Università degli Studi di Ferrara

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E INFORMATICA
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Corso di divulgazione e museologia della matematica

La trigonometria nella civiltà araba

Docente:
Prof.ssa Alessandra Fiocca

Studentesse:
Anna Belloni e Tatiana Menardo

Anno Accademico 2016-2017

Indice

Introduzione

Gli Arabi

Prima di dare inizio alle loro conquiste, gli Arabi erano nomadi e avevano occupato la regione corrispondente alla moderna Arabia. Vennero uniti da Maometto e meno di un secolo dopo la sua morte, avvenuta nel 632, avevano conquistato territori che si estendevano dall'India alla Spagna comprendendo il Nord Africa e l'Italia meridionale. Nel 755 l'impero arabo si spezzò in due regni indipendenti: uno a Oriente con capitale Baghdad e uno a Occidente con capitale Cordoba in Spagna. Una volta completate le loro conquiste, gli antichi nomadi cominciarono a costruire una civiltà e una cultura sviluppando un crescente interesse per le arti e le scienze. Entrambi i centri attiravano gli scienziati e ne favorivano il lavoro, ma Baghdad si rivelò essere il più importante, anche grazie alla fondazione di un'accademia, di una biblioteca e di un osservatorio astronomico. Le risorse culturali che gli Arabi avevano a loro disposizione erano considerevoli. Quando Giustiniano chiuse l'Accademia platonica nel 529 d.C. molti degli studiosi greci che ne facevano parte si trasferirono in Persia e la cultura greca che vi fiorì divenne parte, un secolo dopo, del mondo arabo. Gli Arabi stabilirono contatti anche con i Greci dell'impero bizantino: per esempio, i califfi arabi comprarono manoscritti greci dai Bizantini. L'Egitto, il centro della cultura greca nel periodo alessandrino, era stato anch'esso conquistato dagli Arabi, cosicchè la cultura che vi era sopravvissuta contribuì all'attività scientifica dell'impero arabo. Gli Arabi avevano accesso alla cultura dell'impero bizantino, dell'Egitto, della Siria, della Persia e dei territori che si estendevano più a est, compresa l'India.

Si è soliti parlare di matematica araba, ma essa lo era essenzialmente soltanto per la lingua. La maggior parte degli studiosi erano greci, cristiani, persiani ed ebrei. Bisogna tuttavia dare atto agli Arabi della generosità con cui, dopo il periodo della conquista, trattarono le altre popolazioni e le altre comunità religiose, tant'è vero che gli infedeli poterono lavorare liberamente. Quella di cui gli Arabi entrarono in possesso era fondamentalmente la cultura greca reperibile direttamente nei manoscritti greci o in versioni siriache ed ebraiche. In questo modo divennero loro accessibili tutte le opere più importanti. Intorno all'800 ottennero dai Bizantini una copia degli *Elementi* di Euclide che si affrettarono a tradurre in arabo. La *Sintassi matematica* di Tolomeo fu tradotta nell'827 e assunse agli occhi degli Arabi un carattere eccezionale, quasi divino, diventando nota con il nome di *Almagesto*, che significa "l'opera più grande". Venne tradotto anche il *Tetrabiblos* di Tolomeo e questo libro sull'astrologia acquistò grande popolarità fra gli Arabi. Successivamente divennero loro accessibili anche le opere di Aristotele, Apollonio, Archimede, Erone, Diofanto e degli Hindu. Gli Arabi si dedicarono anche a migliorare le traduzioni già esistenti e scrissero dei commentari. Furono queste traduzioni, alcune delle quali giunte fino a noi, che passarono più tardi in Europa quando gli originali greci erano già andati perduti. Fino al 1300 la civiltà araba dette prova di un notevole dinamismo e la sua cultura si diffuse ovunque.

La geometria e la trigonometria arabe

La geometria araba fu influenzata principalmente da Euclide, Archimede ed Erone. Gli Arabi scrissero commentari critici agli *Elementi* di Euclide contenenti anche degli studi sul postulato delle parallele. Essi sono degni di nota non tanto per i nuovi risultati o le nuove dimostrazioni che offrono quanto per le informazioni che forniscono intorno ai manoscritti greci posseduti dagli Arabi e che in seguito andarono perduti. Un nuovo argomento, divenuto popolare nell'Europa rinascimentale e studiato per la prima volta dal persiano Abu-l-Wafa (1100-1160 circa), è quello delle costruzioni effettuate mediante la riga e un cerchio fisso (cioè, con la riga e con un compasso avente apertura fissa). Gli Arabi compirono qualche progresso in trigonometria. La loro trigonometria, come quella degli Hindu, è aritmetica, e non geometrica (come quella di Ipparco e di Tolomeo). Per esempio, per calcolare un coseno a partire dal seno si servivano dell'identità fondamentale $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ e di passaggi algebrici. Come gli Hindu, essi usavano i seni degli archi piuttosto che le corde del doppio degli archi, anche se il numero delle unità nel seno o nella semicorda dipende dal numero di unità scelte per il raggio. Furono Tabit ibn Qurra (836-901) e l'astronomo al-Battani (nato prima del 858, morto nel 929) ad introdurre fra gli Arabi questo uso dei seni. Gli astronomi arabi introdussero la tangente e la cotangente, in quanto rette contenenti un certo numero di unità, proprio come il seno di un arco era una lunghezza contenente un certo numero di unità. Questi due concetti compaiono nell'opera di al-Battani. Abu-l-Wafa, in un'opera di astronomia, introdusse la secante e la cosecante come lunghezze e calcolò pure delle tavole di seni e di tangenti per angoli che differiscono fra loro di 10 minuti primi. Al-Biruni (973-1048) diede una dimostrazione del teorema dei seni per i triangoli piani. La sistematizzazione della trigonometria in un'opera indipendente dall'astronomia venne portata a termine da Nasir ad-Din at-Tusi (1201-1274) nel suo *Trat-*

tato sul quadrilatero. Quest'opera contiene sei formule fondamentali per la risoluzione dei triangoli rettangoli sferici e insegna anche a risolvere triangoli più generali mediante quello che oggi viene detto triangolo polare. Sfortunatamente, gli Europei non conobbero l'opera di Nasir prima del 1450 circa; fino ad allora la trigonometria rimase, come era stata fin dalle sue origini, un'appendice dell'astronomia sia nei testi sia nelle applicazioni.

Lo sforzo scientifico arabo, per quanto non originale, fu molto vasto. A differenza degli Hindu, gli Arabi proseguirono l'indirizzo astronomico di Tolomeo e si interessarono molto all'ottica e all'astrologia. La matematica era necessaria per l'astronomia, l'astrologia, l'ottica e la medicina (attraverso l'astrologia) anche se una parte dell'algebra, come dice un matematico arabo, era "soprattutto necessaria per i problemi di distribuzione, di eredità, di società e per la misura del terreno". La matematica veniva studiata dagli Arabi soprattutto per far avanzare le scienze che essi coltivavano e non di per se stessa. Essi non erano interessati, come i Greci, a capire il disegno matematico della natura nè, come gli Europei medievali, a capire le vie della divina provvidenza. L'obiettivo arabo, nuovo nella storia della scienza, era quello di acquisire il dominio della natura. Essi pensavano di poter ottenere questo dominio mediante l'alchimia, la magia e l'astrologia che erano parti integranti del loro sforzo scientifico. Gli Arabi non compirono progressi significativi ma assorbirono la matematica greca e hindu, consevandola e trasmettendola. L'attività araba raggiunse il suo culmine intorno all'anno 1000. Fra il 1000 e il 1300 le crociate indebolirono gli Arabi orientali. Successivamente, il loro territorio fu invaso e conquistato dai Mongoli e dopo il 1258 il califfato di Baghdad cessò di esistere. In Spagna gli Arabi furono costantemente attaccati dai cristiani, che li sconfissero definitivamente nel 1492. Questo evento pose fine all'attività matematica e scientifica in quella regione.

La trigonometria, a differenza della geometria euclidea, venne fatta avanzare. L'introduzione del seno o semicorda si rivelò un notevole vantaggio tecnico. Le tecniche aritmetiche e algebriche per maneggiare le identità trigonometriche permisero di rendere più rapidi i calcoli e l'affrancamento della trigonometria dall'astronomia rivelò una scienza che poteva avere applicazioni molto più vaste. L'accettazione dei numeri irrazionali rese possibile assegnare un valore numerico a tutti i segmenti e a tutte le figure a due e tre dimensioni, cioè permise di esprimere le lunghezze, le aree e i volumi mediante numeri. Inoltre, la prassi araba di risolvere le equazioni algebricamente ma di giustificare i procedimenti mediante una rappresentazione geometrica rivelò il parallelismo di queste due branche della matematica.

