UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FERRARA

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Tesina di Divulgazione e Museologia matematica

Panoramica sulla Geometria e Algebra nella matematica araba

Docente:
Chiar.ma Prof.ssa Alessandra Fiocca

Studentesse:
Miriam Bonasia
Rita Fiore
Rosa Mele

Anno Accademico 2016-2017

Indice

Introduzione

Ai tempi in cui viveva Brahmagupta, famoso matematico indiano, l'impero dei sabei dell'Arabia era caduto e la penisola attraversava una crisi profonda. Essa era popolata in gran parte da nomadi del deserto, noti con il nome di beduini, i quali non sapevano né leggere né scrivere. Fra di essi v'era il profeta Maometto, nato alla Mecca verso il 570. Per una decina d'anni predicò alla Mecca, ma nel 622, di fronte alla minaccia di una congiura che attentava alla sua vita, accettò l'invito a recarsi a Medina. Questa fuga, nota come l' "Egira", segnò l'inizio dell'era maomettana, che esercitò una profonda influenza sullo sviluppo della matematica. Nel 632, mentre si preparava a far guerra all'Impero bizantino, Maometto morì a Medina. La sua morte improvvisa non arrestò per nulla l'espansione dello stato islamico, infatti i suoi seguaci invasero i territori vicini con stupefacente rapidità. Nel giro di pochi giorni Damasco, Gerusalemme e gran parte della vallata mesopotamica caddero nelle mani dei conquistatori; entro il 641 veniva espugnata anche Alessandria che per parecchi secoli era stata il centro matematico del mondo. Una leggenda racconta che al capo delle truppe vittoriose, che aveva chiesto che cosa dovesse fare dei libri conservati nella biblioteca di Alessandria, fu risposto di bruciarli, giacché se contenevano informazioni che si accordavano con il Corano erano superflui, in caso contrario erano oltre che superflui anche dannosi. Per più di un secolo i conquistatori arabi lottarono tra di loro e con i loro nemici, finché verso il 750 il loro spirito bellicoso si calmò. Nel frattempo si era verificato uno scisma tra gli arabi occidentali del Marocco e gli arabi orientali che, sotto il califfo al-Mansur, avevano fondato una nuova capitale a Baghdad, città che diventò ben presto il nuovo centro degli studi, soprattutto matematici. L'unità del mondo arabo era più economica e religiosa che politica: l'arabo non costituiva necessariamente una lingua comune, anche se era la lingua degli intellettuali. Pertanto è forse più corretto parlare di cultura islamica invece che araba.

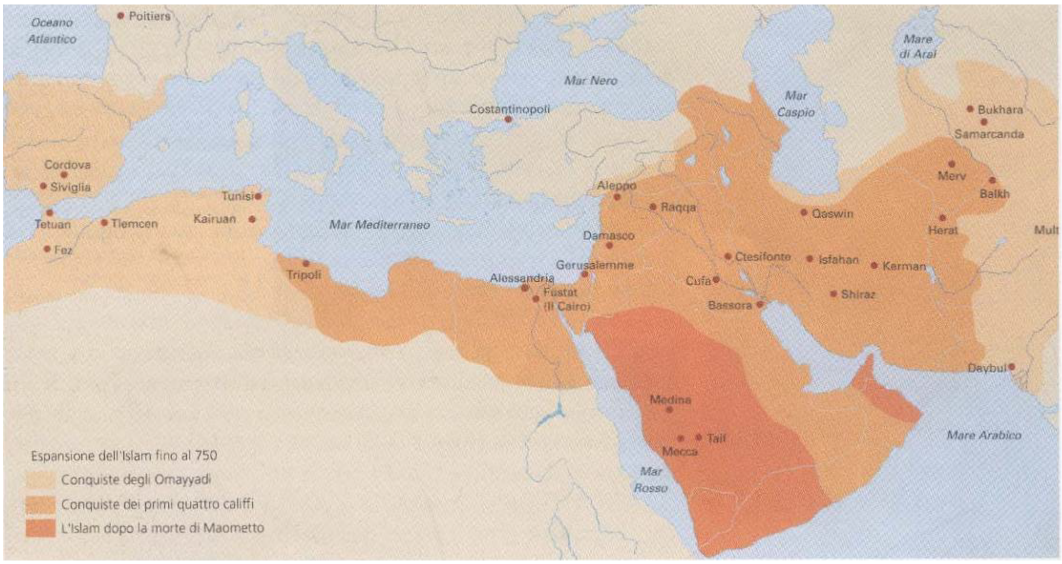


Figura 1: Espansione del dominio arabo VIII-XIV sec.

Se il I secolo dell'impero musulmano (650-750 c.a) fu privo di qualsiasi conquista scientifica, tanto da poter essere definito il secolo "buio" della cultura araba, nel secolo successivo, intorno all'850, con la fondazione della "Casa del Sapere" a Baghdad, si ha un rifiorire delle scienze e degli studi. La Casa del Sapere, paragonabile all'antico Museo di Alessandria, accoglieva esponenti importanti degli studi matematici e astronomici. Fra i suoi membri vi era un matematico e astronomo, Mohammed ibn-Musa al-Khwarizmi, il cui nome, come quello di Euclide, diventa ben presto noto a tutti. Nella sua opera principale, l'*Algebra*, al-Khwarizmi espone in maniera sistematica ed esauriente sei casi di equazioni, esaurendo tutte le possibilità di equazioni lineari e di secondo grado aventi una radice positiva. Per questa ragione e poiché fa uso del termine "al-jabr", gli attribuiamo l'appellativo "padre dell'algebra".

In questa tesina vedremo come a partire dal IX secolo, risultati gloriosi vengono raggiunti dai matematici dell'epoca, i quali, ognuno con i propri contributi in ambito algebrico, geometrico e astronomico, arricchiscono la cultura scientifica, apportando risultati ai quali i greci, con i loro studi, non erano giunti.
Una caratteristica comune che gli arabi avevano con i greci era il fatto di essere studiosi a «360 gradi»: esperti di matematica, medicina, astronomia, filosofia e fisica. Sono stati i matematici arabi a creare l'algebra, il calcolo combinatorio e la trigonometria.
Volendo riassumere in breve i contributi più significativi, possiamo dire

- Prima metà IX secolo
  - Baghdad: al-Kwarizmi, algebra (equazioni di primo e secondo grado ad un'incognita);
  - Egitto: abu-Kamil amplia il campo dell'algebra (sistemi di equazioni a più incognite);
  - Al-Farisi getta le basi della teoria sulla divisibilità dei numeri, affermando che: *"ogni numero si scompone necessariamente in un numero definito di fattori primi, dei quali è il prodotto"*.
- Seconda metà del IX secolo
  - Baghdad: fratelli Banu-Musa, geometria;
  - Thabit ibn Qurra, al-Nayrizi e Abu l-Wafa si occupano del calcolo delle aree, parabola, ellisse, teoria delle frazioni e fanno della trigonometria una branca autonoma della matematica.

- Fine del X secolo
  - Il geografo al-Biruni, astronomo e medico, e Ibn al-Haytham si occupano di teoria dei numeri, metodi infinitesimali, ottica e astronomia;
  - Omar Khayyam formula il problema che più tardi diventerà la celebre congettura di Fermat: un cubo non può essere la somma di due cubi, l'equazione $x^3 + y^3 = z^3$ non ammette soluzioni intere.
- X-XII secolo
  - Al-Samawa'l continua l'opera di al-Karaji e propone un sistema di 210 equazioni con dieci incognite, risolvendolo.

Nel *primo capitolo* della tesina partiamo dall'introduzione sulla storia delle cifre indo-arabe, quali primi simboli matematici apparsi. Importanti sono stati gli sviluppi della matematica, soprattutto nel ramo aritmetico-algebrico, da al-Khwarizmi ad al-Karaji; tuttavia manca nelle loro opere quello che noi definiremmo simbolismo algebrico. Vedremo come il suo sviluppo, anche se agli albori, inizia ad apparire con al-Qualasadi e le sue opere.

Nel *secondo capitolo* protagonista è invece la geometria: di matrice ellenistica, fondata soprattutto sulle opere tradotte di Euclide, Archimede ed Erone, essa ha un nuovo slancio e un nuovo indirizzo grazie ai contributi arabi dei fratelli Banu Musa, Abu l-Wafa e altri, ottenendo successi innovativi in trigonometria e costruzioni eleganti in geometria piana e solida. Grazie infatti alla geometria "della riga e del compasso" gli arabi giungono a valori abbastanza precisi del π, introducono il concetto di tangente e costruiscono nuove tavole trigonometriche, dimostrando di saper intrecciare le conoscenze occidentali (geometriche) alla creatività delle conoscenze orientali (algebriche-aritmetiche).

