioni. La costruzione e il funzionamento dell'Osservatorio furono possibili grazie all'aiuto degli astronomi cinesi.

Data la sua apparecchiatura, la ricchezza della Biblioteca e i diversi campi in cui gli studiosi esercitavano le proprie attività questo Osservatorio diventò uno dei migliori del Medioevo. Tra le opere intraprese in questo periodo si deve citare l'istituzione delle tavole astronomiche, *Zig-ilhani*, in onore di Hulagu-Han. Quest'opera, scritta in persiano e successivamente tradotta in arabo, conteneva le tabelle per il calcolo delle posizioni astronomiche e un catalogo stellare. Egli diede altri importanti contributi in campo astronomico tra cui l'eliminazione delle parti che non si basavano sul principio del moto circolare uniforme del sistema tolemaico, risultato probabilmente utilizzato successivamente da Copernico. Scrisse anche opere riguardanti la costruzione di strumenti astronomici come l'astrolabio. Al-Tusi è l'autore di decine di libri originali, traduzioni e commenti, tra cui la teoria delle proporzioni e delle parallele. Egli morì il 26 Giugno 1274 durante un suo viaggio a Baghdad.

In seguito ci occuperemo della sua opera il *Trattato sul quadrilatero completo*, nella quale troviamo una prima trattazione completa sulla trigonometria come disciplina indipendente e non come strumento per l'astronomia. Molti risultati contenuti nel Trattato sono dell'autore stesso.

1.2 Il *Trattato sul quadrilatero completo*

"Kitab al sakl al-qita", Libro sulla secante, comunemente chiamato ai giorni nostri *Trattato sul quadrilatero completo*, fu scritto in persiano e tradotto in arabo dall'autore stesso nel 1260, probabilmente per rispondere ai bisogni degli studiosi dell'osservatorio di Maragha.
È la prima volta che la teoria della risoluzione dei triangoli viene studiata per se stessa come oggetto di ricerca mentre prima la trigonometria era stata trattata nei libri di astronomia come semplice strumento per questa disciplina. Inoltre, è la prima volta che viene data una trattazione della trigonometria piana e sferica a partire dai concetti fondamentali.
Il Trattato sul quadrilatero completo comprende 9 libri, dei quali analizzeremo i primi 5.

Libro I
Nel primo libro si introducono alcune nozioni riguardanti "la quantità di un rapporto" che serviranno alla comprensione del contenuto dei libri successivi, le teorie sulle quali si basa l'autore fanno riferimento ad Al-Hayyam.
Diamo due definizioni fondamentali.

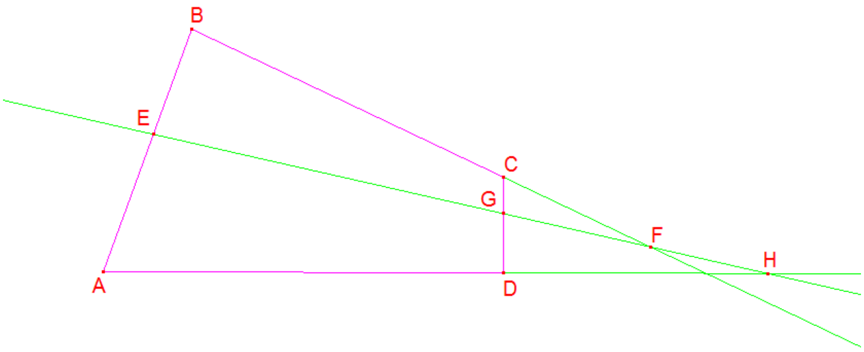
1.1 Definizione. Si definisce quantità del rapporto $\frac{A}{B}$, il numero Q tale che $\frac{Q}{1} = \frac{A}{B}$, ossia l'equivalente dei nostri numeri reali.

1.2 Definizione. La quantità di due rapporti è uguale al prodotto del rapporto delle singole quantità.

Libro II

Nel secondo libro l'autore espone parecchie varianti della dimostrazione del teorema di Menelao per le differenti forme piane del quadrilatero completo. Le dimostrazioni sono semplici e tutte basate sulla similitudine dei triangoli. Il teorema di cui si occupa è il seguente.

1.2.1 Teorema. *Consideriamo un quadrilatero qualsiasi $ABCD$ e una retta non parallela ai sui lati ma che li interseca oppure interseca le loro estensioni, allora il teorema di Menelao sul quadrilatero completo stabilisce che*



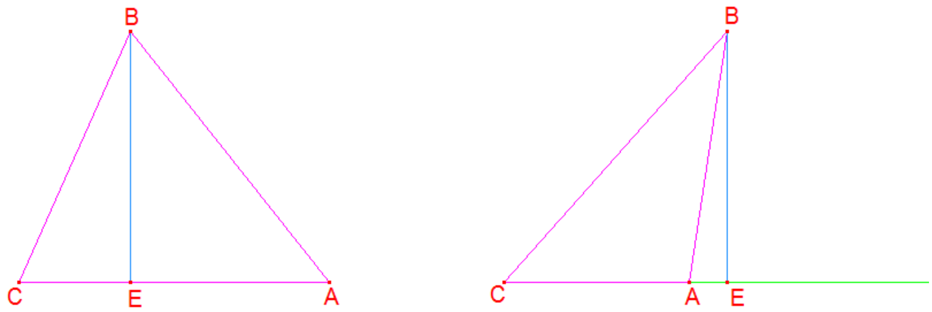
$$\frac{AE}{EB} \cdot \frac{BF}{FC} \cdot \frac{CG}{GD} = \frac{HA}{DH}.$$

Libro III

Nel terzo libro al-Tusi introduce le nozioni di seno e coseno di un arco, dimostra alcuni lemmi e calcola due archi a partire dalla loro somma o differenza e il rapporto dei loro seni (temi già trattati nell'Almagesto di Tolomeo).
Nello stesso libro l'autore risolve i triangoli piani, prima quelli rettangoli poi quelli qualunque, sottolineando il fatto che almeno un lato del triangolo deve essere noto.
Al Tusi per procedere alla risoluzione distingue prima due metodi: il metodo degli archi e delle corde e il metodo degli archi e dei seni.
Espone prima il metodo degli archi e delle corde, iniziando con un triangolo rettangolo e considerandone 3 sotto casi; poi rivolge la sua attenzione ad un triangolo qualunque, dividendo i suoi studi in 4 sotto casi, di cui ne analizzeremo solo 2.

Primo caso

Consideriamo un triangolo qualunque di cui conosciamo due lati e l'angolo compreso, come ad esempio l'angolo $\hat{A}$ si trova tra i lati AB e AC. Abbassando da B su AC la perpendicolare BE, otteniamo un triangolo rettangolo BEA di cui conosciamo l'angolo $\hat{A}$ e il lato BA. Ora rimangono da ricavare i lati BE e AE.



Se consideriamo la $crd2\hat{A}$, in una circonferenza di centro A e raggio $AB = 60$, essa risulta essere il doppio del segmento BE e la sua misura è ottenuta dalle tavole delle corde. Il lato BE quindi soddisfa l'equazione:

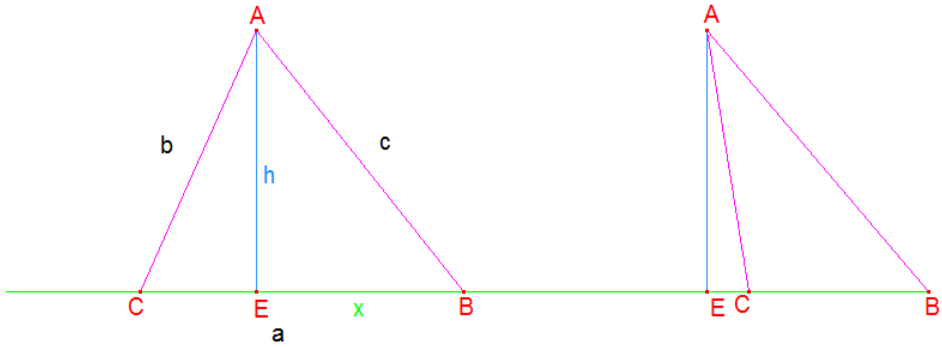
$$\frac{BE}{BA} = \frac{\frac{1}{2}crd2\hat{A}}{60}$$

e il lato AE possiamo calcolarlo grazie al teorema di Pitagora. Di conseguenza, $CE = CA \pm EA$, BC è ottenuto anch'esso dal teorema di Pitagora e la $crd2\hat{C}$ si ricava allo stesso modo dall'equazione:

$$\frac{BE}{BC} = \frac{\frac{1}{2}crd2\hat{C}}{60}$$

il valore di $2\hat{C}$ si ottiene dalla tabella delle corde e dunque $\hat{C}$ sarà la metà di questo valore.

Secondo caso
Consideriamo un triangolo qualunque ABC di cui conosciamo i tre lati. Indicando con $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ i tre angoli e con a, b, c rispettivamente la lunghezza dei lati opposti.



Se denotiamo con h la perpendicolare AE e con x il segmento BE otteniamo grazie al teorema di Pitagora che

$$c^2 = x^2 + h^2$$

e

$$b^2 = (a-x)^2 + h^2 = a^2 - 2ax + x^2 + h^2 = a^2 - 2ax + c^2.$$

Da cui si ricava il valore

$$x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}.$$

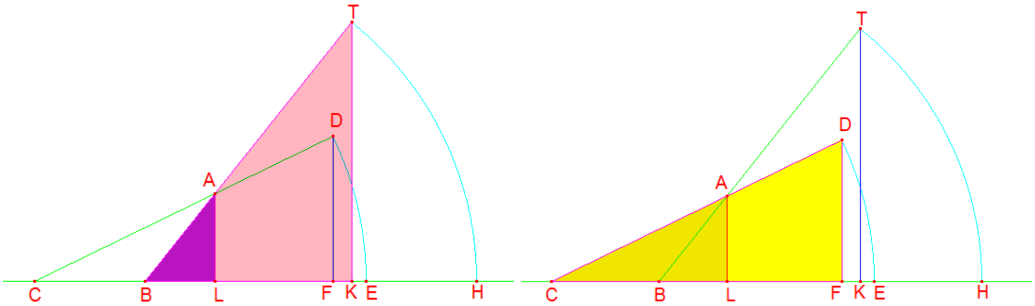
Il secondo metodo utilizzato da al-Tusi riguarda gli archi e i seni. Stabilisce che il rapporto dei lati di un triangolo è uguale al rapporto dei seni degli angoli opposti ai lati considerati, ossia dato un triangolo ABC si ha che

$$\frac{AB}{AC} = \frac{\sin\hat{C}}{\sin\hat{B}}.$$

Per poter applicare questo metodo, l'autore dimostra il teorema dei seni, considerando i 3 casi in cui l'angolo in $\hat{B}$ è ottuso, retto o acuto.
Andiamo ad analizzare il caso dell'angolo retto.