Capitolo 1

Lo sviluppo della trigonometria

Figura 1.1: Espansione islamica dal VII al X secolo d.C.

Tra i matematici arabi la trigonometria ha occupato un posto importante. Ha fatto da tramite tra la matematica e l'astronomia (che era la scienza più sviluppata di quel tempo), l'instaurazione dei calendari e la gnomonica (teoria dei quadranti solari). Era molto diffusa nelle città islamiche in quanto il tempo era spesso molto soleggiato; inoltre i problemi di trigonometria hanno anche favorito lo sviluppo di un'altra parte della matematica: i differenti metodi di calcolo approssimato.

1.1 Triangoli sferici

Il calcolo dei triangoli sferici è stato necessario per la realizzazione dei rituali d'uso. I musulmani recitano le loro preghiere con il viso rivolto verso la Mecca, città natale di Maometto. Tale direzione è indicata in ciascuna moschea grazie ad una "nicchia" chiamata Qibla e disegnata sopra le lancette su tutti i calendari solari. Consideriamo la longitudine e la latitudine di un punto dato A e della Mecca M , ovvero rispettivamente ϕ_1 e ϕ_2 e λ_1 e λ_2 (si veda la Figura 1.2, in cui la circonferenza rappresenta il meridiano zero). Otteniamo così il triangolo sferico AMP in cui alla sommità vi è il Polo Nord e i cui lati sono $AP = 90° - \phi_1$ e $MP = 90° - \phi_2$, così che l'angolo $\lambda_1 - \lambda_2$ compreso tra questi lati è noto. Dobbiamo allora determinare l'angolo $\widehat{MAP}$. La risoluzione del triangolo ci dà ugualmente il lato AM, vale a dire la distanza tra i punti A e M in gradi, se il raggio della Terra è noto in unità di lunghezza. Il problema considerato è uno dei problemi fondamentali della geografia matematica.

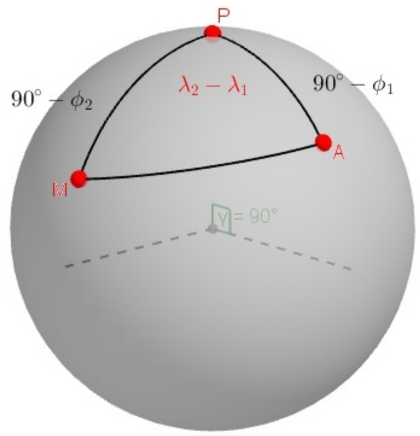


Figura 1.2: Triangolo sferico

Per determinare le longitudini e le latitudini si utilizzava l'astrolabio, [1] uno strumento utilizzato per la misura degli angoli, ereditato dai Greci e poi perfezionato nei paesi islamici.

[1] L'astrolabio è un semplice strumento che mostra cosa si vede in cielo per ogni giorno dell'anno e per ogni ora del giorno e della notte. Il funzionamento dell'astrolabio si basa sul fatto che il movimento (apparente) della sfera celeste è il risultato della combinazione dei movimenti terrestri di rotazione in un giorno e di rivoluzione in un anno: infatti in un disco dobbiamo scegliere il giorno dell'anno e sull'altro l'ora del giorno: facendo coincidere i due punti scelti avremo la rappresentazione del cielo in quel momento.

1.2 Fonti dei matematici arabi

Gli studiosi arabi iniziarono i loro lavori sulla trigonometria studiando le opere dei loro antenati. Verso il 773 uno dei *Surya Siddhanta*[2] fu tradotto in arabo da Abu Abdallah Muhammad ibn Ibrahim al-Fazari (fine VII secolo - inizio IX secolo). Nel IX secolo circolavano traduzioni dell' *Almagesto* di Tolomeo fatte da Sahl al-Tabari e al-Haggag. Furono tradotte anche *Le Sfere* di Menelao (ci sono pervenute proprio grazie alle traduzioni arabe) che gli studiosi arabi arricchirono con dei commentari.

Le tre opere che andiamo a citare costituiscono la base a partire dalla quale le matematiche hanno sviluppato con successo la trigonometria. Gli astronomi di Alessandria avevano introdotto una sola grandezza trigonometrica: la corda di un arco. La proposizione di Tolomeo, equivalente a quella che riguarda il seno di somme di angoli, insieme alla proposizione sulla corda di archi dimezzati, costituiva le fondamenta della tavola greca delle corde. La proposizione di Menelao sul quadrilatero completo è servita alla risoluzione di alcuni casi di triangoli sferici. Gli Indiani avevano sostituito la corda col seno, aggiunto la linea del coseno e il seno verso[3] e costruito una piccola tavola dei seni. I matematici dei paesi islamici hanno preso in prestito queste nuove grandezze trigonometriche studiandone le caratteristiche e risolvendo tutti i casi di triangoli piani e sferici. È per questo che progressivamente innalzarono la trigonometria al grado di scienza autonoma. La parola trigonometria, che significa etimologicamente "misura di un triangolo", apparve per la prima volta in un'opera del 1595, di Bartolomeo Pitiscus[4].

1.3 Contributi dei matematici arabi alla trigonometria

Una delle prime opere di trigonometria fu composta a Baghdad da **al-Huwarizmi** (790-850 circa)[5]. Di quest'opera si può dire che probabilmente le tavole delle tangenti, che erano contenute, furono aggiunte più tardi. Tuttavia si può affermare con certezza che le tangenti e le cotangenti erano

[2] Sono trattati astronomici che costituiscono la base del calendario indù.

[3] $senoverso(x) = 1 - \cos x$

[4] Bartholomaeus Pitiscus, chiamato anche Barthòlemy e Bartholomeo (Grünberg, 24 agosto 1561 - Heidelberg, 2 luglio 1613), è stato un matematico, astronomo e teologo tedesco.

[5] Al-Huwarizmi è stato un importante matematico arabo: scrisse i numeri utilizzando le cifre indo-arabiche e fu uno dei primi ad usare lo zero con una notazione posizionale. La parola algoritmo deriva dal suo nome e il suo trattato *Hisab al-jabr w'al-muqabala* diede origine alla parola algebra.

conosciute nella Casa del Sapere da un collega di al-Huwarizmi, Ahmad ibn Abdallah al-Marwazi, originario della città di Merv e soprannominato **Habas al-Hasib**, ovvero “il calcolatore”. Questo morì tra l’864 e l’874, all’età di quasi cent’anni.

La tangente e la cotangente (così come la secante e la cosecante) inizialmente non sono apparse come linee legate alla circonferenza ma sono state utilizzate nella gnomonica per il confronto di lati di un triangolo rettangolo. Prendiamo l’altezza h della linea verticale di uno gnomone come grandezza fissata; il rapporto tra l’ombra t proiettata dalla barra e h varia in funzione dell’altezza α del sole (Figura 1.3).

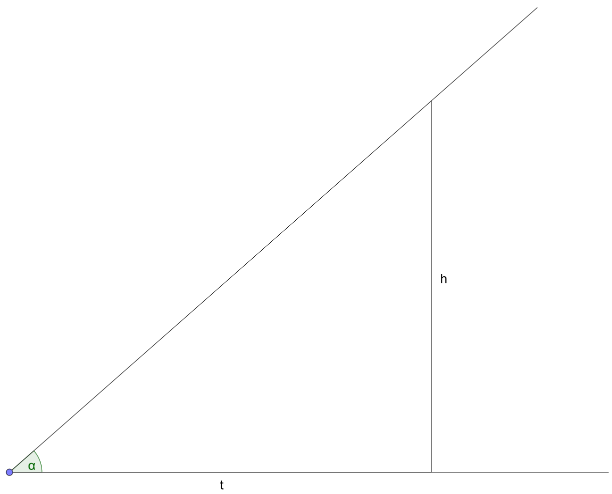


Figura 1.3: Caso di uno gnomone verticale

Habas al Hasib pone $h = 60' = 1$ e calcola una tavola di valori dell’ombra t per $\alpha = 1°, 2°, 3°$, fornendo con precisione i secondi. Questa tavola, vale a dire la tavola di valori della cotangente:

$$t = h \cot \alpha = \cot \alpha$$

permette di determinare l’altezza del sole a partire dalla lunghezza dell’ombra e inversamente la lunghezza dell’ombra a partire dall’altezza del sole. Nel caso di uno gnomone orizzontale fissato perpendicolarmente ad un muro verticale (Figura 1.4) Habas inventò una tavola di “ombre inverse”, ovvero dei valori della tangente:

$$\tau = h \tan\alpha = \tan\alpha\,.$$

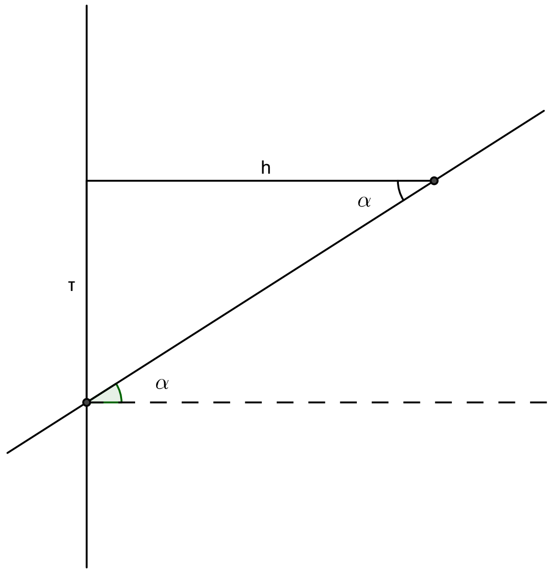


Figura 1.4: Caso di uno gnomone orizzontale

Anche se in futuro si utilizzeranno i rapporti dei valori di seno e coseno invece di quelli della tangente e cotangente, numerosi matematici potranno giungere a nuovi risultati grazie all'esistenza di tavole di tangenti e cotangenti che permettono di facilitare considerevolmente i calcoli trigonometrici. Già in Habas l'utilizzo della tangente e della cotangente non si limitò alla gnomonica. Costui ha anche definito la relazione tra l'ascensione in linea retta del sole α, la declinazione δ [6] e l'inclinazione ε dell'eclittica con la formula seguente:

$$\sin\alpha = \tan\delta\cot\varepsilon\,.$$

Non è escluso che Habas fosse influenzato dai lavori indiani, dove si potevano trovare dei calcoli effettuati con l'aiuto di "ombre". Tuttavia l'averle

[6] In astronomia, la declinazione δ (spesso abbreviata in Dec) rappresenta una delle coordinate equatoriali che serve, insieme all'ascensione retta, per determinare l'altezza di un astro sulla sfera celeste. Più specificamente è l'angolo celeste al centro della terra sotteso da un arco di meridiano celeste compreso fra l'equatore celeste e il parallelo passante per l'oggetto: è la latitudine proiettata sulla sfera celeste anzichè sulla superficie terrestre. Per convenzione i punti a nord dell'equatore celeste hanno declinazione positiva, mentre quelli al di sotto hanno declinazione negativa.

introdotte e l'averle messe sotto forma di tavole dei valori della tangente e cotangente così come l'averle utilizzate nell'astronomia costituivano una novità importante. I termini di *zill* (ombre) e *zill makus* (ombre inverse) sono delle traduzioni dal sanscrito. In latino sono state tradotte alla lettera. Per esempio, nella traduzione latina delle tavole di al-Huwarizmi, fatte da Adelardo di Bath, si parla di *umbra recta* (ombra diretta) e di *umbra versa* (ombra inversa). Il termine di tangente, che etimologicamente significa "che tocca", è stata introdotta nel 1583 da Thomas Fincke [7]; quelle della cotangente e del coseno sono state introdotte da E. Gunter nel 1620.

Nello stesso ordine di idee, Habas applica al caso di uno gnomone verticale la nozione di cosecante, conosciuta come "diametro dell'ombra" per un'altezza data del sole, vale a dire l'ipotenusa. Ha anche costruito una tavola di valori della cosecante per degli intervalli che variano di grado in grado. L'importanza teorica delle funzioni secanti e cosecanti è minima, ma il loro utilizzo, con l'introduzione dei logaritmi, è stato molto prezioso nelle applicazioni poichè, grazie all'esistenza delle tavole di queste funzioni, si poteva sostituire la divisione con la moltiplicazione. La secante e la cosecante sono state molto utilizzate nelle opere europee del XVI e XVII secolo. Il termine di secante è dovuto sempre a Thomas Fincke.

Al Huwarizmi e Habas hanno continuato per molto ad utilizzare la corda e contemporaneamente il seno, in ambito astronomico. Numerosi matematici impiegavano spesso entrambe le grandezze in una sola e stessa opera; altri, invece, preferirono usare unicamente le corde. Col passare del tempo si è diffuso sempre più l'utilizzo delle grandezze trigonometriche. È così che noi troviamo presso l'eminente astronomo e matematico Abu Abdallah Muhammad ibn Gabir **al-Battani**[8] una teoria di queste grandezze molto ampliamente sviluppate. Questo studioso è originario di Harran o dei dintorni di questa città e appartiene, come Tabit ibn Qurra, alla setta dei Sabei. Esercita la sua professione a Raqqa. Nella sua opera di astronomia, *La Revisione dell'Almagesto*, fa sistematicamente uso delle grandezze trigonometriche, il seno e il seno verso intervennero per angoli che variano da zero a 180°. Siccome il coseno di un angolo si considera come il seno di un angolo complementare e i numeri negativi non si utilizzano, il seno verso di un an-

[7] Thomas Finke (Flensburgo, 6 gennaio 1561 - Copenaghen, 24 aprile 1656) è stato un matematico e fisico danese, che insegnò all'Università di Copenhagen per più di 60 anni. Le sue scoperte più importanti sono raccolte nel libro *Geometria Rotundi*, pubblicato nel 1583, nel quale introduce le denominazioni moderne delle funzioni trigonometriche, tangente e secante.

[8] Al-Battani, noto anche come Albategnius, è stato un importante matematico e astronomo arabo. Fece accurate misurazione sulle stelle, sulla luna e sui pianeti. Questi suoi medoti di misurazione fuorono successivamente impiegati da nuerosi astronomi.

golo α del secondo quadrante è definito non per una differenza ma per una somma $r + r\sin(\alpha - 90°)$. Tra le diverse relazioni che legano le grandezze trigonometriche fornite da al-Battani, citiamo le successive relazioni (a dire il vero erano già note da Habas):

$$\frac{\cot\alpha}{r} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,, \ \frac{\tan\alpha}{r} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\,, \ \frac{\sin\alpha}{r} = \frac{r}{\csc\alpha}$$
$$\frac{\cos\alpha}{r} = \frac{r}{\sec\alpha}\,, \ r\sec\alpha = \sqrt{r^2 + r^2\tan^2\alpha}$$
$$r\csc\alpha = \sqrt{r^2 + r^2\cot^2\alpha}\,, \ \frac{\sin\alpha}{r} = \frac{\tan\alpha}{\sec\alpha}\,.$$

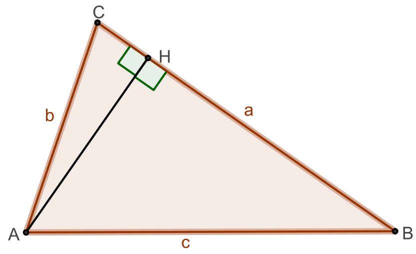
Gli elementi di trigonometria sono esposti in modo ancora più sistematico nel trattato di astronomia di **Abu-l-Wafa**: *Il libro perfetto* (*Kitab al-Kamil*). Nella prefazione di quest'opera Abu-l-Wafa scrive: "In questo libro abbiamo aperto una via che nessuno dei nostri antenati aveva affrontato prima di noi; abbiamo evitato i metodi noti quando il loro utilizzo si è rivelato difficile per gli studiosi, si veda per esempio il metodo del quadrilatero o la regola delle sei grandezze. Abbiamo anche introdotto parecchie proposizioni di cui i Greci non avevano parlato. Abbiamo calcolato le tavole con la più grande cura". Parleremo più avanti della trigonometria sferica e del calcolo delle tavole. Notiamo solamente che Abu-l-Wafa definisce tutte le grandezze trigonometriche in funzione della circonferenza. Per esempio la tangente non è definita attraverso un triangolo rettangolo ma come una retta situata sulla tangente di una circonferenza. Aggiunge la relazione:

$$\frac{\tan\alpha}{r} = \frac{r}{\cot\alpha}$$

e dà qualche regola in cui considera il raggio uguale a 1. Enuncia il teorema sul seno di una somma e di una differenza di angoli facendo intervenire solo il seno (si veda la formula 3.1). Talvolta fornisce anche le regole della trigonometria delle corde:

$$\frac{corda\,\alpha}{corda\,\alpha/2} = \frac{2\,corda\,(180° - \alpha/2)}{1}\,.$$

I matematici dei paesi islamici hanno risolto i triangoli piani con dei mezzi molto rudimentali e, per tale ragione, in un modo spesso complicato. Per molto tempo i triangoli non rettangoli furono decomposti in due triangoli rettangoli, secondo il procedimento degli antichi, per mezzo di un altezza. Siano per esempio b e c i due lati di un triangolo e l'angolo C opposto a questi due:



Al-Battani calcola il terzo lato nel modo seguente. Innanzitutto calcola l'altezza AH e il segmento CH. Ottiene poi la lunghezza di HB a partire dai valori di AB e AH applicando il teorema di Pitagora e poi il valore del lato $a = CH + HB$. Ovviamente al-Battani non conosceva il teorema dei seni per i triangoli piani. È stato Abu Nasr Mansur ibn Ali ibn Iraq (970-1036), uno dei traduttori delle *Sfere* di Menelao ad aver dimostrato questa proposizione. Il suo allievo **al-Biruni**[9] e altri ancora l'hanno dimostrata dopo di lui.