Nel *terzo capitolo* analizzeremo in particolare il ruolo fondamentale di Thabit ibn Qurra, famoso per i suoi studi di meccanica, astronomia, matematica pura e geometria. Ci soffermeremo soprattutto sul suo lavoro di traduzione ed innovazione riguardo alcune sezioni coniche (parabola ed ellisse) e algoritmi per il calcolo delle superficie e volumi dei solidi. Tutta la scienza greca è stata infatti esaminata e assimilata da scienziati e studiosi arabi, come Thabit ibn Qurra, pronti a spiccare il balzo verso altri territori di scoperta, alla ricerca di soluzioni alternative dei teoremi di Euclide, di Apollonio di Perga, di Archimede di Siracusa, di Tolomeo e di altri grandi matematici greci.

Capitolo 1

Il simbolismo arabo

Abbiamo visto come a partire dal IX secolo gli arabi danno un grande contributo alle scoperte scientifiche. In particolare è a partire dalla fine dell'VIII secolo che si assiste, presso gli arabi, ad un progressivo interesse per l'aritmetica e per i sistemi di numerazione. Inizialmente non vi erano simboli appositi per i numeri, che erano semplicemente espressi a parole. In seguito alle conquiste, dovendo tenere i registri amministrativi in arabo, si pose anche il problema di come scrivere i numeri e questo venne risolto, in un primo tempo, adottando, presso i singoli popoli, i loro rispettivi simboli (greci o siriaci in Siria, copti in Egitto, ecc.) e poi, a partire dall'VIII secolo, usando le lettere dell'alfabeto e la numerazione in base dieci. Era un sistema additivo, non posizionale, e che non possedeva ancora il simbolo dello zero. Non appena iniziarono gli interessi per l'astronomia, gli arabi si accostarono agli scritti indiani apprendendo il sistema di numerazione posizionale in base dieci e il simbolo dello zero. Subito ne compresero l'importanza e iniziarono ad elaborare un'aritmetica decimale che si rivelava molto semplice ed efficace.

1.1 I numeri: cifre arabe o indiane?

Gli arabi assimilarono rapidamente la cultura dei popoli vicini da essi conquistati. Va tenuto presente infatti che entro i confini dell'impero arabo vivevano popoli di origini etniche molto diverse tra loro: siriani, greci, egiziani, persiani, turchi e molti altri. La maggior parte di essi aveva in comune la fede islamica, ciononostante non dobbiamo aspettarci un alto grado di uniformità nella loro cultura. Soprattutto nella matematica araba queste differenze culturali diventano considerevoli se prendiamo come esempi le opere di Abu l-Wafa (940-998 c.a) e al-Karaji, attivo verso il 1029. In alcune delle loro opere essi usavano la notazione numerica indiana, che aveva raggiunto l'Arabia attraverso il *Sindhind* astronomico (raccolta di tavole astronomiche); in altre occasioni essi adottavano lo schema di numerazione alfabetico dei greci (ove le lettere greche erano sostituite da quelle arabe equivalenti). La notazione indiana finì per prevalere, tuttavia anche tra coloro che usavano questa notazione vi erano notevoli differenze nelle forme delle cifre usate. Numerose varianti erano già prevalse in India, ma in Arabia tali varianti erano così notevoli che alcuni studiosi hanno avanzato l'ipotesi di origini completamente diverse per le forme usate nella parte orientale e in quella occidentale del mondo arabo. Forse le cifre dei saraceni in Oriente provenivano direttamente dall'India, mentre le cifre usate dai mori in Occidente derivavano da forme greche o romane. Più probabilmente le varianti erano il risultato di graduali mutamenti che avevano avuto luogo nello spazio e nel tempo: infatti le cifre arabe usate oggi sono notevolmente diverse dalle moderne cifre "Devanagari" (o "divine") ancora in uso in India. Convenzionalmente chiamiamo arabe le nostre cifre perché le loro forme sembrano derivare da quelle arabe. Tuttavia i principi che stanno alla base del nostro sistema di numerazione derivano presumibilmente dall'India e poiché essi sono più importanti rispetto alle forme delle singole cifre, è meglio dare al nostro sistema numerico il nome di sistema indiano o indo-arabo.

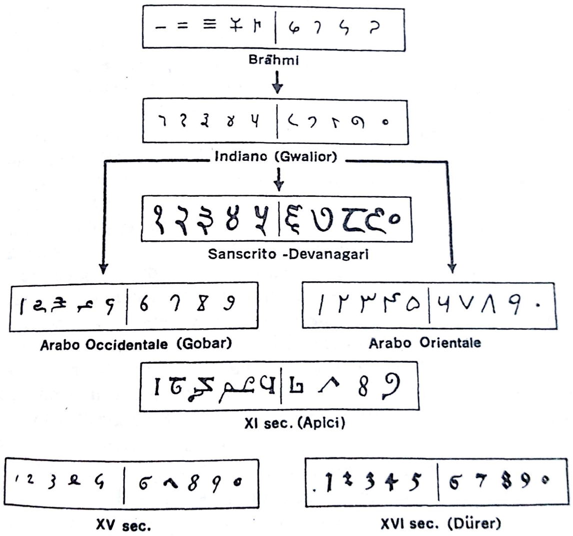


Figura 1.1: Genealogia delle nostre cifre.

1.2 L'indirizzo aritmetico-algebrico dell'algebra araba

Tra la fine del X e il XII secolo si assiste ad un notevole sviluppo dell'algebra islamica, che si articola in due correnti relativamente distinte: l'una di indirizzo aritmetico-algebrico, l'altra geometrico-algebrico. In esse si fa tesoro delle innovazioni di ciascuna di queste singole discipline a favore dell'altra e viceversa, in un rapporto dialettico molto fecondo. L'indirizzo aritmetico-algebrico si avvale da un lato dei contributi e progressi degli aritmetici dei secoli IX-X, dall'altro della traduzione in arabo dell'opera di Diofanto nel X secolo. Fra il 961 e il 976 Abu l-Wafa scrive il *Libro sull'aritmetica necessaria agli scribi e ai mercanti*, in cui riassume e sviluppa le conoscenze dell'aritmetica araba e la teoria delle frazioni. Particolarmente potenziati sono in quest'epoca anche gli algoritmi per l'estrazione delle radici.
Il matematico a cui si deve la prima esposizione del sistema di numerazione

indiano e delle operazioni effettuate in questo sistema è il persiano Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (780-850 circa), che opera a Bagdad, nella Casa del Sapere. Della sua vita non si conosce quasi nulla, tranne forse il fatto che, come indica il nome, egli era originario di Khwarizm (oggi Khiva), città del Turkestan. Di lui si sono conservate cinque opere, in parte rimaneggiate, di aritmetica, algebra, astronomia, geografia e del calendario. In particolare le sue opere sull'aritmetica e sull'algebra sono diventate famose e hanno esercitato notevole influenza sullo sviluppo della matematica medioevale occidentale, oltre che sugli studi successivi compiuti dagli arabi.
Fra i principali concetti da lui analizzati si trova la nozione di equazione di primo e di secondo grado, a coefficienti numerici. Qui al-Khwarizmi si distingue dai predecessori: non si tratta più, come presso gli egizi e i babilonesi, di risolvere problemi aritmetici e geometrici, che si possono tradurre in termini di equazioni, ma al contrario si parte dalle equazioni e i problemi vengono dopo. Il fatto che egli si limiti a considerare equazioni di primo e secondo grado è legato all'esigenza di avere una soluzione per radicali e una verifica geometrica di tale soluzione. L'algebra di al-Khwarizmi è interamente retorica; egli non usa infatti alcun simbolo ed è piuttosto prolisso nelle spiegazioni. La nozione di base è, come si è detto, quella di equazione a coefficienti numerici ed i termini di un'equazione sono indicati con nomi diversi. I numeri sono chiamati "dirham", probabilmente dal nome dell'unità monetaria greca: la dracma; l'incognita è designata con "say'" (cosa) o "gizr" (radice), dal termine arabo che indicava la radice di una pianta, ed è usato anche per indicare la radice quadrata. Infine "mal" (bene, possedimento) denota il quadrato dell'incognita.
Nella parte iniziale dell'*Algebra*, al-Khwarizmi distingue sei tipi canonici o normali di equazione, che egli presenta semplicemente a parole:

1 I quadrati sono uguali alle radici: $ax^2 = bx$

2 I quadrati sono uguali a un numero: $ax^2 = c$

3 Le radici sono uguali a un numero: $ax = c$

4 I quadrati e le radici sono uguali a un numero: $ax^2 + bx = c$

5 I quadrati e i numeri sono uguali alle radici: $ax^2 + c = bx$

6 Le radici e i numeri sono uguali ai quadrati: $bx + c = ax^2$.

In queste forme canoniche i coefficienti a, b, c sono tutti interi positivi e i termini appaiono dunque sempre come grandezze additive. Ogni equazione viene sistematicamente ricondotta ad uno dei tipi indicati e, per la risoluzione, si impiegano due operazioni fondamentali: "l' al-jabr" (completamento, riempimento; tradotto in latino con "restauratio"), che corrisponde ad eliminare i termini negativi, aggiungendo termini uguali nei due membri, e "l'al-muqabala" (messa in opposizione, bilanciamento; in latino "oppositio") che corrisponde alla riduzione dei termini simili nei due membri. Inoltre il coefficiente del termine di secondo grado viene sempre ridotto all'unità, con un'operazione, detta "al-hatt", che in particolare è applicata nella risoluzione delle equazioni dei tipi 4 e 5.
La teoria algebrica elaborata da al-Khwarizmi viene completata ed ampliata dall'egiziano Abu-Kamil (850-930 c.a) nel suo *Libro sull'al-jabr e l'almuqabala*, scritto fra la fine del IX e l'inizio del X secolo. Questo trattato, che sostanzialmente contiene la teoria delle equazioni di primo e secondo grado, ebbe numerosi lettori e commentatori, fra i quali il pisano Leonardo Fibonacci, uno dei maggiori matematici del medioevo in Occidente, che nel *Liber abaci* (1202) riporta parte dei problemi qui affrontati. Fra le caratteristiche più salienti della trattazione di Abu-Kamil si nota un elevato livello teorico e la tendenza all'aritmetizzazione. Abu-Kamil considera ad esempio anche potenze dell'incognita x superiori a due e utilizza le locuzioni "cubo" per indicare x^3,

"quadrato-quadrato" per x^4, "quadrato-quadrato-cosa" per x^5 e così via.
Egli utilizza più ampiamente e con maggior sicurezza, rispetto ad al-Khwarizmi, sia operazioni di calcolo algebrico che trasformazioni complicate sulle espressioni irrazionali, del tipo

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}}.$$

Inoltre enuncia regole precise per la determinazione immediata di x, sotto forma di radicali, per le equazioni di secondo grado dei tipi 4,5,6, già studiate da al-Khwarizmi.
Il primo e principale esponente dell'indirizzo aritmetico-algebrico è il persiano al-Karaji, vissuto tra la fine del X e l'inizio dell'XI secolo, che forma una vera e propria scuola. Egli viene anche chiamato "al-hisabi", cioè maestro di aritmetica, per le sue eccezionali doti in quel campo. Scrive molte e importanti opere, di cui si ricorda in particolare il vasto trattato di algebra intitolato *Al-Fahri* dal soprannome "Fachr'al mulk", dato al vizir Abu Galeb a cui lo scritto era dedicato.
Nella prefazione dell'*Al-Fahri* si trova fra l'altro definito per la prima volta esplicitamente lo scopo dell'algebra: la determinazione delle grandezze incognite mediante quelle note, utilizzando i metodi più efficaci. Al-Karaji espone qui uno studio sulle potenze dell'incognita e, seguendo Diofanto, designa le potenze superiori come prodotti di potenze inferiori, per cui $x^5 = x^2 \cdot x^3$ è chiamato "quadrato-cubo", $x^6 = x^3 \cdot x^3$ "cubo-cubo", e così via.
Al-Karaji riprende sostanzialmente lo scritto di Abu-Kamil che integra sia nella parte teorica che in quella dei problemi, sfruttando ampiamente l'eredità diofantea. In particolare egli applica le operazioni aritmetiche ai monomi e poi a quantità composte da monomi, cioè a polinomi. Fornisce inoltre le formule per il quadrato e per il cubo di un binomio, presentando così i primi elementi di quella che si chiama oggi l'algebra dei polinomi. Uno dei suoi successori, as-Samaw'al, gli attribuisce per di più la tabella dei coefficienti di $(a+b)^n$ fino a $n = 12$, dicendo che la si può prolungare all'infinito se si segue la legge, oggi

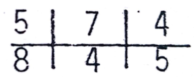
nota come triangolo di Tartaglia o di Pascal. Nell'*Al-Fahri* si trovano anche proprietà di teoria dei numeri, ad esempio le formule per la somma dei primi n quadrati e cubi. Quest'ultima, che si può esprimere in notazioni moderne con $\sum_{n=0}^{k} n^3 = \left(\sum_{n=0}^{k} n\right)^2$, viene presentata da al-Karaji con una dimostrazione geometrica semplice ed elegante.

1.3 Il simbolismo algebrico di Al-Qualasadi

Si osserva che nei trattati di tutti i dotti d'Oriente da al-Khwarizmi a al-Karaji, non esistono dei veri e propri simboli algebrici. Per contro, nei Paesi arabi occidentali, il trattato di aritmetica e algebra d'Abu-l-Hasan 'Ali ibn Muhammad al-Qalasadi, dà un contributo significativo.
Il musulmano al-Qalasadi nasce e cresce a Bastah (1412 c.a), a nord-est della città di Granada. Qui inizia la sua formazione, studiando legge, il Corano e materie scientifiche. Successivamente si trasferisce a Granada, lontano dalla zona di guerra, dove continua gli studi, in particolare quelli di filosofia, scienze e legge musulmana. Al-Qalasadi sceglie di rimanere nel mondo islamico e lascia Granada per viaggiare ampiamente in tutto l'Islam. In particolare trascorre molto tempo nell'Africa settentrionale e nei Paesi islamici che sostenevano l'Andalusia, sia con l'aiuto politico che con l'aiuto militare della resistenza agli attacchi cristiani. Dopo una serie di numerosi viaggi, nei quali incontra insegnanti di matematica, al-Qalasadi raggiunge la Mecca, scopo del suo pellegrinaggio, e torna a Granada. In questo periodo la situazione a Granada era molto critica a causa degli attacchi dei cristiani di Aragona e della Castiglia. Tuttavia, al-Qalasadi insegna e scrive alcune opere molto importanti. La sconfitta di tutto lo stato musulmano a Granada avviene nel 1492, sei anni dopo la morte di al-Qalasadi in Nord Africa, quando la città di Granada cade sotto i cristiani.

Al-Qalasadi è descritto come colui che ha intrapreso i primi passi verso l'introduzione del simbolismo algebrico. I suoi contributi si riscontrano soprattutto nell'uso di parole corte arabe, o semplicemente delle lettere iniziali, come simboli matematici. Al-Qalasadi ha scritto diversi libri sull'aritmetica e uno sull'algebra. Il suo principale trattato è *Chiarimento della scienza dell'arimetica* (*al-Tabsira fi'lm al-hisab*). Questo doveva essere un testo difficile e per questa ragione scrisse una versione più semplice che egli chiamò *Rivelazione della scienza dell'aritmetica* (*Kasf al-mahgub min'ilm al-gubar*). Al-Qalasadi calcola $\sum_{n=0}^{k} n^3$, $\sum_{n=0}^{k} n^2$ utilizzando il metodo di approssimazione successiva per determinare le radici quadrate. Le versioni del trattato aritmetico di al-Qalasadi si sono rivelate popolari nell'insegnamento delle aritmetiche in Nord Africa e le sue opere sono state utilizzate per oltre cento anni. È ormai certo che, nonostante i libri d'insegnamento popolari, c'era poco di originale nel lavoro di al-Qalasadi. Ad esempio, le serie $\sum_{n=0}^{k} n^3$ e $\sum_{n=0}^{k} n^2$ erano state studiate da al-Karaji e anche da al-Samawal, come abbiamo prima visto. Nell'opera *Rivelazione della scienza dell'aritmetica*, compare il termine "gubar" ma non appare per indicare le cifre, bensì come sinonimo della nozione dell'aritmetica scritta.

La prima parte dell'opera tratta dell'aritmetica dei numeri interi; la seconda studia le frazioni tra le quali quelle aventi per numeratore l'unità e le frazioni di frazioni, come per esempio $\frac{4}{5}$ di $\frac{7}{4}$ di $\frac{5}{8}$ che al-Qalasadi scrive come nella sottostante figura.