1.2.2 Teorema. *In ogni triangolo è costante il rapporto fra ogni lato e il seno dell'angolo opposto, ossia*

$$\frac{AB}{\sin\hat{C}} = \frac{CB}{\sin\hat{A}} = \frac{CA}{\sin\hat{B}}$$



Dimostrazione. Consideriamo il triangolo ABC. Prolungando il lato CB fino ad E con $CE = 60$, da C con raggio CE, descriviamo l'arco di circonferenza $\overset{\frown}{DE}$. Prolunghiamo poi il lato CA fino ad incontrare l'arco in D. Ora, abbassiamo la perpendicolare DF dal punto D al lato CE, che rappresenta il $\sin \hat{C}$. Allo stesso modo si descrive il secondo triangolo partendo dal prolungamento del lato CB, con $BH = 60$ e ripercorrendo gli stessi passaggi.
Per la similitudine dei triangoli ABL e TBK otteniamo che

$$\frac{AB}{AL} = \frac{TB(raggio)}{TK},$$

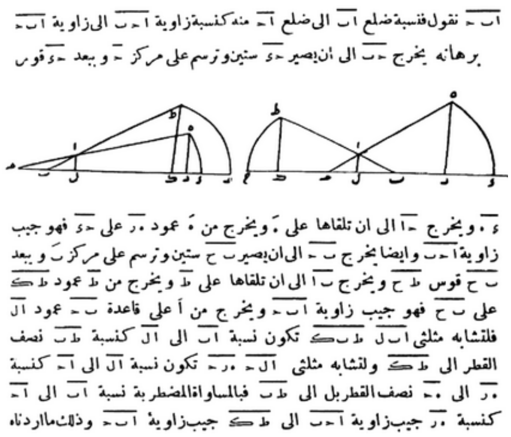
allo stesso modo per la similitudine dei triangoli ALC e DFC

$$\frac{AL}{AC} = \frac{DF}{DC(raggio)}.$$

Moltiplicando le due relazioni precedenti abbiamo

$$\frac{AB}{AC} = \frac{\sin \hat{C}}{\sin \hat{B}}.$$

□


ا ب ج نقول فنسبة ضلع ا ب الى ضلع ا ج منه كنسبة زاوية ا ج ب الى زاوية ا ب ج
برهانه يخرج ج ب الى ان يصير ج د ستين ونرسم على مركز ج وببعد ج د قوس
د ه ويخرج ج ا الى ان تلقاها على ه ويخرج من ه عمود ه ز على ج د فهو جيب
زاوية ا ج ب وايضا يخرج ب ج الى ان يصير ب ح ستين ونرسم على مركز ب وببعد
ب ح قوس ط ح ويخرج ب ا الى ان تلقاها على ط ويخرج من ط عمود ط ك
على ب ح فهو جيب زاوية ا ب ج ويخرج من ا على قاعدة ب ج عمود ا ل
فلتشابه مثلثي ا ب ل ط ب ك تكون نسبة ا ب الى ا ل كنسبة ط ب نصف
القطر الى ط ك ولتشابه مثلثي ا ل ج ه ز ج تكون نسبة ا ل الى ا ج كنسبة
ه ز الى ه ج نصف القطر بل الى ط ب فبالمساواة المضطربة نسبة ا ب الى ا ج
كنسبة ه ز جيب زاوية ا ج ب الى ط ك جيب زاوية ا ب ج وذلك ما اردناه

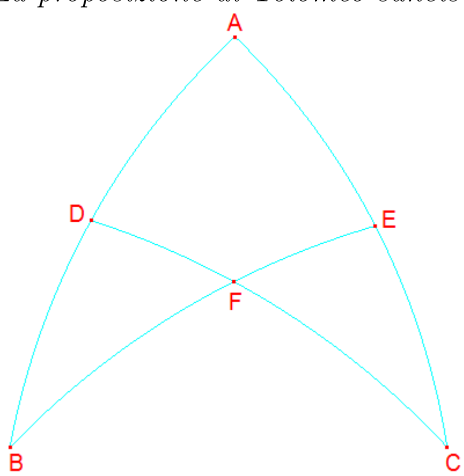
Dimostrazione del teorema dei seni tratto dall'opera originale di al-Tusi

Al-Tusi, come altri autori del suo periodo, non tratta il caso del triangolo qualsiasi quando sono possibili più soluzioni. Questo caso sarà trattato più avanti dal matematico francese, Vietè.

Libro IV

Il quarto libro ha come oggetto l'estensione alla proposizione di Menelao sul piano, applicata al triangolo sferico, detta proposizione di Tolomeo. Questa proposizione si deduce dalla proposizione del quadrilatero piano di Menelao con l'aiuto di una costruzione relativamente facile e di alcuni lemmi dimostrati nel libro precedente.

1.2.3 Proposizione. *Descriviamo sulla superficie della sfera archi di cerchi massimi tali che i due archi* $\overset{\frown}{BE}$, $\overset{\frown}{CD}$ *si intersechino in* F *come in figura. Consideriamo, inoltre, che ognuno di questi archi sia più piccolo di una semicirconferenza. La proposizione di Tolomeo sancisce che*



$$\frac{crd2\overset{\frown}{CE}}{crd2\overset{\frown}{EA}} = \frac{crd2\overset{\frown}{CF}}{crd2\overset{\frown}{FD}} \cdot \frac{crd2\overset{\frown}{DB}}{crd2\overset{\frown}{BA}},$$

equivalentemente

$$\frac{crd2\overset{\frown}{CA}}{crd2\overset{\frown}{EA}} = \frac{crd2\overset{\frown}{CD}}{crd2\overset{\frown}{FD}} \cdot \frac{crd2\overset{\frown}{FB}}{crd2\overset{\frown}{BE}}.$$

Se indichiamo con α un arco, sappiamo che $crd2\alpha = 2\sin\alpha$.
Al-Tusi chiamò il teorema

$$\frac{\sin\overset{\frown}{CE}}{\sin\overset{\frown}{EA}} = \frac{\sin\overset{\frown}{CF}}{\sin\overset{\frown}{FD}} \cdot \frac{\sin\overset{\frown}{DB}}{\sin\overset{\frown}{BA}}$$

proposizione esplicita di Tolomeo, e il teorema

$$\frac{\sin \overset{\frown}{CA}}{\sin \overset{\frown}{EA}} = \frac{\sin \overset{\frown}{CD}}{\sin \overset{\frown}{FD}} \cdot \frac{\sin \overset{\frown}{FB}}{\sin \overset{\frown}{BE}}$$

proposizione implicita di Tolomeo.

Alla fine di questo libro, al-Tusi mostra l'importanza della proposizione sul quadrilatero completo per il calcolo degli archi di circonferenza a partire dall'intersezione di cerchi massimi sulla sfera. I cerchi massimi sono circonferenze tracciate sulla superficie della sfera aventi il diametro passante per il centro della sfera e di raggio pari a quello della sfera.

Libro V
Il quinto libro è adibito alla risoluzione dei triangoli sferici con l'aiuto dei metodi che non fanno uso del quadrilatero completo. L'autore inizia con una classificazione dettagliata dei dieci tipi fondamentali di triangoli sferici, in base agli angoli (acuti,retti,ottusi) e in base ai lati (minori, uguali o maggiori di un quarto di cerchio massimo). Al-Tusi dimostra due proposizioni importanti, il teorema dei seni e il teorema delle tangenti. La denominazione araba del primo teorema: "al-sakl al-mughi" significa proposizione sufficiente, che è molto caratteristica perchè per dimostrarlo non ricorre alla proposizione del quadrilatero completo.
Nello stesso libro al-Tusi introduce nuove identità trigonometriche riguardanti tangente, cotangente, secante e cosecante, come ad esempio

$$R \tan \alpha = R \cot(90^\circ - \alpha)$$

oppure

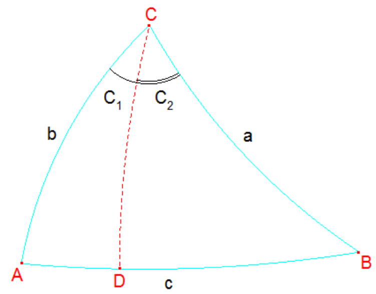
$$\frac{\tan \alpha}{\tan \beta} = \frac{\cot \beta}{\cot \alpha}.$$

L'introduzione di queste nuove relazioni portò ad una facilitazione dell'applicazione della trigonometria che non si poteva avere con l'applicazione dei metodi delle corde e degli archi oppure degli archi e dei seni.

1.2.4 Teorema. *Il teorema della tangente stabilisce che il rapporto tra la tangente di un lato e la tangente dell'angolo opposto è uguale al rapporto tra il seno dell'altro lato e il seno dell'angolo retto, ossia*

$$\frac{\tan b}{\tan \hat{B}} = \sin a.$$

Si ottengono due conseguenze importanti a questo teorema. Consideriamo il triangolo qualunque ABC e dividiamolo in due parti mediante l'altezza CD. Risulta:



$$\frac{\tan \hat{A}}{\tan \hat{B}} = \frac{\sin \overset{\frown}{BD}}{\sin \overset{\frown}{AD}}$$

e

$$\frac{\tan \hat{C}_1}{\tan \hat{C}_2} = \frac{\tan \overset{\frown}{AD}}{\tan \overset{\frown}{BD}}.$$

Al-Tusi notò che parecchi studiosi evitarono il teorema delle tangenti perché le differenze dei valori della tangente superiori a 45° crescevano molto rapidamente, il ché ne rendeva difficile l'interpolazione e l'applicazione delle tabelle. Egli esplica che l'utilizzo delle regole da lui raccomandate non è legato a questo inconveniente e che si possono semplicemente usare di valori di tangenti inferiori a 1.

Nell'ultimo capitolo del quinto libro, al-Tusi tratta la risoluzione dei triangoli sferici. Prima esamina i sei casi del triangolo rettangolo trattando separatamente le soluzioni che si basano sul teorema dei seni e quello delle tangenti. Poi risolve i triangoli qualunque con l'aiuto degli stessi teoremi e un numero ristretto di procedure.

Andiamo ora ad analizzare i due casi più complicati quando sono noti i 3 lati o i 3 angoli.