Si pensava di non poter sempre costruire un triangolo di cui si conoscono due lati e l'angolo opposto a uno di essi. Invece questa costruzione è possibile, possono esistere una o due soluzioni. È quello che ha mostrato **Gabir ibn Aflah** (1100-1160 circa) [10]. In Europa Regiomontano[11] ha attirato l'attenzione su questa difficoltà, ma fu solo Francois Viète a darne un' analisi completa.

Anche il caso di un triangolo di cui si conoscono due lati e l'angolo compreso tra essi si riconduce ai triangoli rettangoli. Si calcolavano anche i segmenti

[9] Al-Biruni è stato uno dei più importanti matematici arabi. Ha dato notevoli contributi non solo in ambito matematico ma anche in fisica, astronomia, storia e medicina.

[10] Gabir ibn Aflah è spesso conosciuto con il nome latinizzato Geber. Nonostante non sia annoverato tra i più celebri matematici Arabi, riulta importante per lo sviluppo della matematica poichè le sue opere sono state tradotte in latino e quindi erano accessibili per i matematici europei, a differenza dei lavori di matematici più famosi come Abu'l-Wafa.

[11] Regiomontano, pseudonimo di Johannes Müller da Königsberg (Unfinden, 6 giugno 1436 - Roma, 6 luglio 1476), è stato un matematico, astronomo e astrologo tedesco.

generati su un lato dall'altezza alzata su questo lato, poi si calcolava la stessa altezza. Allora si determinava, con l'aiuto di un triangolo rettangolo, il terzo lato e gli altri due angoli. Infine, per conoscere gli angoli di un triangolo di cui sono dati i tre lati, si elevava un'altezza su un lato qualunque e si calcolava; dopo la proposizione di Euclide sul quadrato di un lato opposto a un angolo acuto o a un angolo ottuso, i segmenti si determinavano dai piedi dell'altezza. Per una ragione ignota l'importante formula:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,\cos\alpha\,,$$

contenuta in una proposizione di Euclide [12] è sfuggita all'attenzione dei matematici dell'Islam. Essi hanno affrontato più volte delle questioni che si avvicinavano a questo argomento e lo stesso al-Biruni ha enunciato questo teorema in merito alla soluzione di un problema ma senza darvi importanza. Solamente molto più tardi **al-Kasi** (1390-1450 circa) ha espresso il teorema sul quadrato di un lato in funzione dei lati b e c dell'angolo α nella forma:

$$a^2 = (b \pm c\,cos\alpha)^2 + c^2\,\sin^2\alpha$$

(il doppio segno $\pm$ indica che il coseno dell'angolo ottuso era considerato come il coseno del suo supplementare). Quindi basta sviluppare il membro di destra dell'equazione qui sopra per ottenere la formula usuale del coseno. Sotto la forma attuale la si rincontra per la prima volta con Viète.

Il numero di formule trigonometriche utilizzate dai matematici dell'Islam era relativamente ristretto. Talvolta non si sapeva estrarre le proposizioni generali che erano contenute implicitamente nei procedimenti impiegati. Al-Kasi, per esempio, volendo calcolare l'area di un triangolo, dà la formula che permette di calcolare il raggio del cerchio inscritto:

$$r = \frac{bc\,\sin\alpha}{a+b+c}$$

e indica che l'ha scoperto lui stesso. Nell'esempio che segue immediatamente questa formula, dice che l'area di un triangolo si ottiene moltiplicando il raggio del cerchio inscritto per la metà del perimetro:

$$\frac{r\,(a+b+c)}{2}\,.$$

La formula:

$$S = \frac{bc\,\sin\alpha}{2}$$

[12] Libro II, proposizione 12-13.

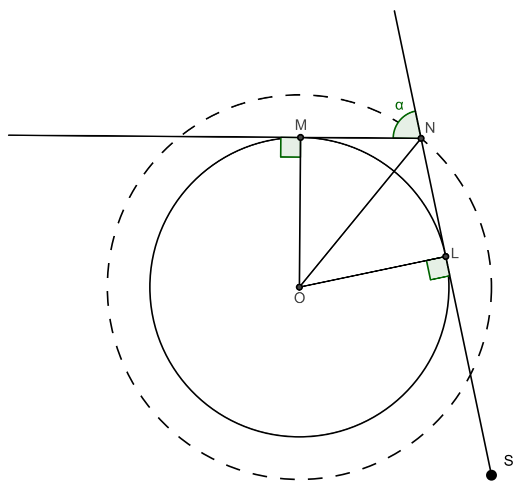
risulta, per così dire, quasi automaticamente. Tuttavia, al-Kasi non enuncia alcuna regola particolare che permette di calcolare l'area di un triangolo di cui si conoscono due lati e l'angolo compreso tra quest'ultimi. È W. Snell che ne dà la formula, nel 1627.

Grazie all'astronomo e matematico Abu-l-Hassan Ali ibn Abi Sa id Abdel Rahman ibn Ahmad ibn **Yunis** (950-1009), che esercitò la sua attività al Cairo e fu un eccellente osservatore e autore di tavole astronomiche, troviamo la relazione equivalente alla formula:

$$\cos\alpha\,\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

che ha stabilito con l'aiuto della proiezione ortogonale. Questa relazione è stata utilizzata nel XVI secolo da Tycho Brahe e da altri autori per sostituire la moltiplicazione dei numeri con un'addizione. Più tardi questa stessa formula è servita a mettere sotto forma logaritmica la somma di due coseni o di due seni.

La determinazione dell'altezza dell'atmosfera, fatta per la prima volta da **ibn al-Gayyani**, rappresenta un esempio interessante e molto semplice dal punto di vista matematico dell'applicazione della trigonometria alle scienze naturali.



Questa determinazione poggia sul principio che il crepuscolo si prolunga purchè il sole non si abbassi di più di 19° al di sotto dell'orizzonte. Sia N una nuvola alta che verso la fine del crepuscolo riflette verso l'osservatore M il raggio SN del Sole.

L'angolo che il raggio forma con l'orizzonte è $\alpha = 19°$. Secondo la legge della riflessione $LNO = MNO$. Nel triangolo rettangolo OMN, l'angolo MNO è allora uguale a $80° \, 30'$ e si ottiene per l'altezza dell'atmosfera:

$$h = \frac{r}{\sin 80° \, 30'} - r \, .$$

Secondo i risultati di al-Gayyani, basati sulla misura di grado di latitudine di quell'epoca, l'altezza dell'atmosfera è dai 10 ai 12 kilometri. Questo risultato è evidentemente molto lontano dal valore reale dell'altezza, in particolare perchè al-Gayyani non ha tenuto conto della riflessione dei raggi luminosi, pur conoscendo il fenomeno, e ha identificato il limite dell'atmosfera con l'altezza delle nuvole visibili.