La terza parte è dedicata all'estrazione delle radici, mentre la quarta alla risoluzione delle equazioni.

Al-Qalasadi non apporta alcun nuovo risultato, solo la simbologia presenta un interesse storico. La radice quadrata è designata dalla prima lettera della parola "gidr" (radice) posta sotto il numero. La stessa lettera (forse come prima lettera del verbo "galah", ignorare) serve a designare la grandezza sconosciuta nelle proporzioni della regola del tre, tanto che i differenti termini delle proporzioni sono separati gli uni dalle dagli altri da tre punti così posti

$$\therefore$$

Nelle equazioni, la prima potenza, il quadrato e la terza potenza delle incognite sono designate dalla prima lettera delle parole "say'", "mal" e "ka'b": questi segni appaiono in tutti i casi al di sotto dei coefficienti.
Si trova da al-Qalasadi un segno che indica l'uguaglianza. Questo segno è ispirato dalle forme dell'ultima lettera della parola "adala" che significa proprio uguaglianza.

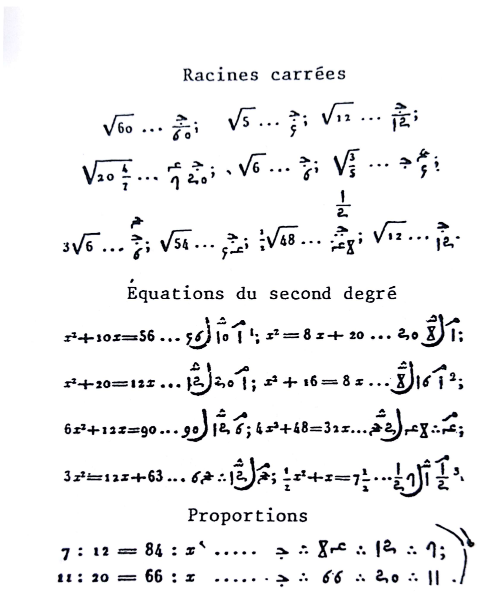


Figura 1.2: Alcuni esempi della simbologia di Al-Qalasadi.

Il simbolismo algebrico comincia a svilupparsi in Europa alla fine del XV secolo, pertanto è difficile immaginare che sia stato elaborato da Al-Qalasadi. Non sappiamo quasi niente dei suoi predecessori sull'uso di questa simbologia. Secondo, ibn-Haldul, al-Qalasadi utilizza dei segni algebrici che servivano bene sia alla riflessione astratta che alla rappresentazione concreta.

Capitolo 2

Contributi arabi ai problemi di geometria

Dopo le apparizioni delle prime traduzioni arabe degli *Elementi* di Euclide e del capitolo di geometria dell'*Algebra* di Al-Khwarizmi, l'eredità dell'Occidente e dell'Oriente in geometria viene sfruttata rapidamente e diventa l'oggetto di autonome ricerche.

Capitolo 3

Contributi arabi ai problemi di geometria

Dopo le apparizioni delle prime traduzioni arabe degli *Elementi* di Euclide e del capitolo di geometria dell'*Algebra* di Al-Khwarizmi, l'eredità dell'Occidente e dell'Oriente in geometria viene coltivata rapidamente e diventa l'oggetto di autonome ricerche.

3.1 I fratelli Banu Musa

Poco dopo Al-Khwarizmi, i fratelli Banu Musa, Abu Ga'far Muhammad (morto nell'872 circa), al-Hasan e Ahmad, figli di Musa ibn Sakir, vicino al califfo al Ma'mun, danno prova di un'intensa attività scientifica. Essi si interessano alla matematica, astronomia, musica e meccanica: costruiscono il loro osservatorio astronomico, collezionano manoscritti e favoriscono la traduzione in arabo di opere greche.

Figura 3.1

Difficilmente si trovano notizie separate dei fratelli Banu Musa. Lavorano spesso insieme, le loro scoperte sono sempre associate, anche se ciascuno di loro ha precise aree di competenza. Muhammad si occupa principalmente di geometria e astronomia, Ahmad lavora sulla meccanica e al-Hasan si dedica maggiormente alla geometria. È assolutamente impossibile scrivere biografie distinte dei tre fratelli, di solito noti come «Banu Musa», ma cercheremo di inquadrare lo scenario storico-culturale in cui essi operano. I tre fratelli fanno parte di un gruppo di studiosi il cui compito era quello di portare avanti e diffondere la matematica greca nel territorio arabo, progetto promosso dai califfi stessi durante i loro regni.

Nel 786 circa Harun al-Rashid diventa il quinto califfo della dinastia Abbaside. Harun governa dalla sua corte nella capitale di Baghdad sull'impero islamico che si estende dal Mediterraneo all'India. Diffonde la cultura alla sua corte e cerca di educare il mondo arabo alle discipline intellettuali che a quel tempo non erano fiorenti. Un esempio di questo cambiamento è visto nella vita di Musa ibn Sakir, padre dei fratelli Banu Musa, che era un ladro nella sua giovinezza ma pian piano si rivolge alla scienza, diventando altamente abile nell'astronomia. E' durante il regno di Al-Rashid che si ha la prima traduzione araba degli *Elementi* di Euclide, ad opera di al-Hajjaj. Questi primi passi consentono la diffusione della matematica greca attraverso l'impero islamico. Il califfo aveva due figli, il più anziano era al-Amin mentre il più giovane era al-Ma'mun, di cui Musa ibn Sakir era molto amico. Con la morte del padre, inevitabilmente scoppiò una guerra di potere tra i due successori, vinta da al-Ma'mun, che prende il comando dalla città di Baghdad e, quando Sakir muore, diviene il custode dei fratelli Banu Musa. Essi ricevono dunque la migliore istruzione: studiano astronomia, geometria, meccanica, musica, e sopratutto matematica. Al-Ma'mun continua il patrocinio dell'apprendimento avviato da suo padre e fonda un'Accademia chiamata "Casa del Sapere", dove vengono tradotti lavori filosofici e scientifici greci.

Figura 3.2: "Casa del Sapere", Baghdad.

Egli si impegna per far costruire una biblioteca di manoscritti, la prima grande biblioteca dopo quella di Alessandria, raccogliendo importanti opere dal mondo bizantino. Oltre alla Casa del Sapere, al-Ma'mun istituisce osservatori in cui gli astronomi musulmani potevano applicare e approfondire le conoscenze acquisite dai popoli precedenti. Nella Casa del Sapere, Al-Ma'mun recluta gli studiosi più bravi e lodevoli, ed è proprio qui che i fratelli Banu Musa si fanno notare per le proprie capacità. In questo clima però, soprattutto con la morte del califfo, intorno all' 883, e il succedersi di altre persone al potere, è inevitabile che i Banu Musa fossero coinvolti in rivalità con altri intellettuali. Collaborando infatti con il califfo al-Mutawakkil nei lavori relativi alla costruzione di canali per una nuova città di al-Djafariyya, essi diventano nemici del celebre filosofo al-Kindi, confiscandogli la biblioteca. Durante questo califfato il clima culturale si irrigidisce, al-Mutawakkil perseguita tutti i gruppi non ortodossi e non musulmani ordinando la distruzione di sinagoghe e chiese a Baghdad. Nel frattempo i tre fratelli, godendo invece del favore del califfo, continuano i loro studi e scrivono le opere più famose, dando i contributi più notevoli alla matematica araba.