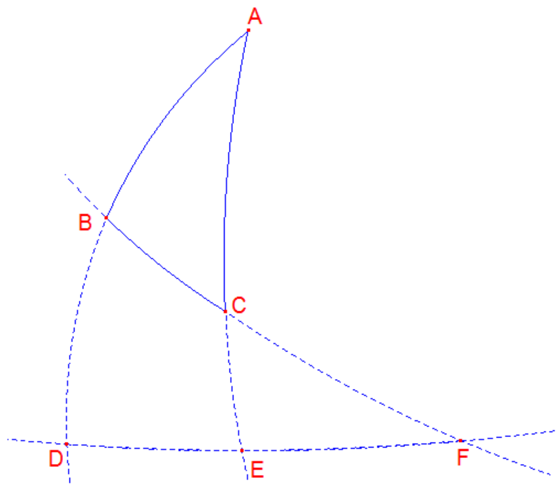
Primo caso

Consideriamo il triangolo ABC di cui conosciamo i 3 lati.

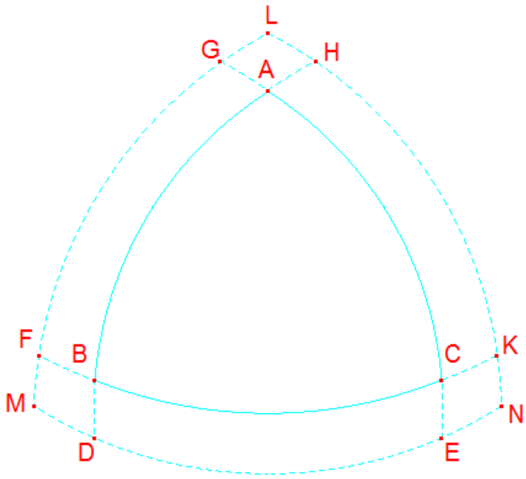
Prolunghiamo i lati $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{AC}$ fino a D ed E, in modo tale che gli archi $\overset{\frown}{AD}$ e $\overset{\frown}{AE}$ siano entrambi uguali ad un quarto di cerchio massimo. Poi, prolunghiamo $\overset{\frown}{BC}$ fino al punto di intersezione F con il prolungamento dell'arco del cerchio massimo $\overset{\frown}{DE}$. Grazie al teorema dei seni e alla regola delle quattro grandezze abbiamo che:

$$\frac{\sin \overset{\frown}{CF}}{\sin \overset{\frown}{BF}} = \frac{\sin \overset{\frown}{CE}}{\sin \overset{\frown}{BD}}.$$

Siccome, conosciamo la differenza $\overset{\frown}{BC}$ degli archi $\overset{\frown}{CF}$ e $\overset{\frown}{BF}$ come rapporto dei loro seni, possiamo calcolare gli archi $\overset{\frown}{CF}$ e $\overset{\frown}{BF}$. Troviamo poi il lati $\overset{\frown}{DF}$ ed $\overset{\frown}{EF}$ la cui differenza $\overset{\frown}{DE}$ dà l'angolo $\hat{A}$. Procedendo allo stesso modo troviamo gli angoli $\hat{B}$ e $\hat{C}$.



Secondo caso
Consideriamo il triangolo ABC, i cui lati sono minori di un quarto di grande cerchio, di cui conosciamo i 3 angoli.
Prolunghiamo ogni lato da entrambi gli estremi in moto tale da renderlo uguale ad un quarto di cerchio massimo. Il lato $\overset{\frown}{AB}$ viene prolungato in modo che $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BH}$, il lato $\overset{\frown}{BC}$ in modo che $\overset{\frown}{BK} = \overset{\frown}{CF}$ e il lato $\overset{\frown}{AC}$ in modo che $\overset{\frown}{CG} = \overset{\frown}{EA}$. Poi uniamo gli archi di cerchi massimi passanti per i punti D ed E, F e G, K e H. Costruiamo così il triangolo LMN i cui vertici si trovano nell'intersezione di questi archi di cerchi massimi. Il triangolo LMN è denominato da allora triangolo polare di ABC perchè i poli dei sui lati sono i vertici di quest'ultimo. Il triangolo ABC è esso stesso il triangolo polare di LMN e ciascuno di questi triangoli ha i lati che sono i supplementari dei lati dell'altro. Siccome $\overset{\frown}{MD} = \overset{\frown}{EN} = 90° - \overset{\frown}{DE} = 90° - A$ allora $\overset{\frown}{MN} = 180° - A$. Allo stesso modo $\overset{\frown}{BF} = \overset{\frown}{CK} = 90° - \overset{\frown}{BC}$, $L = \overset{\frown}{FK} = 180° - \overset{\frown}{BC}$. Al-Tusi risolve il triangolo LMN di cui conosce i lati ed esprime i lati che sta cercando del triangolo ABC in funzione degli angoli $\hat{L}$, $\hat{M}$, $\hat{N}$.



Il *Trattato sul quadrilatero completo* di Nasir ad-Din al-Tusi ha giocato un ruolo importante nello sviluppo della matematica in Oriente. Ricordiamo che in Europa il triangolo polare è stato introdotto da Vietè nel 1593 e fu utilizzato da un gran numero di studiosi tra cui J.Nepier e W.Snell.

Capitolo 2

Il calcolo della circonferenza da parte di Giyat ad-Din al-Kashi

Le prime approssimazioni del calcolo del π risalgono a circa 4 mila anni fa: furono infatti i Babilonesi, grandi matematici e architetti, i primi a impiegarlo, interpretandolo come $3,125$. Poi vennero gli Egizi che in un papiro del XVII secolo a.C. era approssimato a $3,1605$.
I Greci usavano poligoni circoscritti ed inscritti ad un cerchio. La lunghezza della circonferenza è infatti compresa fra un limite superiore e uno inferiore, rappresentati rispettivamente dal perimetro del poligono esterno, leggermente maggiore, e quello interno, di poco minore. Quanti più lati ha un poligono, tanto più precisa è la sua approssimazione al cerchio, e di conseguenza tanto maggiore è la precisione con cui si può calcolare il rapporto tra circonferenza e diametro. Archimede di Siracusa (287- 212 a.C.) usò poligoni con 96 lati, con una stima del π di 3,14163. Questo ragionamento venne preso in seguito anche dai matematici arabi e in particolare da al-Kashi. Ma prima di al-Kashi molti altri scienziati arabi, tra cui ibn al-Haytam e al-Biruni, hanno calcolato il rapporto tra la circonferenza e il diametro.

Al-Biruni (973-1048 d.C.), nel Libro III del *Qanum al-Mas udi*, calcola appunto il perimetro di un poligono inscritto e circoscritto e ne fa la media aritmetica. Il risultato ottenuto di 3.1417 era, però, meno preciso di quello di 3,1416 conosciuto dagli Indiani, ottenuto da Aryabhata intorno al 500 a.C., e di quello conosciuto da Archimede.
Questo è dovuto al fatto che, per qualche motivo, al-Biruni aveva assegnato alla lunghezza della corda di circonferenza di raggio 1 sottesa da un angolo di 2° il valore di $2^i 5^{ii} 39^{iii} 43^{iv} 36^v$ mentre, in un altro capitolo del *Qanun al-Masi udi*, gli aveva assegnato il valore più preciso di $2^i 5^{ii} 39^{iii} 25^{iv} 58^v$ (un valore ancora più preciso sarebbe $2^i 5^{ii} 39^{iii} 26^{iv} 22^v 29^{iv}$).

(Come si nota, questi conti sono stati svolti nel sistema sessagesimale spiegato nell'Appendice.)

In un manoscritto datato 1322, ma che in realtà risale alla metà del XIII secolo di autore sconosciuto, un'ulteriore stima di π è stata ottenuta attraverso il calcolo di poligoni regolari inscritti e circoscritti di 720 lati. All'inizio del conto, però, c'è un errore: l'autore prende come valore della corda sottesa da un angolo di mezzo grado, il seno di tale angolo (calcolato da Abu-l-Wafa Muhammad al-Buzjani). Ma questi due valori differiscono già dai terzi (sempre calcolati nel sistema sessagesimale).
È per questo motivo che il valore ottenuto per il perimetro del poligono circoscritto risulta inferiore alla lunghezza della circonferenza. I limiti superiore e inferiore di π ottenuti attraverso questo procedimento sono $3.8^{i}29^{ii}35^{iii}$ (circa $3,14155$) e $3.8^{i}29^{ii}42^{iii}$ (circa $3,14158$), mentre il valore di π preciso fino ai terzi è di $3.8^{i}29^{ii}44^{iii}$, più grande dei limiti dati.

Particolarmente interessante risulta il calcolo di π effettuato da Gamsid Giyat ad-Din al-Kashi nel suo *Trattato sul cerchio (al-risala al-muhitiyya)* del 1424. All'interno di questa opera, il calcolo per approssimazioni è notevole non solo per la precisione del risultato, esatto fino alla diciassettesima cifra decimale, ma anche per l'eleganza e la semplicità delle stime numeriche.
Al-Kashi migliorò il risultato del matematico cinese Zu Chongzhi che nel 480 d.C. aveva ottenuto una precisione del π alla settima cifra decimale. Mentre fu superato, dopo quasi due secoli (1615), da Ludolf van Ceulen che con un lavoro durato trenta anni raggiunse la 35-esima cifra decimale.

2.1 Riferimenti bibliografici dell'autore

Francobollo con Giyat ad-Din al-Kashi

Al-Kashi fu uno dei migliori matematici nella storia dell'Iran. Nacque nel 1380 a Kashan. La regione era controllata da Tamerlane, meglio conosciuto come Timur.
La situazione cambiò per il meglio quando Timur morì nel 1405, e suo figlio, Shah Rokh, ascese al potere. Shah Rokh e sua moglie, Goharshad, una principessa turca, erano molto interessati alle scienze e incoraggiavano la loro corte allo studio profondo nei vari campi scientifici. Di conseguenza, il periodo della loro reggenza diventò uno con più risultati scientifici nella storia araba. Questo fu il perfetto ambiente per al-Kashi per iniziare al sua carriera come uno dei migliori matematici del mondo.
Otto anni dopo la sua ascesa al potere nel 1409 il loro figlio, Ulugbek, fondò un istituto a Samarcanda che presto diventò una promettente università. Gli studenti da tutto il Medio Oriente e oltre, affluivano in gran numero a questa accademia nella capitale dell'impero di Ulugbek. Di conseguenza, Ulugbek riunì molti tra i più importanti matematici e scienziati del Medio Oriente. Nel 1414, al-Kashi colse l'opportunità di esporre loro i suoi risultati e sotto la loro influenza produsse i suoi migliori lavori.
Quando morì, probabilmente nel 1429, al-Kashi stava ancora lavorando al suo libro *Trattato sulla corda e sul seno.* Alcuni studenti credevano che Ulugbek avesse ordinato la sua morte, altri invece affermavano che fosse morto di morte naturale.