1.4 Al-Biruni e il *Qanun al-Mas udi*

Figura 1.5: Al-Biruni

Al-Biruni presenta un esempio simile di applicazione della trigonometria alla geografia matematica. Abu-r-Rayhan Muhammad ibn Ahmad al-Biruni è nato nel 973 a Birun, nei dintorni di Kath (oggigiorno Biruni), capitale del Kharezem. Dal 1010 al 1017 lavora con il suo maestro Abu Nasr, insieme al celebre filosofo Avicenna e ad altri studiosi, alla corte di Chah al-Mamun II di Kath. Dopo la conquista del Kharezm da parte del sultano Mahmud de Ghazni, al-Biruni deve stabilirsi in questa città che diventa uno dei più grandi centri culturali e scientifici dell'epoca. Al-Biruni passa parecchi anni in India, il cui nord era stato conquistato da Mahmud. Qui apprende il sanscrito e termina nel 1031 la più completa opera che fosse stata scritta sull'India. Una grande parte di quest'opera è dedicata alle scoperte degli Indiani nel campo delle matematiche e dell'astronomia. Tra le opere più importanti di al-Biruni, citiamo, oltre il suo libro sull'India, la sua opera sui calendari di diversi popoli e i loro modi di misurare il tempo, che compone nell'anno 1000, un trattato di matematica e di astronomia, un libro per far comprendere i principi dell'astrologia (*Kitab al-tafhm li awa' il sina at al-tangm*) terminato verso il 1036, come anche il *Qanun sull'astronomia e sulle stelle* (*a-qanun al mas udi fi al-hay a wa-l-nugum*) terminato nel 1030. Il titolo dell'ultima opera citata indica che l'autore l'aveva dedicata al sultano di Ghazni, Masud, figlio di Mahmud. L'attività di al-Biruni si estendeva a tutte le scienze della natura. Ha anche scritto delle opere sulla fisica, sulla farmacologia e la medicina. Muore nel 1048.

Il *Qanun al-Mas udi* è molto importante per la storia della trigonometria. In quest'opera, al-Biruni ha riunito i risultati dei lavori di parecchi dei suoi antenati come anche i risultati delle sue osservazioni e dei suoi calcoli. Il *Qanun* comprende undici libri; nel libro I e II l'autore tratta i problemi riguardanti la cronologia e i calendari. Il libro III si dedica alla trigonometria e comprende dieci capitoli. Nel primo capitolo l'autore calcola la lunghezza dei lati di un poligono regolare inscritto, ossia un triangolo, un quadrato, un pentagono, un esagono, un ottagono e un decagono per mezzo della costruzione delle corde corrispondenti con l'aiuto di riga e compasso. Nel secondo capitolo, l'autore dimostra diversi teoremi sulle corde. Questi teoremi sono equivalenti a quelli che danno il seno della somma e della differenza di due angoli dati, il seno dell'angolo doppio o mezzo e così via. Nel terzo capitolo l'autore costruisce i lati di un esagono regolare inscritto. Al-Biruni risolve questo problema con l'aiuto delle equazioni di terzo grado[13] e con un particolare processo d'iterazione. Il quarto capitolo è dedicato ai problemi generali della trisezione dell'angolo. L'autore espone dodici procedimenti di trisezione dovuti a diversi matematici venuti dopo Archimede, compreso lui stesso. In questo stesso capitolo calcola la corda che sottende un arco di un grado e che è uguale al doppio del seno di un mezzo grado e si serve dei risultati precedenti per calcolare, nel quinto capitolo, il rapporto tra la circonferenza di un cerchio e il suo diametro. Il sesto capitolo comprende delle tavole del seno mentre le regole dei loro lavori sono esposte nel capitolo settimo. Tra questi l'autore enuncia il procedimento di interpolazione lineare e quadratica (si vedano le formule 3.2 e 3.3). Nell'ottavo capitolo al-Biruni parla delle tangenti e delle cotangenti, fornisce una tavola di tangenti e specifica il modo in cui se ne serve ed enuncia di nuovo le regole dell'interpolazione lineare e quadratica. Nello stesso capitolo dimostra il teorema del seno in geometria piana. I capitoli nono e decimo sono dedicati alla trigonometria sferica. L'autore enuncia in particolare il teorema del seno nella trigonometria sferica.

Al-Biruni ha dato la dimostrazione delle proposizioni sulle corde, espo-

[13]Per un ennagono regolare, con una scelta approppriata dell'unità di misura ottiene l'equazione $x^3 = 1 + 3x$, nella quale x rappresenta la corda di un arco uguale ai $\frac{2}{9}$ della circonferenza.

ste nei primi due capitoli del libro II del *Qanun* e in un'opera precedente, *Il trattato sulla determinazione delle corde di un cerchio con l'aiuto di una linea spezzata inscritta (risala fi-s-tihrag al-awtar fi da' ira bi hawas al-hatt al-muhani al wagi'fiha).* L'autore prende come punto di partenza la proposizione seguente di Archimede: *si prenda una linea spezzata composta di due segmenti e inscritta in una circonferenza; si abbassi in mezzo all'arco intercettato dalle estremità della linea spezzata una perpendicolare al più grande dei due segmenti, la linea è allora divisa da questa perpendicolare in due parti uguali.* Al-Biruni riporta più di venti dimostrazioni di questa proposizione, di cui otto sono sue e le altre di diversi autori, tra cui Archimede, ibn al-Haytam e ibn Iraq. La proposizione di Archimede è spesso utilizzata nel libro III, già citata nel *Qanun*.

L'astronomia sferica e la gnomonica furono l'oggetto del libro IV mentre il libro V tratta di geodesia[14]. I libri dal VI al IX sono dedicati a dei problemi particolari di astronomia (il movimento della Luna e le sue fasi, un catalogo stellare, il movimento dei pianeti, etc...).

Nel capitolo VII del libro V del *Qanun*, l'autore descrive un nuovo metodo di calcolo di un grado di meridiano terrestre. Fu sotto il comando di al-Mamun che gli studiosi dell'Islam iniziarono per la prima volta a misurare un grado di latitudine. A questo scopo furono creati due gruppi di studiosi che presero delle misure su un terreno situato presso Damasco all'interno di Tudmur (Palmira) e Raqqa. I risultati delle misure dei due gruppi furono confrontati e diedero il valore di 56 miglie arabe vale a dire 113 chilometri circa. Al fine di verificare l'esattezza di questi risultati, al-Biruni salì in India su una montagna circondata da una vasta pianura che secondo le sue parole era più piatta della superficie del mare. Con l'aiuto di un astrolabio, calcolò quello che si chiama abbassamento orizzontale, vale a dire l'angolo α (Figura 1.6), che risulta uguale a $34'$. Poichè la montagna aveva un'altezza h di $652,05$ braccia (un braccio è uguale a 0,5 metri circa) e dato che $r : h = \cos\alpha : (1-\cos\alpha)$, al-Biruni trova per il raggio della terra $r = 1081$ farsah e due terzi. Ottiene allora 6800 farsah per la circonferenza della Terra. Siccome il farsah è uguale a tre miglia circa, trova anche il valore ottenuto dagli studiosi del IX secolo, ossia 56 miglia e due terzi.

[14]In origine era l'arte di dividere i terreni, oggi è la scienza che studia forma e dimensioni della Terra e si occupa di determinare il campo gravitazionale terrestre. La geodesia si suddivide a seconda dei metodi seguiti: ad esempio quella geometrica studia la forma della Terra mediante misure di latitudini e longitudini, nonchè di archi di meridiano e di parallelo mentre quella astronomica si occupa della determinazione delle coordinate geografiche e della loro variazione nel tempo.

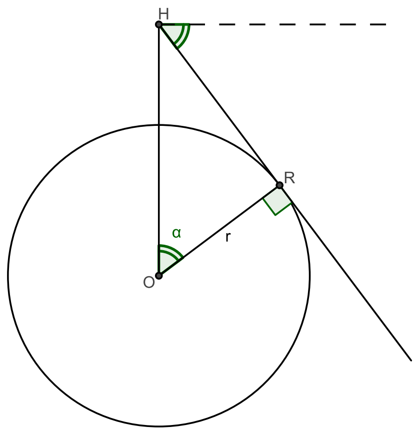


Figura 1.6: Abbassamento orizzontale

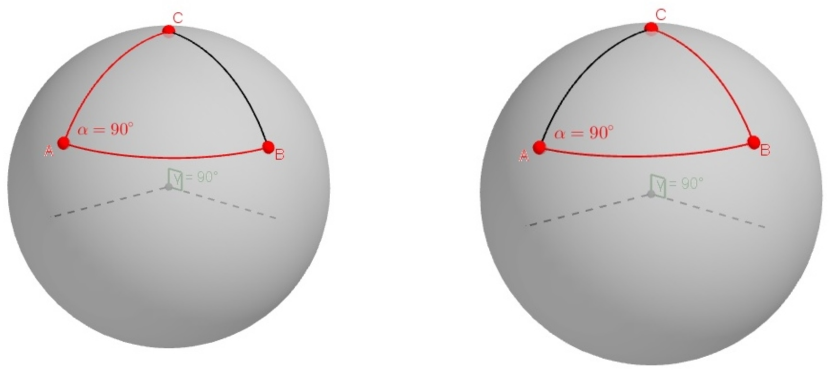
Capitolo 2

La trigonometria sferica

I problemi della trigonometria sferica, che hanno trovato fin da subito la loro applicazione in astronomia, hanno occupato un posto importante tra i matematici dell'Islam. Già Tolomeo aveva risolto i quatto casi dei triangoli rettangoli (come si nota in figura, i due piani dei due cerchi massimi della sfera sono perpendicolari tra loro), ossia:

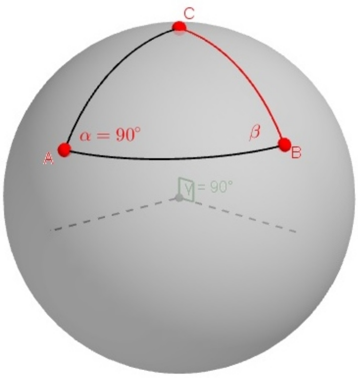
1) quando si conoscono i due lati adiacenti all'angolo retto;

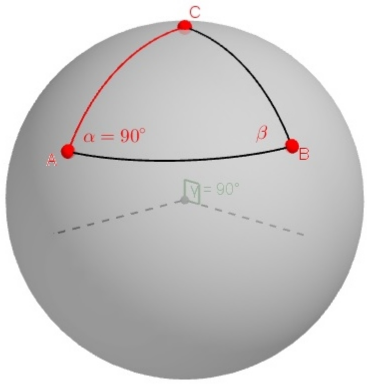
2) quando si conoscono un lato e l'ipotenusa;



3) quando si conosce l'ipotenusa e un angolo ad esso adiacente;

4) quando si conosce uno dei lati adiacenti all'angolo retto e l'angolo opposto a tale lato.





Tolomeo si riconduce a questi casi per la risoluzione dei triangoli rettangoli, utilizzando il teorema di Menelao sul quadrilatero completo, vale a dire sulla figura formata dal triangolo ABE e dall'arco di circonferenza DFC (nel piano è una retta) che taglia i lati AB, BE ed EA sui loro prolungamenti nei punti D, F e C. Quindi, dopo la proposizione di Menelao[1], si ottiene:

$$\sin(\overset{\frown}{AE}) \cdot \sin(\overset{\frown}{CD}) \cdot \sin(\overset{\frown}{BF}) = \sin(\overset{\frown}{AC}) \cdot \sin(\overset{\frown}{DF}) \cdot \sin(\overset{\frown}{BE})$$

(nel piano, i seni degli archi di circonferenza sono rimpiazzati con dei segmenti retti). Gli Arabi chiamarono la proposizione di Menelao la regola delle sei grandezze e la definirono, come gli studiosi dell'antichità, sotto forma di rapporti composti.

Gli astronomi arabi trattarono prima di tutto gli stessi casi dei triangoli rettangoli. Ma già **Tabit ibn Qurra** [2] e **al-Battani** andarono oltre formulando esplicitamente il teorema del seno nel caso speciale di un triangolo rettangolo: $\sin a : \sin A = \sin b : \sin B$. Evidentemente queste proposizioni si dedussero immediatamente da due relazioni che legano i seni dei lati e l'ipotenusa, ma fu importante formulare questa relazione come una proposizione indipendente. In occasione della risoluzione di un problema che noi andiamo a richiamare qui sotto, al-Battani ottenne una relazione che differisce solo nella forma da una delle più importanti proposizioni della trigonometria sferica, ovvero il teorema del coseno:

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A\,.$$

[1] $\dfrac{\sin(\overset{\frown}{AE})}{\sin(\overset{\frown}{AC})} \cdot \dfrac{\sin(\overset{\frown}{CD})}{\sin(\overset{\frown}{DF})} \cdot \dfrac{\sin(\overset{\frown}{BF})}{\sin(\overset{\frown}{BE})} = 1$

[2] Tabit ibn Qurra è stato un importante matematico islamico, studioso di teoria dei numeri, astronomia e statica.

Grazie a questa formula si può calcolare un angolo del triangolo quando si conoscono i tre lati oppure si può trovare un lato quando si conoscono gli altri due lati e l'angolo tra essi compreso. Il problema risolto da al-Battani riguardava il primo caso: si trattava di determinare l'azimut del sole a partire dalla sua inclinazione e dalla sua altezza come anche a partire dall'altezza del polo. **Ibn Yunis** dovette analogamente trovare una relazione simile a quella che aveva scoperto al-Battani. I matematici dell'Islam non gli hanno dato molto importanza. È stato Regiomontano che per primo gli ha dato il giusto valore.

I matematici islamici registrarono un importante successo nel campo della trigonometria semplificando il processo di risoluzione dei triangoli. L'applicazione della proposizione di Menelao a diversi casi particolari è in effetti molto complicata. Il primo passo in questa via è stato ottenuto all'epoca di al-Battani. Due arabi, **an-Nayrizi** e **abu-l-Wafa**, studiarono il caso particolare in cui $AC = CD = 90^\circ$ e l'applicarono alla risoluzione di triangoli rettangoli. Dedussero la regola detta delle quattro grandezze (già conosciuta da Menelao):

$$\frac{\sin \overset{\frown}{DF}}{\sin \overset{\frown}{AE}} = \frac{\sin \overset{\frown}{BF}}{\sin \overset{\frown}{BE}}\,.$$

Altri studiosi hanno enunciato la proposizione nota come il teorema delle tangenti:

$$\frac{\tan \overset{\frown}{DF}}{\tan \overset{\frown}{AE}} = \frac{\sin \overset{\frown}{BD}}{\sin \overset{\frown}{AB}}$$

deducendo il teorema generale del seno:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}\,,$$

di cui an-Nayrizi, abu-l-Wafa, al-Hugandi e Abu Nasir hanno dato diverse dimostrazioni [3]. L'applicazione delle nuove proposizioni ha facilitato la risoluzione dei vecchi casi dei triangoli rettangoli a tal punto che i matematici del tempo hanno chiamato il teorema dei seni, la proposizione che "svincola dal quadrilatero completo". Nel XII e XIII secolo erano già stati risolti tutti i casi dei triangoli rettangoli sferici. L' arabo spagnolo, Gabir ibn Aflah, fu il primo a risolvere un triangolo quando si conosceva un lato e l'angolo ad esso

[3]Le regole equivalenti ai teoremi del seno e del coseno per un triangolo sferico qualunque sono già state utilizzate nel *Libro degli orologi chiamati quadranti solari* (*kitab fi alat as-sa at allati tusamma ruhamat*) di Tabit ibn Qurra e al-Battani deve aver preso da questa fonte il problema menzionato e la sua soluzione.

adiacente B. Enuncia una relazione equivalente alla formula:

$$\cos\alpha = \cos a \cdot \sin B\,.$$

Questa relazione fu più tardi riconosciuta nelle traduzioni latine sotto il nome di formula di Geber. L'ultimo caso, quello del triangolo rettangolo in cui si conoscono gli angoli A e B è stato risolto da **Nasir ad-Din at-Tusi** [4] con l'aiuto della regola:

$$\cos c = \cot\alpha \cdot \cot\beta\,.$$

[4]Nasir al-Tusi è stato un astronomo e matematico islamico che si unì ai Mongoli nella conquista di Baghdad. Diede importanti contibuti all'astronomia e scrisse alcuni commentari di testi greci. E' noto anche con il nome di Nasir Eddin.

Capitolo 3

Le tavole trigonometriche

Figura 3.1: Tavola astronomica di al-Huwarizmi

Per la risoluzione dei triangoli è necessario l'utilizzo delle tavole trigonometriche. Tali tabelle costituiscono una parte indispensabile degli zig. La parola zig [1], di origine persiana, indica in arabo una collezione di tavole destinate ad astronomi e geografi. In generale questi zig comprendevano delle descrizioni di calendari talvolta molto dettagliate che contenevano calendari islamici, siriani, persiani, ebraici, indiani, cinesi, cristiani e altri ancora. Comprendevano anche delle indicazioni cronologiche riguardanti differenti

[1]Uno zij designa nell'astronomia islamica un insieme di tavole che consentono di conoscere e rintracciare la posizione degli astri nel cielo a una data fissata. Non si tratta di trattati di astronomia teorica ma al contrario di trattati di astronomia pratica, orientati soprattutto all'astrologia, che rivestiva una grande importanza sociale all'epoca della loro realizzazione. La parola deriva dal medio-persiano zih o zig, parlato all'epoca dei Sasanidi, che significa *corda*. Il termine avrebbe per origine l'intreccio dei fili di un tessuto, per designare l'organizzazione dei dati tabellati in righe e colonne. Tali tavole sono a volte designate col nome di qanun, che deriva dalla parola greca equivalente $\kappa\alpha\nu\grave{\omega}\nu$ che, oltre a significare "legge, canone", indica anche uno strumento a corde, chiamato appunto *qānūn*.

stati e regni, delle tavole trigonometriche, dei cataloghi stellari come anche diverse tavole astronomiche. Inoltre gli zig comprendevano degli indicatori più o meno sviluppati sulla risoluzione di problemi fondamentali riguardanti la costruzione dei calendari come anche sul calcolo del movimento dei corpi celesti, le eclissi del Sole e della Luna e altri fenomeni astronomici.