Possono essere chiamati discepoli della matematica greca, ma si allontanano dal metodo greco classico per sviluppare nuove vie della matematica. Ci hanno lasciato un'opera conosciuta sotto il titolo di *Il libro dei tre fratelli sulla geometria*, che ci è pervenuto in una traduzione latina di Gerardo da Cremona. Il vero titolo dell'opera è *Il libro del calcolo delle figure piane e sferiche* (*Kitab ma' rifat masahat al-askal al-basita wa-n-kurryya*). Le prime proposizioni sono dedicate al calcolo del cerchio; è qui che appare per la prima volta nella letteratura islamica il vecchio procedimento greco di esaustione, ma è evidentemente utilizzato in maniera talvolta contestabile. Gli autori dimostrano in particolare nella proposizione IV che l'area di un cerchio può essere espressa dal prodotto del raggio e dalla semicirconferenza del cerchio. Nella proposizione V, mostrano che il rapporto tra la circonferenza e diametro è costante; nella proposizione VI dimostrano, ispirandosi ad Archimede, che questo rapporto si pone tra $3 + \frac{10}{71}$ e $3 + \frac{1}{7}$. Nella proposizione successiva dimostrano che la formula di Erone si applica all'area di un triangolo; la dimostrazione si raffina in modo un po' diverso da Erone, autore della *Metrica*. Per quanto riguarda il cono e la sfera, menzioniamo la proposizione XI secondo la quale il volume della sfera si esprime con il prodotto del semidiametro con la terza parte dell'area della sfera e la proposizione XIV secondo cui l'area della superficie di una semisfera è uguale al doppio dell'area del suo grande cerchio. Nella proposizione

XVIII gli autori mostrano come calcolare la radice cubica di un numero che non è un cubo in frazioni sessagesimali con la precisione desiderata. Per questo, dato un numero N, di cui si cerca la radice cubica, si vuole trovare il più piccolo numero intero cubico contenuto in $N \cdot 60^{3n}$. Si ottiene allora il valore approssimato in minuti, secondi, ecc..., cioè $\sqrt[3]{N} = \frac{\sqrt[3]{N \cdot 60^{3n}}}{60^n}$. Ma gli autori non dicono come si può determinare questo più piccolo numero. E' possibile che a quest'epoca, il procedimento di estrazione della radice cubica, analizzato da an-Nasawi, era già conosciuto a Baghdad. Il contenuto di quest'opera e la sua maniera di presentare tutte le proposizioni con le loro dimostrazioni mostrano grandi successi ottenuti in due secoli a Baghdad dalle ricerche in geometria. Il trattato dei Banu Musa ha esercitato una grande influenza nei secoli successivi in Oriente; Nasir ad-Din al-Tusi ne ha fatto un commento e la traduzione latina dell'opera era ben conosciuta in Europa. Sigzi, matematico del X e XI secolo, attribuisce ai fratelli Banu Musa la costruzione dell'ellisse con l'aiuto di un filo (costruzione del giardiniere). Essi inoltre ci hanno lasciato diverse opere di geometria, in particolare sulle sezioni coniche, come anche trattati di astronomia, di statica, filosofia.
Grazie ad un'analisi generale dell'opera dei tre fratelli possiamo notare delle somiglianze con i metodi di Archimede, testimonianza del fatto che i fratelli cominciano i loro studi dalle sue opere, tuttavia cercano di intraprendere un nuovo approccio, e numerose sono le differenze rispetto al matematico greco. I Banu Musa applicano il metodo di esaustione inventato da Eudosso e usato in modo efficace da Archimede. Tuttavia, hanno omesso quella parte del metodo che prevede di considerare i poligoni con 2k lati, per k tendente all'infinito. Questo in sé non può essere considerato un passo avanti perché ciò potrebbe essere dovuto a una mancanza di comprensione dei punti più fini del pensiero geometrico greco. Usato dai Banu Musa, il metodo di esaustione perde gran parte della sua sottigliezza e potenza. Tuttavia, ai Banu Musa vanno riconosciuti dei meriti. I Greci non avevano pensato aree e volumi come numeri,

ma avevano solo confrontato rapporti di aree ecc... . Il concetto di numero dei Banu Musa è più ampio di quello dei Greci. Ad esempio descrivono π come «la grandezza che, moltiplicata per il diametro di un cerchio, produce la circonferenza». Dunque la terminologia aritmetica è forse per la prima volta applicata alle operazioni della geometria. Essi presentano anche dimostrazioni geometriche che implicano il pensiero degli oggetti geometrici in movimento.
Infine da non sottovalutare i contributi nell'astronomia dei tre fratelli. Istruiti da al-Ma'mun per misurare un certo grado di latitudine, hanno eseguito calcoli nel deserto a nord della Mesopotamia e hanno anche effettuato molte osservazioni del sole e della luna da Baghdad. Muhammad e Ahmad misurarono la durata dell'anno, ottenendo il valore di 365 giorni e 6 ore. Le osservazioni della stella Regulus sono state fatte dai tre fratelli su un ponte a Baghdad intorno agli anni 840-41, 847-48 e 850-51.

3.2 Abu l-Wafa

Abu l-Wafa, come i fratelli Banu Musa, gode dell'appoggio e del favore di alcuni califfi, che gli permettono di coltivare i suoi studi e approfondire le sue ricerche. Siamo nel regno di Adud ad-Dawlah dal 949 al 983, il quale diventa grande protettore della scienza e delle arti, sostenendo un certo numero di studiosi. Per questo Abu l-Wafa si trasferisce nel 959 a Baghdad presso la sua corte insieme ad altri matematici eccezionali come al-Quhi e al-Sijzi. Sharaf ad-Dawlah, il figlio di Adud ad-Dawlah, subentra al padre, diventando califfo nel 983. Egli continua a sostenere la matematica e l'astronomia e Abu'l-Wafa e al-Quhi rimangono a corte con il nuovo sovrano, il quale favorisce la costruzione di un osservatorio astronomico, inaugurato nel giardino di palazzo nel 988 alla presenza di numerosi matematici e scienziati. Gli strumenti dell'osservatorio comprendevano un quadrante lungo 6 metri e un sestante di 18 metri di pietra. Abu l-Wafa è il primo a costruire un quadrante a muro per osservare le stelle. Tuttavia, il califfo Sharaf ad-Dawlah muore nell'anno successivo e l'osservatorio viene chiuso.

Abu l-Wafa ci ha lasciato un gran numero di opere originali e lunghi commenti a Euclide, Diofanto e Tolomeo insieme a lavori importanti di geometria e di trigonometria; purtroppo molti dei suoi libri non ci sono pervenuti.

Tra il 961 e il 976 scrive il *Libro necessario agli scribi* (*Kitab fi ma yahtaj ilayh al-kuttab wa'l-ummal min 'ilm al-hisab*), nella cui introduzione sostiene: «... comprende tutto ciò che un esperto o novizio, subordinato o capo delle aritmetiche, necessita di conoscere: l'arte dei pubblici impiegati, l'impiego di tasse di terra e di ogni tipo di attività necessarie in amministrazioni, proporzioni, moltiplicazione, divisione, misurazioni, imposte sul terreno, la distribuzione, lo scambio e tutte le altre pratiche utilizzate da varie categorie di uomini per fare affari e che sono utili per loro nella loro vita quotidiana». È interessante notare che durante questo periodo sono stati scritti due tipi di libri aritmetici: quelli che utilizzano simboli indiani e quelli del tipo del calcolo con le dita. Il testo di Abu l-Wafa è di questo secondo tipo; tutti i numeri sono scritti in parole e i calcoli vengono eseguiti mentalmente. Probabilmente questo perché le opere erano destinate a un pubblico variegato e Abu l-Wafa, nonostante fosse esperto della numerazione indiana, sostiene che questa non trova larga applicazione nel commercio e tra la popolazione media del califfato orientale, motivo per cui utilizza il calcolo a mano rivolgendosi al pubblico cittadino, nettamente più pratico. L'opera è divisa in sette parti, ognuna delle quali contenente sette capitoli:

1. I rapporti (le frazioni sono considerate derivanti da quelle unitarie 1/2, 1/3, 1/4, ..., 1/10);

2. Sulla moltiplicazione e divisione (operazioni aritmetiche con interi e frazioni);

3. Mensurazione (area di figure, volume di solidi e distanze di ricerca);
4. Sulle imposte (diversi tipi di tasse e problemi di calcolo delle imposte);
5. Sullo scambio e sulle azioni (tipi di colture e problemi relativi al loro valore e scambio);
6. Argomenti diversi (unità di denaro, pagamento dei soldati, concessione e trattenimento delle autorizzazioni per navi sul fiume, commercianti sulle strade);
7. Altri temi commerciali.