2.2 Il calcolo di π nel *Trattato sul cerchio*

Come introdotto prima al-Kashi nel suo *Trattato sul cerchio* del 1424, effettua il calcolo del π fino alla diciassettesima cifra decimale. All'inizio dell'opera critica le stime ottenute dai suoi predecessori. Nel caso di grandi cerchi, infatti, questi valore hanno un errore assoluto non trascurabile.
Per comprendere i calcoli di al-Kashi, indichiamo le unità di misura utilizzate:

- 1 farsah=12000 braccia (6 km circa);
- 1 braccio=24 pollici (50 cm circa);

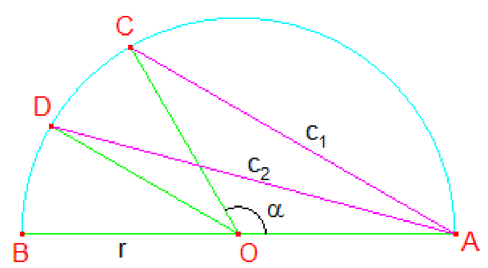
- 1 pollice=9 volte la larghezza di un chicco d'orzo;
- 1 chicco d'orzo=6 volte lo spessore di un crine di cavallo.

Secondo al-Kashi, il raggio della terra è di 2485 farsah, e un cerchio massimo della Terra ha una lunghezza uguale a 8000 farsah. Suppone infine, grazie all'astronomo iraniano Qutb ad-Din as-Sirazi (1236-1311), che il raggio della sfera delle stelle fisse sia uguale a 700073,5 volte il diametro della Terra.

I limiti forniti da Archimede per π sono di $3\frac{1}{7}$ (circa 3,1428) e $3\frac{10}{71}$ (circa 3,1408), che differiscono di $\frac{1}{497}$. Da questo, al-Kashi conclude che, per un cerchio di diametro uguale a 497 unità, l'errore massimo ammesso per il valore della circonferenza è di un'intera unità. Questo significa che, per i cerchi massimi della Terra, l'errore massimo è di 5 farsah e, per i cerchi massimi della sfera delle stelle fisse, di più di 300000 farsah.
Al-Kashi pone dunque il problema di un calcolo del π più preciso nel seguente modo: il calcolo deve soddisfare una condizione, che al giorno d'oggi potrebbe farci sorridere, detta "Condizione di Al-Kashi":

"La circonferenza di un cerchio deve essere espressa in funzione del diametro con una precisione tale che l'errore sulla lunghezza di una circonferenza di diametro uguale a 600000 volte il diametro della Terra sia minore dello spessore di un capello."

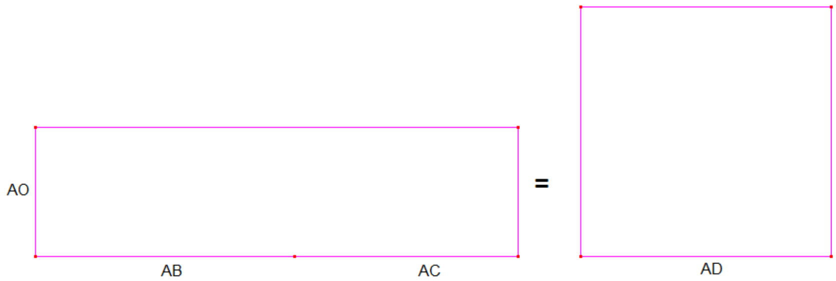
Al-Kashi basa il calcolo della circonferenza, come avevano fatto tutti i suoi predecessori, a partire da Archimede, sul calcolo del perimetro dei poligoni regolari inscritti e circoscritti, ma effettua i suoi calcoli seguendo un procedimento diverso. Egli determina, per un cerchio di raggio 60, i valori delle corde c_n che sottendono archi uguali a $\alpha_n = 180° - \frac{60°}{2^{n-1}}$; ad esempio c_1, c_2, c_3, c_4 sottendono archi rispettivamente di $120°, 150°, 165°, 172,5°$.



Prop 2.2.1. *Semicirconferenza con corda c_1 di un arco $120°$ e c_2 di un arco di $150°$.*

Il calcolo si basa sulla seguente

2.2.1 Proposizione. *Il rettangolo che ha come lati il raggio OA, e la somma del diametro AB e della corda che sottende un arco $\overset{\frown}{AC}$ inferiore ai $180°$, ha area uguale al quadrato della corda AD che sottende un arco uguale alla somma dell'arco $\overset{\frown}{AC}$ e dell'arco $\frac{\overset{\frown}{180°} - \overset{\frown}{AC}}{2}$ (con arco di $180°$ si intende la semicirconferenza).*



Prop 2.2.1. *Rettangolo di lati $(AB + AC)$ e AO e quadrato di lato AD.*

Dimostrazione. Ciò che dobbiamo dimostrare è che $AO \cdot (AB + AC) = AD^2$. Sappiamo che l'arco $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{AC} + \dfrac{\overset{\frown}{180°} - \overset{\frown}{AC}}{2} = \dfrac{\overset{\frown}{180°} + \overset{\frown}{AC}}{2}$, e se chiamiamo come in figura α l'angolo sotteso dall'arco $\overset{\frown}{AC}$, allora l'angolo sotteso dall'arco $\overset{\frown}{AD}$ è dato da $\dfrac{\pi + \alpha}{2}$. Ora $AC = 2r \sin \dfrac{\alpha}{2}$ e di conseguenza $AO \cdot (AB + AC) = r\big(2r + 2r \sin \dfrac{\alpha}{2}\big) = 2r^2\big(1 + \sin \dfrac{\alpha}{2}\big)$.
Mentre per lo stesso ragionamento:
$AD = 2r \sin \dfrac{\pi + \alpha}{4} = 2r \sin \big(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\alpha}{4}\big) = 2r\big(\cos \dfrac{\pi}{4} \cdot \sin \dfrac{\alpha}{4} + \cos \dfrac{\alpha}{4} \cdot \sin \dfrac{\pi}{4}\big) = r\sqrt{2}\big(\cos \dfrac{\alpha}{4} + \sin \dfrac{\alpha}{4}\big)$.
Di conseguenza $AD^2 = 2r^2\big(\cos \dfrac{\alpha}{4} + \sin \dfrac{\alpha}{4}\big)^2 = 2r^2\big(1 + 2\cos \dfrac{\alpha}{4} \sin \dfrac{\alpha}{4}\big) = 2r^2\big(1 + \sin \dfrac{\alpha}{2}\big) = AO \cdot (AB + AC)$. □

1 Osservazione. Per $\alpha = 2\phi$ e $r = 1$ la proposizione di al-Kashi $AD^2 = AO(AB + AC)$ diventa:

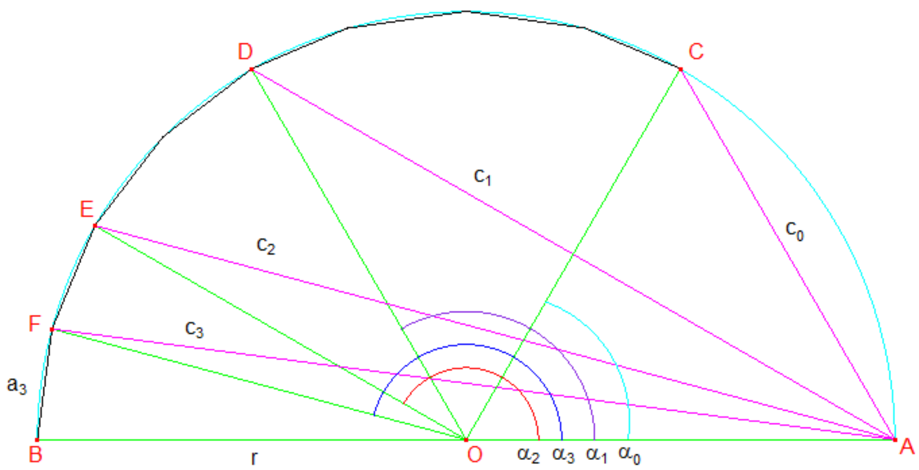
$$\sin \big(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\big) = \sqrt{\frac{1 + \sin \varphi}{2}},$$

dimostrato per la prima volta da J.H. Lambert nel 1770.

Grazie a questa Proposizione, e tenendo conto di quanto detto sopra possiamo esprimere una qualsiasi delle corde c_n come:

$$\frac{d}{2}(d + ch_\alpha) = [ch_{\left(\frac{180^\circ+\alpha}{2}\right)}]^2, \tag{2.1}$$

con d il diametro e ch_α la corda che sottende l'arco $\overset{\frown}{AC} = \alpha$ della figura.



Semicirconferenza esemplificativa del ragionamento di Al-Kashi. a_3 risulta essere il lato del poligono inscritto cercato di $3 \cdot 2^3$ lati.

n	$\alpha_n = 180^\circ - \frac{60}{2^{n-1}}$	$180^\circ - \alpha_n$	n lati
0	$\alpha_0 = 60^\circ$	120°	$3 \cdot 2^0$
1	$\alpha_1 = 120^\circ$	60°	$3 \cdot 2^1$
2	$\alpha_2 = 150^\circ$	30°	$3 \cdot 2^2$
3	$\alpha_3 = 165^\circ$	15°	$3 \cdot 2^3$
4	$\alpha_4 = 172,5^\circ$	$7,5^\circ$	$3 \cdot 2^4$

Tabella con i primi 5 termini della successione di α_n

Se poniamo $\dfrac{180^\circ + \alpha}{2} = \alpha_n$ allora $\alpha = \alpha_{n-1}$, e come si nota pure dalla figura avremo:

$$(ch_{\alpha_n})^2 = \frac{d}{2}(d + ch_{\alpha_{n-1}}) \tag{2.2}$$

con $\alpha_0 = 60^\circ$. Chiamando ch_{α_n} semplicemente c_n si ha:

$$c_n = \sqrt{r(2r + c_{n-1})}. \tag{2.3}$$

La successione di corde c_n serve a calcolare la misura del lato del poligono inscritto, poiché la corda a_n che sottende l'arco di angolo supplementare a α_n è giustamente il lato del poligono regolare inscritto di $3 \cdot 2^n$ lati (partendo dall'angolo di 60° si divide il suo supplementare, 120°, n volte).
Grazie al Teorema di Pitagora, abbiamo:

$$a_n^2 = \sqrt{d^2 - c_n^2}. \tag{2.4}$$

Le ulteriori operazioni, effettuate nel sistema sessagesimale, comprendono operazioni razionali ed estrazioni di radici, come nelle equazioni 2.3 e 2.4. Prima di effettuare i calcoli, al-Kashi determina:

- Il numero dei lati di un poligono inscritto da $3 \cdot 2^n$ lati, ove il perimetro permette di ottenere la precisione voluta nel calcolo della circonferenza.
- Il numero sufficiente di ordini sessagesimali per tutti i c_n e le grandezze ausiliarie.