Ci sono pervenuti più di cento differenti zig risalenti al periodo dal VIII al XV secolo (o perlomeno ci sono noti). Circa venti di questi sono basati sulle osservazioni dei loro stessi autori. È interessante studiare la loro ripartizione in base alle regioni e alle differenti epoche nelle quali sono stati composti. Nell'ottavo secolo la maggior parte di questi sono stati composti in Iraq e uno solo in Iran. Nell'undicesimo secolo un numero importante di nuovi zig apparve in Iraq e qualcun altro in Siria e in Iran. A partire da questa epoca la maggior parte degli zig proveniva dall'Iran. Verso la fine del nono e decimo qualche zig apparve in Egitto e in Spagna (in particolare nel XI secolo e all'inizio del XII secolo), cinque in Asia centrale e uno solo in Afghanistan. Queste indicazioni statistiche caratterizzarono in parte l'attività dei differenti paesi islamici nel campo dell'astronomia. Tuttavia si deve prendere in considerazione la qualità e l'importanza dei diversi zig tenendo presente che i confini dell'epoca non erano ben definiti (basti pensare all'Iran e ai suoi paesi confinanti). Tra gli zig più completi, citiamo quello di Nasir ad-Din at-Tusi; il Qanun al-Mas udi scritto da al-Biruni a Ghazni; lo zig composto all'incirca nel 1120 a Merv da un allievo di Umar al-Hayyam, il grande astronomo e fisico di origine greca Abu-l-FathAbd al-Rahman al-Hazini al-Marwazi; e infine quello composto all'osservatorio d'Ulugbek a Samarcanda.

Le più antiche tavole redatte durante il califfato sulla base dei *Surya Siddhanta*, sono quasi tutte andate perse. Lo **zig di Muhammad ibn Musa al-Huwarizmi** comprendeva tavole sessagesimali del seno per archi che variano di grado in grado con tre ordini sessagesimali (per $r = 60$), come anche tavole della tangente con un solo ordine sessagesimale e senza parte intera. Lo **zig di Habas al-Hasib** fornisce delle tavole dei seni, delle tangenti, delle cotangenti, del senoverso, e della cosecante per angoli che variano di grado in grado, con lo stesso grado di precisione di quelli precedenti. In un altro manoscritto, che ci è pervenuto sotto il nome di tale studioso, i seni sono dati con quattro ordini sessagesimali per archi che variano di quarto di grado in quarto di grado e le tangenti con due ordini sessagesimali per archi che variano di mezzo grado in mezzo grado. Facciamo notare che le tavole di Habas al-Hasib come quelle di al-Huwarizmi ci sono note per versioni successive. La precisione delle prime tavole arabe è stata pressochè la stessa di quella delle tavole delle corde di Tolomeo.

Il calcolo di Tolomeo dà luogo a un errore sensibile del terzo ordine. **Abu-l-Wafa** invece ha inventato un metodo più preciso e più comodo per il calcolo delle tavole. Consisteva in un processo di interpolazione che, nel calcolo del seno di un arco di mezzo grado, permetteva di evitare la formula di trisezione dell'angolo e di ottenerne un'approssimazione sufficiente per eccesso e per difetto. Innanzitutto Abu-l-Wafa determina i valori del seno di tre archi la cui grandezza è vicina a $\frac{1^\circ}{2}$, vale a dire gli archi $\frac{12^\circ}{32}$, $\frac{15^\circ}{32}$, $\frac{18^\circ}{32}$, separati da un intervallo di $\frac{3^\circ}{32}$. Questi seni potevano essere ottenuti a partire dai seni di archi di 36° e di 60° per mezzo di operazioni razionali e per l'estrazione di radici quadrate che si ottengono utilizzando la regola che dà il seno della metà di un angolo dato. Il valore del $\sin \frac{12^\circ}{32}$ si determina con la formula di differenza del seno di due angoli:

$$\sin \frac{12^\circ}{32} = \sin \frac{72^\circ - 60^\circ}{32} \, .$$

Abu-l-Wafa ha espresso quest'ultimo, senza utilizzare il coseno, nel modo seguente[2]:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sqrt{\sin^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)\sin^2(\beta)} - \sqrt{\sin^2(\beta) - \sin^2(\alpha)\sin^2(\beta)} \, . \tag{3.1}$$

L'interpolazione di Abu-l-Wafa è basata su una proposizione di un commentario che Teone di Alessandria[3] ha ricondotto all'*Almagesto* e che, in termini di trigonometria, si enuncia nel modo seguente: *quando la variabile cresce costantemente le differenze tra i valori del seno diminuiscono.* In effetti (Figura 3.2) gli archi $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{BC}$ sono uguali, mentre il segmento di corda CD è più piccolo del segmento AD. La proposizione risulta immediatamente dalla proporzione seguente:

$$\frac{CE}{BF} = \frac{\overset{\frown}{CD}}{\overset{\frown}{DA}} < 1 \, .$$

Sommando membro a membro le disuguaglianze:

$$\sin(\phi + 3\,h) - \sin(\phi + 2\,h) < \sin(\phi + h) - sin(\phi) < \sin(\phi) - \sin(\phi - h)$$

[2]Si ricordi la formula di sottrazione per il seno: $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

[3]Teone di Alessandria è stato un matematico greco vissuto nella seconda metà del IV secolo d.C.; uno dei maestri più illustri della scuola d'Alessandria. Di lui restano un'edizione degli *Elementi* di Euclide e un commento all'*Almagesto* di Tolomeo, opere scritte per facilitare lo studio delle matematiche; anzi la tradizione vuole che Teone le abbia scritte per la figlia Ipazia. Si occupò anche di aritmetica, e ci resta un suo procedimento per l'estrazione della radice quadrata. Inoltre, studiò varie eclissi di Sole e di Luna.

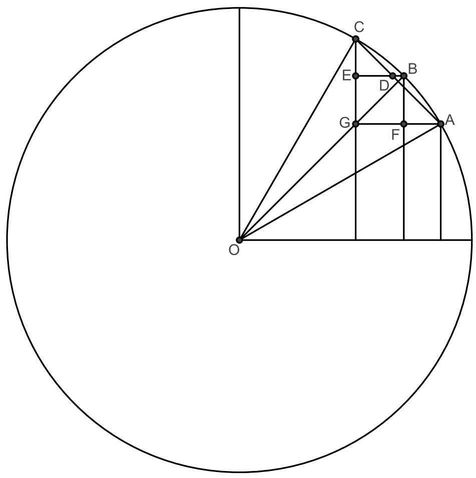


Figura 3.2: Proposizione riconducibile all'*Almagesto*

$$\sin(\phi + 2\,h) - \sin(\phi + h) < \sin(\phi + h) - \sin(\phi) < \sin(\phi - h) - \sin(\phi - 2\,h)$$

e

$$\sin(\phi + h) - \sin(\phi) = \sin(\phi + h) - \sin(\phi) < \sin(\phi - 2\,h) - \sin(\phi - 3\,h)$$

si ottiene

$$\sin(\phi)+\frac{1}{3}\,[\sin(\phi+3\,h)-\sin(\phi)] < \sin(\phi+h) < \sin(\phi)+\frac{1}{3}\,[\sin(\phi)-\sin(\phi-3\,h)]\,.$$

Per $\phi = \dfrac{15°}{32}$ e $h = \dfrac{1°}{32}$ si ottiene

$$\sin\frac{15°}{32} + \frac{1}{3}\left[\sin\frac{18°}{32} - \sin\frac{15°}{32}\right] < \sin\frac{1°}{2} < sin\frac{15°}{32} + \frac{1}{3}\left[\sin\frac{15°}{32} - \sin\frac{12°}{32}\right].$$

Abu-l-Wafa prende la media aritmetica dei valori di sinistra e di destra e ottiene, dando al raggio il valore di 60:

$$\sin\frac{1°}{2} = 31'\,24''\,55'''\,54^{iv}\,55^{v}\,.$$

Questo valore è esatto fino al quarto grado, perchè il valore esatto al quinto grado è $\sin\dfrac{1°}{2} = 31'\,24''\,55'''\,54^{iv}\,0^{v}$.