A tal proposito Abu l-Wafa risulta essere l'unico arabo ad aver parlato di numeri negativi, parlando di "debiti" durante le transazioni commerciali.
Nella parte geometrica di quest'opera, Abu l-Wafa attinge dai materiali provenienti da Al-Khwarizmi e introduce un insieme di elementi supplementari, senza indicare il metodo della dimostrazione. Troviamo per esempio: la formula dell'area di un triangolo data da Erone; le regole per calcolare la superficie di una sfera in funzione dell'area del grande cerchio; le regole per calcolare il volume di una sfera sia in funzione del suo diametro e del perimetro del grande cerchio $\left(d^2 \cdot \frac{c}{6}\right)$, sia in funzione della superficie della sfera $\left(\frac{1}{3} \cdot S \cdot \frac{d}{2}\right)$. In tutti questi casi, Abu l-Wafa dà a π il valore di $\frac{22}{7}$. Per calcolare l'area di un segmento del cerchio in funzione dell'arco o della corda, costruisce la tavola delle lunghezze delle corde di un cerchio di diametro 14 per degli archi pari a $\frac{k}{22}\,180^\circ$ $(k = 1, 2, ..., 22)$, dove le corde sono espresse in sessantesimi cioè in "sair" e parti di "sair". Oltre alla tavola delle corde, Abu l-Wafa cita la formula di origine indiana che esprime il diametro di un cerchio in funzione del numero dei lati n e della lunghezza a_n del lato di un poligono regolare inscritto:

$$d^2 = {a_n}^2 \left[\frac{(n-1)n}{2} + 3\right]\frac{2}{9} = \frac{{a_n}^2(n^2 - n + 6)}{9}.$$

Come si vede facilmente, questa formula dà il valore esatto del diametro per $n = 3$, $n = 4$ e $n = 6$. Per $n = 5$ l'errore per difetto è quasi $0,1\%$, per $n = 10$ è di $1,0\%$ e per $n = 20$ di 2% circa, tanto che per $n \to +\infty$ l'errore tende verso $\frac{\pi - 3}{3}$, cioè è leggermente inferiore a 5%. L'origine di questa formula è a noi sconosciuta.

Abu l-Wafa ha anche scritto un'opera dedicata alla geometria applicata: *Il libro sulle costruzioni geometriche necessarie all'artigiano*. Scritto più tardi, verso il 990, di tale opera possediamo un manoscritto in lingua araba ed anche una traduzione persiana risalente a circa la stessa epoca. Il libro si compone di un'introduzione e di 12 capitoli che contengono un grande numero di costruzioni importanti per la misurazione, l'architettura, la tecnica e la geodesia. Interessante notare che 18 problemi sono quasi risolti con l'aiuto di una singola riga e un compasso con apertura costante. L'utilizzo di questi strumenti è imposto dalle condizioni stesse del problema. L'importanza pratica delle costruzioni viene dal fatto che sul terreno non è vantaggioso tracciare dei cerchi di raggi diversi. Le prime costruzioni fatte con un'apertura costante del compasso risalgono forse alle regole che gli indiani chiamano del "cordon", usate anche dai Greci. L'apertura del compasso, nei numerosi problemi, non può essere scelta arbitrariamente, ma è determinata da un segmento dato dal problema. Nell'introduzione della sua opera, Abu l-Wafa costruisce, con l'aiuto di una riga e di un compasso con apertura costante, le perpendicolari innalzate al centro e alle estremità del segmento dato. Il capitolo I contiene le costruzioni fondamentali: Abu l-Wafa suddivide, utilizzando gli stessi metodi, un segmento qualunque in un numero qualunque di parti uguali, divide un angolo in due parti uguali ed espone due metodi per costruire degli specchi ustori. Secondo il primo metodo, la forma geometrica, che è una parabola, è ottenuta con l'aiuto di un cerchio di cui il raggio è uguale a due volte la distanza focale. Sulle perpendicolari al diametro del cerchio, si tracciano dei segmenti uguali

alle corde che collegano un'estremità del diametro ai punti di intersezione di queste perpendicolari con la circonferenza: le estremità dei segmenti così costruiti si trovano sulla parabola ricercata. Nel secondo metodo Abu l-Wafa, utilizza un fascio di cerchi i cui centri si trovano su una semiretta e che passano tutti per l'origine di questa semiretta. Queste costruzioni non si trovano presso i Greci. Nel capitolo II, dedicato ai poligoni regolari, costruisce, con un segmento dato come lato, poligoni a tre, quattro, cinque, sei, otto e dieci lati. Nel capitolo III Abu l-Wafa indica come costruire delle rette parallele, la tangente ad un cerchio e l'ettagono regolare (sceglie come lato dell'ettagono metà lato del triangolo equilatero inscritto nello stesso cerchio), come effettuare la trisezione meccanica di un angolo e la duplicazione del cubo.
Nel capitolo VI tratta i problemi dei poligoni inscritti gli uni negli altri o circoscritti ad un cerchio. Indichiamo, a titolo di esempio, uno dei cinque metodi di costruzione di un triangolo equilatero inscritto in un quadrato, a sua volta inscritto in un cerchio di centro E.

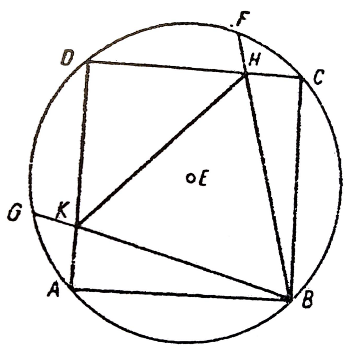


Figura 3.3

Con ED come raggio, si traccia a partire da D un arco di cerchio che taglia il cerchio nei punti F e G. I punti di intersezione H e K delle rette BF e BG con i lati del quadrato CD e AD sono i vertici del triangolo BHK cercato.
Dai capitoli VIII al X, Abu l-Wafa abbozza la divisione del cerchio e delle figure

limitate da alcune rette. Per esempio la divisione di un quadrilatero in due parti uguali con una retta passante dal vertice di uno dei due angoli oppure la determinazione dell'ennesima parte di un parallelogramma da una retta passante per un punto dato situato all'esterno del parallelogramma. Euclide aveva già dedicato un'opera a questi problemi.

Nel capitolo XI Abu l-Wafa risolve diversi problemi in cui si divide un quadrato in una somma di più quadrati o si rappresenta la somma di più quadrati con un quadrato unico.

Molti artigiani, scrive Abu l-Wafa, si pongono questi problemi, «ma tutti i metodi utilizzati da loro sono poco sicuri ed estremamente inesatti». Egli indica prima le costruzioni più semplici: partendo per esempio da un quadrato con lato $n - m$ e utilizzando l'identità $n^2 + m^2 = 2nm + (n - m)^2$ già nota al matematico, ottiene un quadrato $n^2 + m^2$ raggruppando intorno al quadrato $(n-m)^2$ quattro triangoli rettangoli aventi per lato n e m. Questa costruzione, che si può facilmente realizzare, corrisponde alla costruzione che permette di dimostrare il teorema di Pitagora.

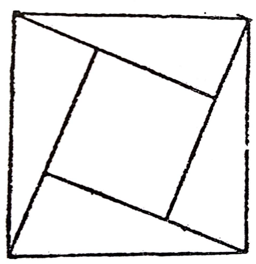


Figura 3.4

Un altro tipo di costruzione illustrata da Abu l-Wafa trasforma due quadrati dati, dove i lati sono di lunghezza diversa n ed m, in un solo quadrato di lato $\sqrt{n^2 + m^2}$. Il quadrato più piccolo ABCD è posto sul quadrato più grande AEFG.

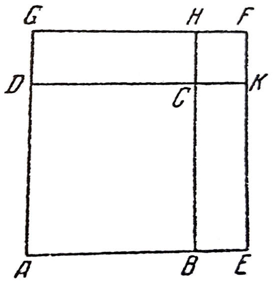


Figura 3.5

La differenza tra il quadrato AEFG e ABCD è formata da due rettangoli uguali ABHG e AEKD e dal quadrato CKFH. Abu l-Wafa divide questi due rettangoli in quattro triangoli congruenti e li dispone intorno al quadrato CKFH. Unendo i vertici dei quattro triangolini, egli ottiene in questa maniera un quadrato uguale alla somma dei due quadrati dati.
Per Abu l-Wafa la costruzione di un quadrato la cui area è uguale alla somma dell'area di due quadrati dati rafforza gli elementi di una dimostrazione del teorema di Pitagora fondata sul principio della comparazione delle figure composte di parti congruenti.
Infatti la dimostrazione del matematico arabo, riscoperta e pubblicata da dall'agente di cambio Henry Perigal verso il 1800, si basa sulla scomposizione del quadrato costruito sul cateto maggiore, in giallo nell'immagine 3.6: tagliandolo infatti con due rette passanti per il suo centro, una perpendicolare ed una parallela all'ipotenusa, si possono ricomporre i quattro piccoli poligoni in modo da incorporare l'altro quadrato, quello costruito sul cateto più piccolo (in rosso), formando il quadrato sull'ipotenusa.