Osserva che in un cerchio di diametro uguale a 600000 volte quello della Terra, un ottavo, ovvero $\frac{1}{60^8}$ di grado, non supera lo spessore di un capello. Ne segue che la precisione voluta è ottenuta non appena determiniamo i perimetri P e p dei poligoni circoscritti e inscritti in modo che la loro differenza non superi $\frac{1}{60^8}$; oppure se passiamo al cerchio di raggio 1 (e non più 60), non deve superare $\frac{1}{60^9}$. In altre parole, significa che la differenza dei perimetri deve soddisfare la seguente condizione:

$$P - p < \frac{1}{60^9},\ r = 1. \tag{2.5}$$

Dopo aver valutato la differenza tra i due perimetri, al-Kashi fornisce una stima della lunghezza dei lati di un poligono inscritto e uno circoscritto, nella quale trova, in un modo estremamente acuto, la precisione necessaria per rendere trascurabili le piccole differenze.
Indichiamo con h l'apotema del poligono inscritto, con r il raggio del cerchio, e con s la differenza $r - h$, ovvero il vettore segmento circolare corrispondente. Se r è l'apotema del poligono circoscritto risulta che i triangoli in cui sono suddivisi entrambi i poligoni sono simili e di conseguenza:

$$\frac{P}{p} = \frac{r}{h}, \frac{P-p}{p} = \frac{r-h}{h} = \frac{s}{r-s}. \tag{2.6}$$

Grazie ad Archimede, il rapporto tra la circonferenza C e il raggio r soddisfa le seguenti disuguaglianze: $6 < \frac{C}{r} < 6\frac{2}{7} = \frac{44}{7}$, di modo che:

$$\frac{1}{6} - \frac{r}{C} < \frac{1}{6} - \frac{7}{44} = \frac{22-21}{132} = \frac{1}{132} < \frac{1}{126}. \tag{2.7}$$

Usando 2.5, 2.6, 2.7, possiamo determinare il numero cercato di lati del poligono inscritto. Quando tale numero è abbastanza grande, ovvero quando p differisce di poco da C e quindi il vettore s del segmento circolare è trascurabile, le equazioni 2.6 possono essere riscritte come:

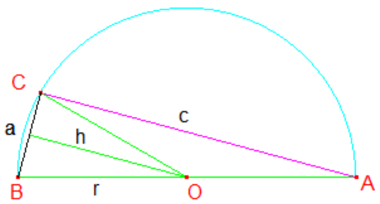
$$\frac{P-p}{p} \approx \frac{P-p}{C} \approx \frac{s}{r}.$$

Quindi grazie a 2.5 e 2.7, ora abbiamo:

$$\frac{P-p}{C} < \frac{r}{60^9} \cdot \frac{1}{C} \approx \frac{1}{60^9}\left(\frac{1}{6} - \varepsilon\right),\ \varepsilon < \frac{1}{126}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6} - \varepsilon \approx \frac{8}{60} \Rightarrow \frac{P-p}{C} \approx \frac{s}{r} \approx \frac{8}{60^{10}}$$

E di conseguenza per $r = 60$ otteniamo $s = \frac{8}{60^9}$. Al-Kashi fornisce quindi una stima della corda c che sottende l'arco di angolo supplementare a quello sotteso dal lato del poligono inscritto.



Egli considera che la corda c sia uguale al doppio dell'apotema del poligono inscritto, h:

$$c \approx 2h = 2(r-s) \approx 2r - \frac{16}{60^9} \quad (2.8)$$

Grazie a 2.4 e 2.8, ottiene la seguente stima del lato del poligono inscritto:

$$a \approx \sqrt{(2r)^2 - (2r-2s)^2} = \sqrt{8rs - 4s^2}$$

e, nel caso di un cerchio di raggio 60:

$$a < \sqrt{8rs} = \sqrt{\frac{64}{60^8}} = \frac{8}{60^4}. \quad (2.9)$$

In questo modo la precisione voluta per la misura del cerchio sarà ottenuta non appena il poligono inscritto di un cerchio di raggio 60 abbia lato non superiore a 8 quarti (2.9).

Al-Kashi costruisce dunque una tabella degli archi, dividendo a metà un certo numero di volte l'arco di angolo 120°. Dopo 28 di queste divisioni, ottiene un arco più piccolo di 6 quarti, la cui corda soddisfa la disuguaglianza 2.9.

Il numero di lati di un poligono inscritto deve allora essere uguale a $3 \cdot 2^{28} = 805306368$.

Al-Kashi determina poi il numero di ordini sessagesimali necessario al calcolo della lunghezza di un lato. Egli considera infatti che si debba moltiplicare tale lunghezza per il numero di lati, ovvero per un numero ove l'ordine di grandezza è di 60^5, e che il risultato nel caso di un cerchio di raggio 60 debba essere esatto fino agli ottavi.
Egli prende anche in considerazione il fatto che tra le operazioni da effettuare, ci sono delle elevazioni al quadrato. Anche se il suo ragionamento è incompleto, egli arriva ad una conclusione corretta: nel caso di un cerchio di raggio 60, la precisione ottenuta è quella desiderata se i calcoli vengono effettuati fino al 18esimo ordine sessagesimale.
In realtà, il grado di precisione richiesto sarebbe di molto inferiore. Egli ne usa uno così elevato forse per evitare delle differenze impreviste nei diversi calcoli. Dunque noi potremmo accontentarci di molte meno cifre esatte.

Il calcolo delle corde $c_1, ..., c_{28}$ è contenuto in 28 tabelle estremamente dettagliate. Il calcolo delle radici quadrate, richiesto per l'equazione 2.3, è verificato attraverso degli elevamenti al quadrati ausiliari.
Se poniamo $r = 60$, otteniamo:

$$c_k = 60\sqrt{2 + \sqrt{2 + ... + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}},$$

con k il numero dei radicali presenti.

2.2.2 Esempio. Calcoliamo la corda c_3.

$$c_3 = \sqrt{r(2r + c_2)} = \sqrt{r(2r + \sqrt{r(2r + \sqrt{r(2r + c_0)})})}$$

$$\Rightarrow c_3 = \sqrt{60(2 \cdot 60 + \sqrt{60(2 \cdot 60 + \sqrt{60(2 \cdot 60 + 60)})})} =$$

$$= \sqrt{60(2 \cdot 60 + \sqrt{60(2 \cdot 60 + 60\sqrt{3})})} = \sqrt{60(2 \cdot 60 + 60\sqrt{2 + \sqrt{3}})} =$$

$$= 60\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}.$$

Dopo aver determinato, alla fine della 28esima tavola, il quadrato del lato cercato: $a_{28}^2 = d^2 - c_{28}^2$, otteniamo il lato stesso.
Per $r = 1$ abbiamo quindi:

$$a_{28} = \sqrt{4 - 2 - \sqrt{2 + ... + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + ... + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}.$$

Al-Kashi determina il perimetro del poligono inscritto di $3 \cdot 2^{28}$ lati. L'uguaglianza approssimata

$$\frac{P_{28} - p_{28}}{p_{28}} \approx \frac{r - \frac{c_{28}}{2}}{\frac{c_{28}}{2}} \Rightarrow P_{28} \approx (\frac{r - \frac{c_{28}}{2}}{\frac{c_{28}}{2}} \cdot p_{28}) + p_{28}$$

fornisce, grazie a 2.8, il perimetro del poligono circoscritto. Infine, al-Kashi prende come lunghezza della circonferenza la media aritmetica $\frac{P_{28}+p_{28}}{2}$ che per il raggio di 60, risulta essere:

$$6\ 16\ 59^{i}\ 28^{ii}\ 1^{iii}\ 34^{iv}\ 51^{v}\ 46^{vi}\ 14^{vii}\ 50^{viii}.$$

Lo stesso numero fornisce, per $r = 1$, il valore 2π se spostiamo tutte le cifre di una posizione sessagesimale verso destra, dividendo cioè tutto per 60. Tutte e 10 le cifre sessagesimali del risultato sono esatte, e dunque al-Kashi verifica ancora una volta i suoi calcoli e mostra che gli errori che possono essere stati introdotti nelle ultime cifre dei valori intermedi, non hanno influenzato il risultato finale.

Al-Kashi converte ora il valore 2π in decimali: $2\pi = 6,2831853071795865$, ove il numero delle cifre concorda con quello delle cifre del sistema sessagesimale. Infatti:

$$\frac{1}{10^{16}} - \frac{1}{60^{9}} < \frac{1}{2 \cdot 60^{10}}.$$

È proprio all'interno del *Trattato sul cerchio* che i decimali sono apparsi per a prima volta in un'opera di al-Kashi.

2.3 Risultati principali dopo al-Kashi

La misura del cerchio di al-Kashi è un brillante risultato, che supera di molto tutti i precedenti. Esso rappresenta l'apice del calcolo numerico nei paesi arabi.

Nel 1597 A. Van Roomen arrivò al medesimo risultato di al-Kashi, usando un poligono di 2^{30} lati. Questo risultato è stato migliorato da L. Van Ceulen che nel 1615, usando un poligono di $6 \cdot 2^{29}$ lati, ha calcolato π fino alla 20esima cifra decimale, e poco dopo fino alle 32esima. François Viète (1540-1603) con poligoni di $6 \cdot 2^{16}$ lati stima π compreso tra 3,1415926535 e 3,1415926537 e nel 1593 pubblica una formula che, almeno in Europa, è forse la prima espressione analitica infinita di π:

$$\pi = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdot \ldots}.$$

Anche questa formula viene ottenuta con un procedimento archimedeo, partendo dall'area di un quadrato iscritto in un cerchio di raggio 1 ed ottenendo in modo ricorsivo l'area dei poligoni regolari con 8, 16, 32,... lati.
I metodi di calcolo della circonferenza lasciano ovviamente pensare che la circonferenza e il diametro di un cerchio sono incommensurabili. Infatti, il processo di calcolo si rivela illimitato.
Fu J.H.Lambert il primo a dimostrare l'irrazionalità di π, ma già nella Letteratura araba vi era la convinzione che π fosse un numero irrazionale.
Nel suo trattato dei *Dalalat al-ha'irin (La guida dei perplessi)*, redatta intorno al 1190, Maimonides afferma che non possiamo calcolare in modo esatto $\sqrt{5000}$ o il rapporto tra la circonferenza di un cerchio e il suo diametro, poiché "il calcolo non finisce mai".
A questo proposito, al-Kashi osserva che il valore che egli è riuscito a ottenere per π è molto più preciso di quello di Archimede, e che **"nessuno può conoscere tutta la verità sulla questione se non Allah."**

Capitolo 3

Risoluzione algebrica dell'equazione della trisezione dell'angolo

3.1 Contesto storico

Osservatorio di Samarcanda

Le tavole trigonometriche più esatte redatte dagli studiosi dell'Islam si ottennero all'Osservatorio di Ulugbek. Il sovrano di Samarcanda, figlio minore di Tamerlan, Muhammad Guragan Ulugbek, non fu solo un protettore delle scienze ed uno degli uomini più colti della sua epoca, ma ebbe un'attività scientifica intensa.