In frazione decimale il valore approssimato da Abu-l-Wafa si scrive $0,0087265373$ mentre un valore più esatto è $0,0087265355$. Quello che ci ha dato è giusto fino al cento milionesimo. L'errore che influenza il risultato di Abu-l-Wafa ossia:

$$\sin\frac{1^\circ}{2} - \left[\sin\frac{15^\circ}{32} + \frac{1}{6}\left(\sin\frac{18^\circ}{32} - \sin\frac{12^\circ}{32}\right)\right]$$

doveva essere di 47 quinti. Ma in Abu-l-Wafa l'errore è di 55 quinti a causa dell'inesattezza dei dati iniziali di cui disponeva.

La tavola dei seni di Abu-l-Wafa è stata composta per archi differenti tra loro di 15°. Ha inoltre composto una tavola delle tangenti e delle cotangenti.

Ibn Yunis ha effettuato degli importanti calcoli trigonometrici nell'opera terminata nel 1007 dopo lunghi anni di lavoro, **lo Zig al-Hakimi**, chiamato così in onore del califfo del Cairo, al Hakim (996-1020). Ibn Yunis ha calcolato il $\sin 1^\circ$ attraverso un processo che ha apportato un certo miglioramento al metodo di Tolomeo. Considera innanzitutto dei valori dell'arco più vicini a 1°. Calcola $\sin\frac{9^\circ}{8}$ e $\sin\frac{15^\circ}{16}$ con l'aiuto del $\sin 18^\circ$ e del $\sin 15^\circ$. La differenza dei valori per eccesso e per difetto che si ottengono per il seno di 1° con l'aiuto del metodo di Tolomeo è di $5''' \, 6^{iv}$. Ibn Yunis divide allora questo valore secondo il rapporto della differenza di archi $\left(\frac{9}{8}-1\right) : \left(1-\frac{15}{16}\right) = \frac{2}{1}$ e ottiene in questo modo $\sin 1^\circ = 1; 2' \, 49'' \, 43''' \, 28^{iv}$ [4]. Precisa ancora di più questo valore nel momento in cui confronta tra loro i valori del $\sin(3^\circ - 1^\circ)$ e del $\sin(2 \cdot 1^\circ)$. Il valore definitivo che si ottiene per il $\sin 1^\circ$, ossia $1; 2' \, 49'' \, 43''' \, 4^{iv}$, differisce dal vero valore di poco più di 7 quarti. Scritto in frazione decimale questo valore è pertanto esatto fino al grado di 10 milionesimi.

Queste tavole dei seni che, nello zig di al-Hakimi, sono stabilite per archi che differiscono tra loro di un minuto, hanno lo stesso grado di precisione. In più ibn Yunis ha costruito delle tavole del seno per archi che differiscono tra loro di un secondo. Queste tavole delle tangenti stabilite per degli archi che differiscono tra loro di un minuto non sono ancora state studiate.

Nel Libro III del **Qanun al-Mas udi**, **al-Biruni** ha calcolato ugualmente il $\sin 1^\circ$ fino ai quarti; ci ha dato una tavola molto precisa dei seni e delle tangenti ponendo il raggio uguale a 1. Al Biruni spiega questa scelta soprattutto per il suo desiderio di evitare l'operazione rigida che consiste nel moltiplicare e nel dividere per $r = 60$ [5].

Il procedimento utilizzato da al Biruni per il calcolo dei valori approssimati è particolarmente interessante. Gli errori che si riscontrano nel calcolo di Abu-l-Wafa e di Tolomeo dipendono dai valori del seno scelti come valori di partenza e alla loro differenza. Inoltre, questi valori non costituiscono una

[4] Si tratta di una notazione storica per indicare $\sin 1^\circ = 1^\circ 2' \, 49'' \, 43''' \, 28^{iv}$.

[5] Nel sistema sessagesimale il raggio di lunghezza 60 gioca lo stesso ruolo che ha oggi il raggio di lunghezza 1.

serie di valori approssimati che convergono al valore esatto ricercato. Al-Biruni ha applicato differenti metodi di approssimazioni successive di cui gli errori possono essere resi arbitrariamente piccoli. Sfortunatamente non conosciamo il procedimento che ha utilizzato per la risoluzione numerica delle equazioni cubiche. Ci fornisce semplicemente i valori delle radici dell'equazione $x^3 = 1 + 3\,x$ in cui x rappresenta la corda di un arco uguale a $\dfrac{2}{9}$ della circonferenza; allora x è uguale a $1; 52'\, 45''\, 47'''\, 13^{iv}$.

Deduciamo il valore della corda di un arco di $40°$ ovvero $41'\, 2''\, 32'''\, 41^{iv}\, 55^{v}$

D'altro canto conosciamo un altro procedimento estremamente semplice di al-Biruni per il calcolo del lato di un ennagono regolare ossia della corda che sottende un angolo di $40°$. Qui si serve, come punto di partenza dei calcoli, dei valori delle corde seguenti:

$$\text{corda}\, 30° = 31'\, 3''\, 29'''\, 49^{\text{iv}}\, 36^{\text{v}}$$

$$\text{corda}\, 12° = 12'\, 32''\, 37'''\, 17^{\text{iv}}\, 46^{\text{v}}\,.$$

Le formule trigonometriche gli permisero di calcolare in seguito le corde che sottendono degli archi di $30° + 12° = 42°$ e $\frac{42°}{4} = 10\frac{1°}{2}$, di $30° + 10\frac{1°}{2} = 40\frac{1°}{2}$ e $\frac{40\frac{1°}{2}}{4} = 10\frac{1°}{8}$, di $30° + 10\frac{1°}{8} = 40\frac{1°}{8}$ e $\frac{40\frac{1°}{8}}{4} = 10\frac{1°}{32}$ e così via, vale a dire le corde degli archi $a_n = 40° + \frac{2°}{4^n}$ con $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Interrompe i suoi calcoli alla corda che sottende un arco di $40°\, 24^{iv}$ per cui ottenne il valore di $41'\, 2''\, 32'''\, 42^{iv}\, 29^{v}$ esatto fino ai quarti.

Al Biruni ha calcolato il valore del $\sin 1°$, ovvero la metà della corda che sottende un arco di $2°$, partendo dalla corda di un arco di $6°$. Ha ottenuto il valore di $1'\, 2''\, 49'''\, 43^{iv}$ esatto fino ai quarti. La sua tavola dei seni, come quelle di abu-l-Wafa è stabilita per archi che differiscono di $15'$, mentre nella tavola delle tangenti gli archi differiscono tra loro di $1°$. Oltre l'interpolazione lineare, in uso già dai tempi di Tolomeo, al-Biruni vi applica l'interpolazione quadratica. Questa è stata utilizzata precedentemente all'inizio del XII secolo, dagli astronomi cinesi nei calcoli dei loro calendari. A differenza della regola cinese, che rappresenta un caso particolare della formula detta di Newton e Stirling, quella raccomandata da al-Biruni si enuncia, quando si pone $\sin(x) = f(x)$ e $\tan(x) = f(x)$:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\,\frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} + (x - x_0)^2\,\frac{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}}{h} \tag{3.2}$$

Scriviamo questa formula nella forma:

$$f(x) = f(x_0)+(x-x_0)\,\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+(x-x_0)(x-x_0-h)\,\frac{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-\frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}}{h} \tag{3.3}$$

Si vede che quella di al-Biruni differisce dall'interpolazione parabolica dall'assenza del coefficiente $\frac{1}{2}$ nel termine di II grado.

Dopo aver dato la regola di interpolazione delle tavole dei seni e delle tangenti, al-Biruni aggiunge che la sua regola è valida per "tutte le tavole", cioè per tutte le tavole trigonometriche e astronomiche conosciute al suo tempo.

Bibliografia

[1] Adof P. Youschkevitch, *Les mathèmatiques arabes VIIIe-XVe sivcles*, Libraire Philosophique J. Vrin, Parigi, 1976.

[2] Morris Kline, *Storia del pensiero matematico*, Volume I Dall'antichità al Settecento, Einaudi, Torino, 1972.

[3] Gino Loria, *Le scienza esatte nell'Antica Grecia*, Ulrico Hoepli, Milano, 1914.

[4] Carl B. Boyer *Storia della matematica*, Oscar Mondadori, Milano, 2011.

[5] Luigi Pepe, *Insegnare matematica*, Clueb, Bologna 2016.

Siti consultati:

1. http://www.treccani.it/enciclopedia
2. http://www-history.mcs.st-and.ac.uk
3. http://www.amastrofili.org
4. https://www.wolframalpha.com/
5. http://www.lorenzoroi.net/geometria/Menelao.html
6. http://www.mat.uniroma2.it
7. http://php.math.unifi.it/archimede.html