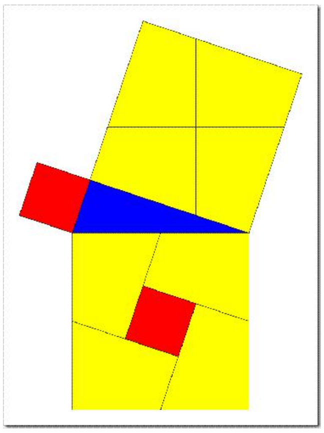


Figura 3.6: Dimostrazione del teorema di Pitagora secondo Abu l-Wafa.

Tale dimostrazione, interessante per il fatto che il motivo ornamentale che se ne produce si trova in molte architetture islamiche, viene presentata da Abu l-Wafa come caso particolare della triplicazione del quadrato.
Nel XII capitolo, Abu l-Wafa studia un metodo per suddividere la superficie di una sfera in poligoni sferici regolari. Gli angoli di questi poligoni sono gli angoli dei poliedri corrispondenti ma il matematico non dice niente a riguardo. Le costruzioni eleganti e semplici di questo capitolo danno i cinque poliedri regolari e due dei tredici poliedri semiregolari scoperti da Archimede.

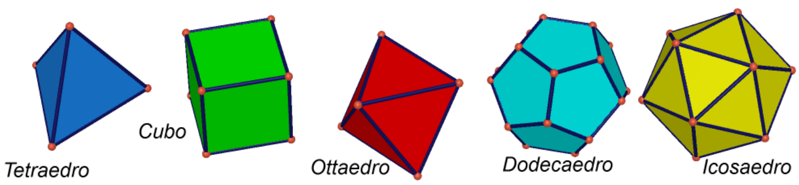


Figura 3.7

La costruzione di altri tre poliedri semiregolari dati da Abu l-Wafa non è esatta. Le fonti sulle quali egli si basa sono a stento conosciute. Oltre gli *Elementi*, egli deve senza dubbio conoscere l'opera di Pappo, ma diverse costruzioni del matematico di Baghdad non si trovano nelle opere precedenti e sembrano dover essere attribuite a lui. Nonostante l'originalità e lo sforzo, molto più tardi Stevino e Keplero si interessano ai poliedri semiregolari, utilizzando come fonti solamente la classificazione e le opere di Pappo.

3.3 La trisezione del quadrato

I problemi geometrici sono tra le sfide che più hanno stuzzicato matematici di ogni epoca. Quello di suddividere un quadrato in tre quadrati più piccoli, fra loro congruenti, collegato alla risoluzione del teorema di Pitagora, è fra questi. Per quanto sia risolvibile con il semplice uso di carta, penna, compasso e forbici, e sia abbastanza semplice da essere compreso da un bambino, esso ha occupato i matematici per secoli.

Il problema si inquadra in quello più generale di suddividere il quadrato in n quadrati congruenti utilizzando il minor numero di pezzi. Il caso più semplice si ha per $n = 4$, dove è sufficiente tracciare i segmenti che uniscono i punti medi del lati opposti.

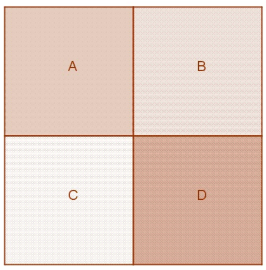


Figura 3.8

Il passo successivo è quello per $n = 2$. La prima soluzione che viene in mente è quella di disegnare le diagonali e poi unire a due a due i triangoli rettangoli ottenuti. Una seconda soluzione possibile consiste nel costruire un quadrato più piccolo con i vertici nei punti medi dei lati. Il secondo quadrato, identico al primo, si ottiene assemblando i quattro triangoli rimanenti. La prima soluzione è preferibile, perché utilizza quattro pezzi invece di cinque.

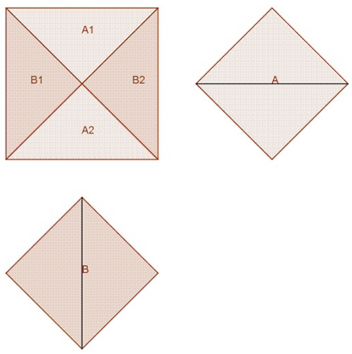


Figura 3.9

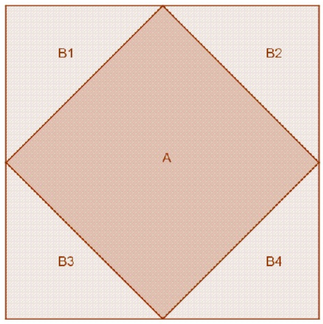


Figura 3.10

A proposito della suddivisione dei poligoni piani, Abu l-Wafa scrive: «Ero presente a una riunione alla quale partecipava un certo numero di geometri e artigiani. Stavano discutendo sulla costruzione di un quadrato a partire da tre quadrati. I geometri tracciarono facilmente un segmento tale che il suo quadrato era uguale ai tre quadrati, ma nessuno degli artigiani era soddisfatto. Essi volevano dividere quei [tre] quadrati in pezzi dai quali si potesse assemblare un quadrato [più grande] (. . .) Alcuni degli artigiani posero uno di questi quadrati al centro e divisero il successivo lungo la sua diagonale e divisero il terzo quadrato in un triangolo isoscele rettangolo e due trapezoidi congruenti e li unirono assieme».

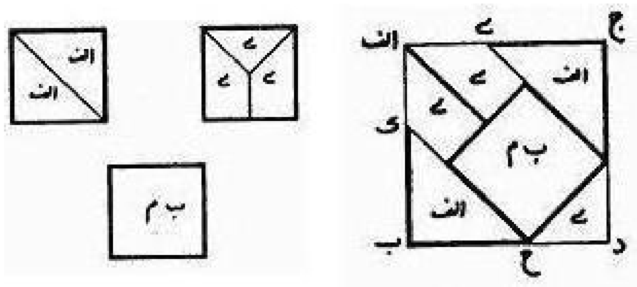


Figura 3.11

La costruzione descritta dal matematico persiano è analizzata nella figura 3.11. Se assegniamo al piccolo quadrato centrale un lato unitario, allora il quadrato grande avrà lato $1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, e dunque area pari a $\dfrac{3}{2}+\sqrt{2}$, diversamente dal risultato sperato (area pari a 3). Pertanto la costruzione è sbagliata. Abu l-Wafa, spiegando che gli artigiani e anche i geometri (muhandis) spesso sbagliavano nell'assemblaggio dei pezzi dei quadrati più piccoli, afferma che i primi mancano di basi scientifiche, mentre i secondi mancano della pratica di cantiere. Egli dà la prima soluzione corretta del problema per $n = 3$, generalizzando la soluzione per dimostrare il teorema di Pitagora. «Una tale soluzione -dice Abu l-Wafa- è sufficiente in geometria, ma non può essere utilizzata nella pratica». Le seguenti figure rappresentano la costruzione di Abu l-Wafa: dato

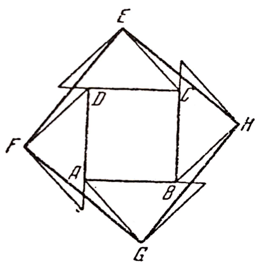


Figura 3.12

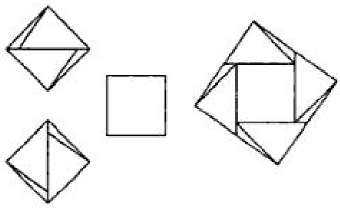


Figura 3.13

il quadrato ABCD, si tracciano le diagonali e, prolungando ciascun lato del quadrato, si creano quattro triangoli rettangoli i cui cateti sono uguali al lato

del quadrato e l'ipotenusa uguale alla diagonale. Si uniscono dopo i vertici E, F, G, H, gli uni agli altri, ottenendo così un quadrato. L'area di quest'ultimo è uguale al triplo dell'area del quadrato dato ABCD, poiché i piccoli triangoli che superano il quadrato EFGH sono congruenti ai triangoli situati all'interno di questo quadrato.
Una rappresentazione della sua generalizzazione si può vedere in molti dei mosaici della moschea Jameh di Isfahan, la più grande dell'Iran.