Egli fondò a Samarcanda e in altre città parecchie Università e fece costruire proprio a Samarcanda, intorno agli anni '20 del XV secolo, un Osservatorio dotato degli strumenti più perfezionati del periodo. Un gran numero di matematici ed astronomi vi lavorarono duramente sotto la direzione di Gamsid Giyat ad-Din al-Kashi, che come indica la prefazione della *Chiave dell'Aritmetica* si trovava già a Samarcanda nel 1427. Sebbene al-Kashi

non lavorò per un lungo periodo all'osservatorio, le sue opere di matematica e astronomia, in particolare la *Zig haggani*, redatta in persiano nel 1413-1414 esercitò una grande influenza sulla Scuola di Samarcanda. Oltre ad al-Kashi, altri studiosi partecipanti alle osservazioni e alle ricerche teoriche furono: Salah ad-Din Musa ibn Muhammad adi-Zada ar-Rumi (originario dell'Asia Minore, le cui opere sono state collegate a quelle di al-Kashi), Ala ad-Din Ali ibn Mhuammad al-Kassi (dopo la morte di Ulugbek emigrò all'estero insediandosi ad Instanbul), Abd al-ali ibn Mhuammad al-Birgandi ed infine Ulugbek stesso.
All'Osservatorio di Samarcanda si trovano le celebri tavole trigonometriche *Zig Ulugbek* o *Zig Guragani*, terminate nel 1440 subito dopo la morte di al-Kashi e Qadi-Zaba.
Queste tavole trigonometriche sono molto vicine come contenuti alle altre "Zig", ma se ne distinguono per la loro perfezione ed esattezza.
La tavola dei seni è stabilita per archi che variano di minuto in minuto, allo stesso modo quella delle tangenti fino a 45°. Per gli angoli superiori a 45° le tabelle delle tangenti sono stabilite per archi varianti di $5'$ in $5'$. Queste tabelle sono impostate su 5 ordini sessagesimali e sulla soluzione dell'equazione cubica della trisezione dell'angolo per il calcolo approssimato del $\sin 1°$ conoscendo il $\sin 3°$.
Quest'opera contiene, inoltre, il più accurato e preciso catalogo stellare mai compilato fino a quel tempo, superiore a tutti i cataloghi precedenti, compreso l'*Almagesto* di Tolomeo. A causa degli errori trovati nelle precedenti tabelle e cataloghi, Ulugbek rideterminò la posizione di 992 stelle a cui ne aggiunse 27 prese dal *Libro delle stelle fisse* di Abd al-Rahman al-Sufi, situate a declinazioni troppo meridionali per poter essere osservate da Samarcanda. Ulugbek determinò l'inclinazione assiale della Terra in $23,52$ gradi, la migliore misura ottenuta fino ad allora.
Le prime soluzioni del problema della trisezione dell'angolo si devono ai greci e agli arabi attraverso costruzioni geometriche. Abu Said Ahamad ibn Muhammad ibn Abd al-Galil as-Sigzi (951-1024 circa) risolse per la prima volta questo problema come intersezione di un cerchio e di una iperbole equilatera.
Consideriamo l'equazione di terzo grado $x^3 + cx^2 + bx = a$. Essa viene trasformata ponendo, $b = p^2$ ed $a = p^2 s$, in

$$x^2(x + c) = p^2(s - x)$$

ed è risolta attraverso l'intersezione tra il cerchio $y^2 = (x + c)(s - x)$ e l'iperbole $x(y + p) = ps$.
Nel XI secolo ci si trova davanti al problema espresso sotto forma di equazione di terzo grado e nasce la necessità di risolverlo numericamente.
Al-Kashi sviluppa una procedura originale di iterazione che si distingue per

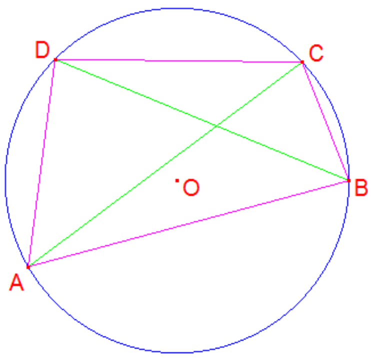
semplicità e rapida convergenza. Il suo trattato *Sulla corda e il seno* ("Risalat al-watar wa-l-gayb") non è mai stato ritrovato, ma viene menzionato all'inizio della *Chiave dell'aritmetica*, con l'indicazione che il metodo utilizzato per calcolare il $\sin 1°$ si deve proprio ad al-Kashi.
Noi conosciamo il suo metodo grazie alla descrizione dettagliata lasciata dal figlio minore di Qadi-Zaba. Egli esercitava le sue attività in diverse città della Turchia e scrisse nel 1500 un commento alle tavole astronomiche di Ukugbek intitolato: "Regole delle operazioni e correzione delle tavole". Nella spiegazione delle tavole trigonometriche, Miram Salabi descrisse il calcolo del $\sin 1°$ secondo un metodo già usato da Abul-Wafa, ma poi si riferì all'opera del nonno e disse: "La perla della gloria e l'onore della sua epoca, Gamsit Giyat ad-Din, utilizzando il metodo dell'al-gabr wa-l-mugabala e considerando il seno come una 'cosa' (incognita) rimadò questo problema a quello seguente: 45 unità del primo ordine moltiplicate per la cosa sono uguali alla somma del cubo di un numero."

3.2 Equazione della trisezione

L'equazione della trisezione dell'angolo si basa all'origine su due importanti teoremi: quello di Tolomeo e quello di Euclide, conseguentemente ai quali quando due corde si intersecano in un cerchio il prodotto dei segmenti di una determinati dall'intersezione una è uguale al prodotti dei segmenti dell'altra, determinati dall'intersezione.

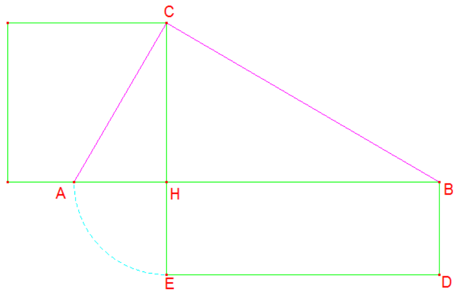
3.2.1 Teorema. *Il teorema di Tolomeo stabilisce che: se un quadrilatero è inscritto in una circonferenza, la somma dei prodotti delle coppie di lati opposti è uguale al prodotto delle sue diagonali. In altre parole, dato un quadrilatero $ABCD$ inscritto in una circonferenza, vale la seguente relazione:*

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$$

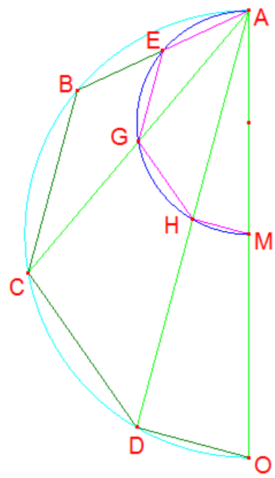


3.2.2 Teorema. *Il teorema di Euclide stabilisce che: in un triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo che ha per lati le proiezioni dei due cateti sull'ipotenusa; ossia vale la seguente relazione:*

$$CH^2 = BH \cdot BD$$



Consideriamo una semicirconferenza ABO di raggio R.
Supponiamo che le porzioni di archi $\overset{\frown}{AB}$,$\overset{\frown}{BC}$ e $\overset{\frown}{CD}$ siano uguali. Costruiamo sul semidiametro AM un seconda semicirconferenza AEM, se tracciamo le corde AB, AC e AD, allora le porzioni di archi $\overset{\frown}{AE}$,$\overset{\frown}{EG}$ e $\overset{\frown}{GH}$ di questa circonferenza saranno uguali tra loro. Il valore della corda AH è noto, bisogna trovare quello della corda che sottende l'arco $\overset{\frown}{AE}$.



Ora applichiamo al quadrilatero $AEGH$ il teorema di Tolomeo ($AE = EG = GH$ e $AG = EH$):

$$AE^2 + AE \cdot AH = AG^2 \tag{3.1}$$

Siccome $AG = GC$ (un raggio che cade perpendicolarmente divide una corda in due parti uguali), si ottiene grazie al teorema di Euclide:

$$AG^2 = BG \cdot (2R - BG) \tag{3.2}$$

In più $AB^2 = BG \cdot 2R$ (oppure $BG = \dfrac{AB^2}{2R}$), equivalentemente

$$AB = 2AE \qquad (oppure BG = \frac{2AE^2}{R}).$$

Sostituendo BG nella (3.2), otteniamo:

$$AG^2 = 4AE^2 - \frac{4AE^4}{R^2} \tag{3.3}$$

L'equazione della trisezione di un angolo qualunque si ottiene sostituendo la (3.3) nella (3.1):

$$4AE^3 + R^2 \cdot AH = 3R^2 \cdot AE. \tag{3.4}$$

Se indichiamo con 6α l'angolo intercettato dall'arco $\widehat{AH}$ e con 2α l'angolo intercettato dall'arco $\widehat{AE}$, abbiamo $AH = R \sin 3\alpha$ e $AE = R \sin \alpha$ che sono dati dalla noto formula dell'angolo triplo:

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha,$$

che in notazione trigonometrica apparve per la prima volta in Vietè.
Ispirandosi ad al-Kashi, Miram Salabi pose $R = 60$ e l'arco $AH = 6°$. Egli calcolò il $\sin 3°$ con l'aiuto di un ragionamento elementare partendo dal $\sin 72°$ (ossia il lato di un pentagono regolare) e dal $\sin 60°$. Egli pose:

$$AE = 60 \cdot \sin 1° = x,$$

poi:

$$AH = 60 \cdot \sin 3° = 3\ 8\ 24\ 24\ 59\ 34\ 28\ 15 \qquad \textit{sessantesimi}$$

ed ottenne l'equazione:

$$45 \cdot 60x = x^3 + 47\ 6\ 8\ 29\ 51\ 53\ 37\ 3\ 45 \qquad \textit{sessantesimi.}$$

Metodo di al-Kashi
Il metodo di al-Kashi per risolvere l'equazione della forma:

$$x = \frac{q + x^3}{p} \tag{3.5}$$

è il seguente:
sia,

$$x = a + b + c + \dots, \tag{3.6}$$

a, b, c sono i valori numerici successivi in unità sessagesimali, calcolati a partire dalla prima cifra non nulla.
Siccome sappiamo che la radice cercata è molto piccola, possiamo trascurare la terza potenza ed ottenere, con l'aiuto dell'equazione 3.6, il primo valore approssimato come "primo quoziente" dalla divisione del "dividendo" (ossia del termine costante q) con il "divisore" (ossia il coefficiente p della prima

potenza dell'incognita). L'operazione continua fino alla prima cifra non nulla:

$$x_1 = \frac{q}{p} \approx a.$$

Sostituendo x_1 dentro al membro destro dell'equazione 3.5 il valore della radice aumentando di un'unità ossia $(a+b)$ e nel membro a destra il primo valore approssimato di a.
Si ottiene così il primo termine correttivo o il "secondo quoziente" dalla divisione:

$$\frac{q - ap + a^3}{p} = b + \dots,$$

poi utilizza di nuovo la prima cifra non nulla del quoziente (che come ben sappiamo, nel sistema decimale, può essere rappresentato da un numero a due unità).
si ottiene allo stesso modo il secondo termine correttivo o il "terzo quoziente" di:

$$\frac{(q - ap + a^3) - bp + [(a+b)^3 - a^3]}{p} = c + \dots,$$

o in modo equivalente:

$$\frac{q - (a+b)p + (a+b)^3}{p} = c + \dots, \qquad \textit{ecc.}$$

Se indichiamo i valori approssimativi successivi con $x_1 = a$, $x_2 = a + b$, $x_3 = a + b + c$, ecc. otteniamo:

$$x_1 = a,$$

$$x_2 = \frac{q + a^3}{p} = \frac{q + x_1^3}{p},$$

$$x_3 = \frac{q + (a+b)^3}{p} = \frac{q + x_2^3}{p}$$

e in generale, tenendo conto di un numero necessario di cifre sessagesimali:

$$x_n = \frac{q + x_{n-1}^3}{p}.$$

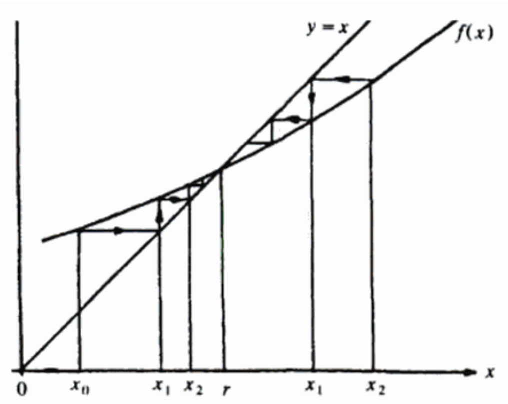
Quando ci si avvicina alla radice la relazione di convergenza è la seguente:

$$\frac{3x^3}{p} < r < 1.$$

Andiamo ad analizzare la convergenza in dettaglio.

3.2.3 Teorema. *Sia f una funzione continua che mappa l'intervallo chiuso $I = [a, b]$ in sè stesso, tale che $|f(x)| \leq M < 1$, $\forall x \in I$. Inoltre, f ha un punto fisso r in I. $\forall x \in I$ la sequenza $\{x_n\}$ ottenuta dall'iterazione di f partendo da x_0 converge a r, e $|x_n - r| \leq M^n \times |x_0 - r|$, $\forall n \geq 1$.*

Per applicare il teorema all'equazione cubica di al-Kashi, $f(x) = \frac{4}{3}x^3 + p$, con $p = \frac{1}{3}\sin 3°$, notando che p è dell'ordine di 0.01, possiamo considerare l'intervallo $I = [0.01; 0.02]$. Siccome $f'(x) = 4x^2$ è positivo in I ed f è crescente in questo intervallo, $f(0.01) > 0.01$ mentre $f(0.02) > 0.02$, segue che f mappa I in sè stesso.



La derivata f' è crescente in I, assume il suo massimo in $x = 0.02$, tale che $|f'(x)| \leq 1.6 \times 10^{-3}$.
Questo giustifica l'affermazione di al-Kashi che ogni iterazione di f produce una cifra decimale più corretta tale che l'errore si riduce di un fattore più piccolo di $\frac{1}{10}$; il teorema garantisce che l'errore si riduce di un fattore 1.6×10^{-3}.

Il procedimento di iterazione di al-Kashi necessita di un numero ristretto di volte in cui viene iterato il processo, ogni qual volta si aumentano le cifre della radice. In ogni processo di iterazione dobbiamo elevare al cubo il valore approssimato ottenuto dalla fase precedente ed effettuare la divisione.
Al-Kashi probabilmente conosceva già il metodo cinese "tian-yuan" per risolvere le equazioni algebriche, ma preferì risolvere l'equazione 3.6 prima con il suo procedimento perchè portava più rapidamente all'obiettivo.
Al-Kashi determinò il $\sin 1°$ con la stessa accuratezza che ebbe nel calcolo di π, cioè in notazione decimale:

$$\sin 1° = 0,017\ 452\ 406\ 437\ 283\ 571.$$

Il metodo di al-Kashi fu il coronamento del lavoro dei matematici dell'Islam sulla risoluzione numerica delle equazioni algebriche, come la teoria geometrica di al-Hayyam lo era stata per la teoria generale delle equazioni di terzo grado.
Hankel scrisse a proposito del metodo di al-Kashi: "non è secondo a nessuno nè in eleganza, nè in finezza a tutti i metodi di approssimazione scoperti in Occidente da Vietè".

Un altro algoritmo iterativo analogo alla procedura di al-Kasi fu utilizzato nel Vicino e Medio Oriente in un'equazione trascendente per stabilire delle tavole utili alla teoria del parallasse. Si trattava di un'equazione della forma:

$$t = \theta - m \sin \theta$$

dove si deve calcolare θ per un valore di m noto e t costante.
Habas al-Hasib, un contemporaneo di al-Huwarismi, fu il primo ad aver utilizzato questo algoritmo. Il suo approccio consisteva nella formazione successiva di valori approssimati:

$$\begin{aligned} \theta_0(t) &= t + m \sin t, \\ \theta_1(t) &= t + m \sin \theta_0(t), \\ &\vdots \\ \theta_n(t) &= t + m \sin \theta_{n-1}(t) \end{aligned}$$

I calcolatori arabi si accontentarono dei primi valori approssimati ottenuti da questa procedura, al-Hasib stesso, si arrestò al valore approssimato di θ_3.
La data di apparizione e l'origine di questa procedura sono sconnesse. Alcuni indizi lasciano supporre che fosse già stato utilizzato in India.
Nel XVII secolo questa equazione venne legata ad un problema di movimento dei pianeti da Keplero che è oggi conosciuta come meccanica celeste.
La matematica numerica dei paesi orientali raggiunse il suo apice grazie alle opere scritte nella Scuola di Samarcanda. La Scuola di Samarcanda cadde in declino dopo l'omicidio da parte di un gruppo di reazionari di Ulugbek nel 1449.
Con la morte di al-Kashi avvenuta verso il 1436 il collasso culturale del mondo islamico fu ancora più completo; il numero di coloro che nel mondo arabo diedero contributi significativi alla matematica prima della sua morte fu considerevole. Dopo al-Kashi però, il numero risultò trascurabile. Fu proprio una circostanza fortunata che, quando la cultura araba cominciava a declinare, la cultura europea fosse in fase di ascesa e si dimostrasse pronta ad accogliere l'eredità spirituale dell'età precedente. La fase araba fu sicuramente una delle più importanti dal punto di vista matematico.

Appendice

La trigonometria sferica

Diamo alcune definizioni fondamentali relative alla geometria della sfera.
Una **superficie sferica** di centro O e raggio r ($r > 0$) è il luogo dei punti dello spazio che hanno la stessa distanza r da un punto fisso O che ne rappresenta il centro, mentre r ne è il raggio.
La **sfera** sempre di centro O e raggio r ($r > 0$) è il luogo dei punti dello spazio la cui distanza dal centro è minore o uguale al raggio.
La sfera è un solido cioè uno oggetto tridimensionale, mentre la superficie sferica è un oggetto bidimensionale costruito nello spazio tridimensionale.
Ogni retta che passa per il centro della sfera interseca la superficie in due punti P e Q che si chiamano **poli**.

Principali elementi che si possono individuare sulla superficie sferica

- il **cerchio massimo** è una sezione della sfera ottenuta con un piano passante per il centro; la corrispondente circonferenza è detta circonferenza massima. Ogni circonferenza individuata da un piano non passante per il centro viene detta **circonferenza minore** (Figura **a**);

- la **distanza sferica** fra due punti A e B, o anche **geodetica**, è la lunghezza minore dei due archi in cui è divisa la circonferenza massima a cui appartengono;

- il **fuso sferico** è ciascuna delle due parti in cui una superficie sferica è divisa da due circonferenze massime (Figura **b**);

- l'**angolo sferico** rappresenta l'ampiezza del fuso sferico (Figura **c**);

- il **triangolo sferico** è la parte di superficie sferica delimitata da tre circonferenze massime che si intersecano a due a due.

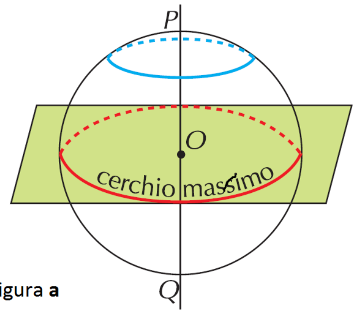


Figura **a**

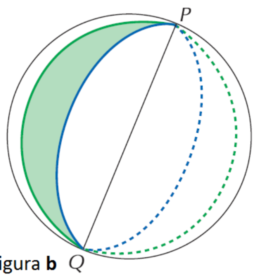


Figura **b**

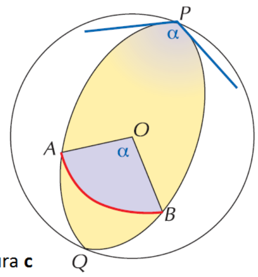
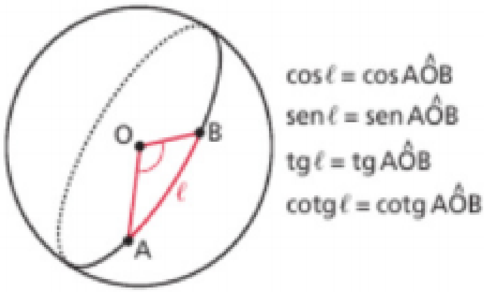


Figura **c**

La sfera di raggio unitario prende il nome di **sfera goniometrica**. Da qui possiamo andare a definire le funzioni goniometriche per la distanza tra due punti A e B e per gli elementi di un triangolo sferico:

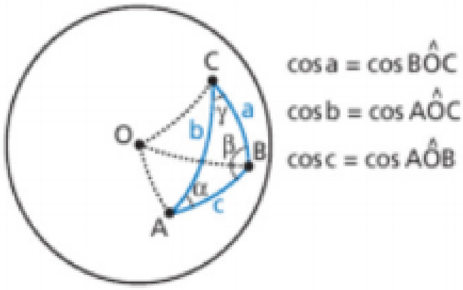
Funzioni goniometriche per la distanza fra due punti

In una superficie sferica si dice coseno della distanza tra due punti A e B il coseno dell'angolo al centro (della sfera) corrispondente. In modo simili sono definiti il seno, la tangente e la cotangente.



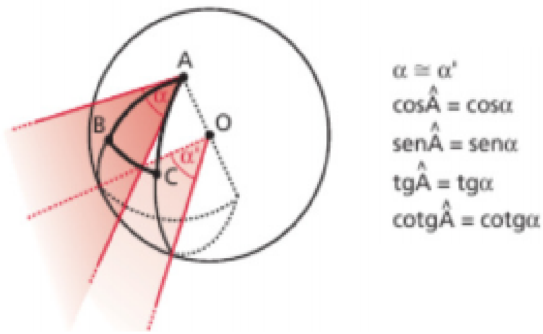
Funzioni goniometriche per i lati

In un triangolo sferico ogni lato corrispondente alla distanza tra due vertici pertanto con la medesima definizione (cioè guardando l'angolo al centro) possiamo parlare di seno, coseno, tangente e cotangente del lato.



Funzioni goniometriche per gli angoli

Anche agli angoli di un triangolo sferico associamo le funzioni goniometriche. Osserviamo solo che in un triangolo ogni angolo coincide con l'angolo del fuso che ha lo stesso vertice ed è congruente all'angolo del corrispondente diedro.



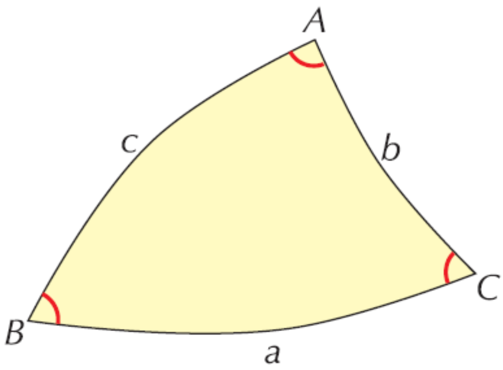
Queste considerazioni permettono di affermare che in un triangolo sferico:

- la somma degli angoli è compresa tra 180° e 540°;
- l'area di un triangolo sferico è uguale a $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi$;
- la somma dei lati è minore di 360°: $a + b + c < 360°$.

In un triangolo sferico valgono i seguenti teoremi:

- **Teorema dei seni**
  In un triangolo sferico il rapporto tra il seno di un angolo e il seno del lato ad esso opposto è costante:

  $$\frac{\sin \hat{A}}{\sin a} = \frac{\sin \hat{B}}{\sin b} = \frac{\sin \hat{C}}{\sin c};$$



- **Teoremi del coseno**
  In un triangolo sferico il coseno di un lato è uguale al prodotto dei coseni degli due lati aumentato del prodotto dei loro seni per il coseno dell'angolo sferico tra essi compreso:

  $$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \hat{A}$$

  $$\cos b = \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos \hat{B}$$

  $$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \hat{C}$$

  In un triangolo sferico il coseno di un angolo è uguale all'opposto del prodotto dei coseni degli altri due angoli aumentato del prodotto dei loro seni per il coseno del lato fra essi compreso:

  $$\cos \hat{A} = -\cos \hat{B} \cdot \cos \hat{C} + \sin \hat{B} \cdot \sin \hat{C} \cdot \cos a$$

  $$\cos \hat{B} = -\cos \hat{A} \cdot \cos \hat{C} + \sin \hat{A} \cdot \sin \hat{C} \cdot \cos b$$

  $$\cos \hat{C} = -\cos \hat{A} \cdot \cos \hat{B} + \sin \hat{A} \cdot \sin \hat{B} \cdot \cos c.$$

Il calcolo sessagesimale

Si indica con il termine sessagesimale un sistema di numerazione posizionale in cui si utilizzino cinquantanove simboli più lo zero per rappresentare i numeri (e in cui quindi la seconda cifra, solitamente quella delle "decine", rappresenta il numero di volte che bisogna aggiungere 60, la terza quante volte bisogna aggiungere 60^2 e così via) o più in generale un sistema di misurazione in cui, pur utilizzando la notazione posizionale, ci sia un rapporto di $\frac{1}{60}$ tra un'unità di misura e un suo sottomultiplo.
All'inizio del Capitolo 2 sul calcolo del π si viene subito introdotti a questo sistema con il calcolo della corda sottesa ad un arco di 2°. Secondo la trigonometria e il valore di π conosciuti al giorno d'oggi otteniamo per una circonferenza di $R = 1$:

$$corda 2^\circ = 2R \sin 1^\circ = 2 \sin\left(\frac{\pi}{180}\right) \approx 0,03490481280 = \alpha.$$

Calcoliamo ora il valore α in base sessagesimale.
L'intero prima lo moltiplico per $60^0 = 1$. In questo caso avendo 0, rimango con 0°.
Quindi moltiplico α per 60 ed ottengo circa $\mathbf{2},094288768$ dove il 2 rappresenta i primi.
Adesso ho $(0^\circ)2^i$. Prendo la parte decimale $0,094288786$ e questa volta moltiplico per 60 ottenendo $\mathbf{5},65732608$, così risultano 5^{ii}.
Itero il procedimento più volte:
$0,65732608 \cdot 60 = \mathbf{39},4395648$, cioè si ottengono 39^{iii};
$0,4395648 \cdot 60 = \mathbf{26},373888$, quindi 26^{iv};
$0,373888 \cdot 60 = \mathbf{22},43328$, ottenendo 22^v e via dicendo.
Risulta quindi che α lo posso scrivere come: $2^i5^{ii}39^{iii}26^{iv}22^v$, esattamente il valore più preciso che compare nel capitolo.
Se avessimo interi che superano i 60 dovremmo invece dividere per 60 (ad esempio il numero 63 una volta diviso per 60 risulta diventare 1 3 in sistema sessagesimale).

Se volessimo invece passare da un numero in sistema sessagesimale ad un numero in sistema decimale, il calcolo risulta essere più semplice, infatti: $2^i5^{ii}39^{iii}26^{iv}22^v = 2 : 60 + 5 : 60^2 + 39 : 60^3 + 26 : 60^4 + 22 : 60^5$ tornando così ad α.

La cronologia del π

2000 a.C.	Babilonesi	$3 + 1/8 = 3,125$
2000 a.C.	Egizi	$(16/9)^2 = 3,160...$
1200 a.C.	Cinesi	3
550 a.C.	Ebrei	3
380 a.C.	Platone	$\sqrt{2} + \sqrt{3} = 3,146...$
250 a.C.	Archimede	$3 + 10/71 < \pi < 3 + 1/7 = 3,142...$
150 d.C.	Tolomeo	$377/120 = 3,1416...$
250	Chung Hing	$\sqrt{10} = 3,162...$
250	Wang Fau	$142/45 = 3,155...$
263	Liu Hui	$3927/1250 = 3,1416$
480	Zu Chongzhi	$3,1415926 < \pi < 3,1415927$
499	Aryabhata	$62832/20000 = 3,1416$
640	Brahmagupta	$\sqrt{10} = 3,162...$
800	Al Khowarizmi	$3,1416$
1220	Leonardo Pisano	$864/275 = 3,1418...$
1429	Al Kashi	16 decimali
1464	Nicola da Cusa	$(3/4)\left(\sqrt{3} + \sqrt{6}\right) = 3,13...$
1573	V. Otho	$355/113 = 3,1415929...$
1583	S. Duchesne	$(39/22)^2 = 3,142...$
1593	F. Viete	9 decimali
1593	A. van Rooman	15 decimali
1609	L. van Ceulen	35 decimali
1630	Grienberger	39 decimali
1674	Seki	10 decimali
1723	Takebe	41 decimali
1730	Kamata	25 decimali
1739	Matsunaga	50 decimali

1665	I. Newton	16 decimali
1699	A. Sharp	71 decimali
1706	J. Machin	100 decimali
1719	F. de Lagny	127 decimali (112 corretti)
1794	G. von Vega	140 decimali
1824	W. Ruthenford	208 decimali (152 corretti)
1844	M.Z. Dase	200 decimali
1847	T. Clausen	248 decimali
1853	W. Lehmann	261 decimali
1853	W. Ruthenford	440 decimali
1874	W. Shanks	707 decimali (527 corretti)
1947	D.S. Ferguson e J.W. Wrench	808 decimali
1949	L.B. Smith e J.W. Wrench	1120 decimali
1949	G.W. Reitwiesner (ENIAC)	2037 decimali
1958	F. Genuys (IBM)	10020 decimali
1961	D. Shanks e J.W. Wrench (IBM)	100265 decimali
1973	J. Guilloud e M. Bouyer (CDC7600)	Un milione di decimali
1989	D. Chudnovsky e G. Chudnovsky	Un miliardo di decimali
2002	Y. Kanada (Hitachi).	Mille miliardi di decimali

Bibliografia

[1] A.P. Youschkevitch, *Les mathèmatiques arabes* , Vrin, Paris, 1976

[2] B.A. Rosenfeld, *A History of Non-Euclidean Geometry - Evolution of the Concept of a Geometric Space*, Springer Science+Business Media, New York, 1988

[3] Enrique A. Gonzàlez-Velasco, *Journey through Mathematics - Creative Episodes in Its History*, Springer Science+Business Media,LLC, New York, 2011

[4] Glen Van Brummelen, *The Mathematics of the Heavens and the Earth - The Early History of Trigonometry*, Princeton University Press, 2009

[5] Marlow Anderson, Victor Katz, Robin Wilson, *Sherlock Holmes in Babylon and Other Tales of Mathematical History* , The Mathematical Association of America, 2004

[6] Leonardo Colzani, *La quadratura del cerchio e dell'iperbole* , Articolo

[7] Focus, *www.focus.it*

[8] MacTutor History of Mathematics, *www-history.mcs.st-and.ac.uk*

[9] Treccani - La cultura Italiana - Enciclopedia, *www.treccani.it/enciclopedia*