Figura 3.14

3.4 Verso il tramonto della geometria araba: ultimi risultati notevoli

Abbiamo visto che le opere arabe di aritmetica e algebra contengono spesso delle parti geometriche. Sappiamo infatti che molti capitoli dell'opera di aritmetica di al-Karaji sono dedicati alla geometria. Menzioniamo una formula particolare che serve a calcolare il volume della sfera

$$V = d^3\left(1 - \frac{1}{7} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2}\right)^2,$$

formula secondo la quale $V = d\left(\frac{\pi d}{4}\right)^2$ per $\pi = \frac{22}{7}$. A meno che non si tratti di un errore di copiatura, si deve concludere che per al-Karaji il volume della sfera è uguale ad un parallelepipedo retto di cui l'altezza è uguale al diametro della sfera e la cui base è un quadrato avente per lato un quarto della circonferenza del grande cerchio. Questo ricorda i metodi di quadratura che utilizzavano, secondo Abu l-Wafa, i geometri di quell'epoca.
La formula di al-Karaji non ha niente di particolarmente straordinario se si considera che il manuale enciclopedico del celebre matematico iraniano Beha'ad-Din al-Amuli dà, cinque secoli più tardi, l'espressione del volume della sfera

$$V = d^3\left\{\left(1-\frac{3}{14}\right) - \frac{3}{14}\left(1-\frac{3}{14}\right) - \frac{3}{14}\left[\left(1-\frac{3}{14}\right) - \frac{3}{14}\left(1-\frac{3}{14}\right)\right]\right\} = \left(\frac{11}{14}d\right)^3,$$

da cui per $\pi = \frac{22}{7}$, si ottiene $V = \left(\frac{\pi d}{4}\right)^3$. In altri termini, per Beha'ad-Din, il volume della sfera è uguale a quello di un cubo di cui il lato è uguale al quarto del perimetro del grande cerchio della sfera. Il valore di π che corrisponde effettivamente alla formula di Beha'ad-Din è di $2,9$, diversamente dal valore attribuito da al-Karaji di $3,7$. D'altronde Beha'ad-Din segnala nello stesso passaggio che $V = \frac{d}{2}\cdot\frac{S}{3}$, indicando che l'area S della superficie della sfera è uguale a $4d^2\left(1-\frac{3}{14}\right)$ cioè $\frac{22}{7}d^2$.

In Al-Kashi invece notevole è l'accuratezza dei calcoli, specialmente in relazione alla soluzione delle equazioni con il metodo di Horner appreso quasi senza dubbio dai testi cinesi. Oltre a questo egli apprende anche l'utilizzo delle frazioni decimali e ne diffonde l'uso per problemi che richiedevano un alto grado di approssimazione. I suoi calcoli sono lunghi e complessi e riesce ad ottenere una approssimazione di π che era più accurata di qualsiasi valore ottenuto dai predecessori. Al-Kashi esprime, in linea con l'inclinazione degli arabi per diverse notazioni, il valore di 2π sia in forma sessagesimale che in forma decimale (6, 2831853071795865). La *Chiave dell'aritmetica* di al-Kashi ci permette di giudicare il progresso realizzato nel calcolo delle figure. Il contenuto del IV libro di quest'opera, intitolato *Delle misure* è più ricco delle parti corrispondenti delle opere di al-Khwarizmi e di al-Karaji e i valori numerici dei segmenti incommensurabili sono calcolati con grande esattezza. Al-Kashi risolve i problemi numerici con l'algebra e utilizza qualche formula trigonometrica. Per le aree dei poligoni regolari con n lati, per $n = 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 15, 16$, egli compila delle tavole che indicano il loro rapporto con il quadrato di un lato, cioè $\frac{n}{4} cot \frac{180}{n}$, in frazioni sessagesimali con un'esattezza che va fino a 60^{-5} e in frazioni decimali fino a 10^{-6}. La tavola dei valori per $k\pi$ $(k = 1, 2, ..., 60)$ è esatta sia per frazioni sessagesimali fino al terzo ordine sia per frazioni decimali fino a 10^{-6}. Oltre ai volumi dei solidi elementari, considera anche i volumi del cilindro obliquo, del cono obliquo, la combinazione di un cono e di un tronco di cono. Una tavola particolare dà le caratteristiche numeriche dei cinque solidi regolari e dei due poliedri semiregolari che Abu l-Wafa aveva già costruito. Per terminare, al-Kashi effettua calcoli e costruzioni complicate di ogive (archi), di volte, di cupole e di elementi caratteristici dell'architettura araba chiamati "stalattiti".

Figura 3.15: Tipica decorazione a "stalattiti".

Con la morte di Al-Kashi intorno al 1436, possiamo considerare concluso il periodo di grande importanza per la matematica araba. Il già iniziato collasso culturale è completato dalla disintegrazione politica dell'impero musulmano. Fortunatamente per il patrimonio scientifico mondiale, in corrispondenza al crollo della cultura araba, la cultura europea iniziò la sua ascesa grazie soprattutto al contributo e alle traduzioni arabe.

Capitolo 4

La scuola di traduzione di Thabit ibn Qurra

Grazie all'incessante lavoro di traduzione da parte dei matematici arabi, la teoria delle sezioni coniche è stata largamente applicata nei paesi islamici. In algebra, la loro applicazione alla risoluzione geometrica delle equazioni di terzo e quarto grado darà il via, con la teoria di al-Khayyam (1048-1131 circa), alla geometria algebrica; in geometria invece, i problemi solidi, alcuni ereditati dalla matematica greca, saranno risolti applicando sistematicamente l'intersezione di coniche e si moltiplicheranno fino a dare origine a una nuova disciplina, quella delle costruzioni geometriche, che si costituirà come tale soprattutto con ibn al-Haytham. L'applicazione delle coniche si estenderà anche a problemi appartenenti ad altri campi (in particolare ai lavori sull'ottica) e ciò permetterà a sua volta la scoperta di nuove proprietà di queste curve. Thabit ibn Qurra ha fatto inoltre rivivere il metodo caduto nell'oblio del calcolo delle somme integrali, riprendendo e sviluppando il filone archimedeo sui metodi infinitesimali.

Thabit ibn Qurra vive tra l'836 e il 901, originario di Harran, nel nord della

Siria. Inizialmente svolge la professione di cambiavalute ma la sua vita cambiò radicalmente quando incontrò Muhammad Banu Musa. Quest'ultimo intuisce da subito che, dietro la sua abilità aritmetica, si cela uno spiccato talento matematico e lo convince quindi a dedicarsi a questi studi, molto apprezzati dalla cultura islamica. Lo porta quindi con sé a Baghdad e sotto la sua guida ibn Qurra si addentra nei meandri non solo della matematica ma si avvicina anche all'astronomia e alla filosofia. Esperto conoscitore del greco, del siriaco e dell'arabo, Thabit ibn Qurra fonda una scuola di traduzione favorendo la conservazione in lingua araba di un consistente numero di testi filosofici e scientifici greci altrimenti destinati alla scomparsa parziale o totale.

4.1 Sezioni coniche e considerazioni infinitesimali: antiche e nuove tradizioni in matematica

Il merito principale dei matematici dei paesi islamici è stato quello di trasmettere le scoperte dell'antichità: è dai testi arabi infatti che si è venuto a conoscenza per la prima volta in Europa della teoria delle sezioni coniche. Con gli otto libri delle *Coniche* di Apollonio di Perga (260-200 circa) la trattazione delle coniche raggiunse il più alto livello di generalità nell'antichità. Lo studio di quest'opera, diventata accessibile in arabo grazie ai Banu Musa, influenzò le ricerche sulla teoria delle coniche e i metodi di risoluzione dei problemi geometrici. Degli otto libri di Apollonio solamente sette sono arrivati fino a noi, per di più solamente i primi quattro libri sono pervenuti in greco, mentre i tre successivi sono stati tramandati per mezzo di una traduzione araba ad opera di Thabit ibn Qurra. Sono gli enunciati, più delle soluzioni date da Apollonio,

ad avere suscitato l'interesse dei matematici arabi dal IX all'XI secolo, arricchendo le loro ricerche e riflessioni. La sistematizzazione degli studi ha inoltre comportato l'introduzione di una tecnica di calcoli geometrici di base, che i geometri e matematici del X secolo hanno cercato di migliorare. In questo modo, le coniche sono associate sempre più sistematicamente ad alcune formule.
Il problema della costruzione delle sezioni coniche ha interessato molti matematici, tra cui il figlio di Thabit ibn Qurra, Abu ishaq ibrahim ibn Sinan ibn Thabit ibn Qurra, che ha scritto un'opera sulla costruzione dell'ellisse, dell'iperbole e della parabola con l'aiuto del compasso e della riga.
Esisteva uno strumento speciale per tracciare le sezioni coniche: il compasso perfetto o conico, capace di disegnare una conica con un movimento continuo.

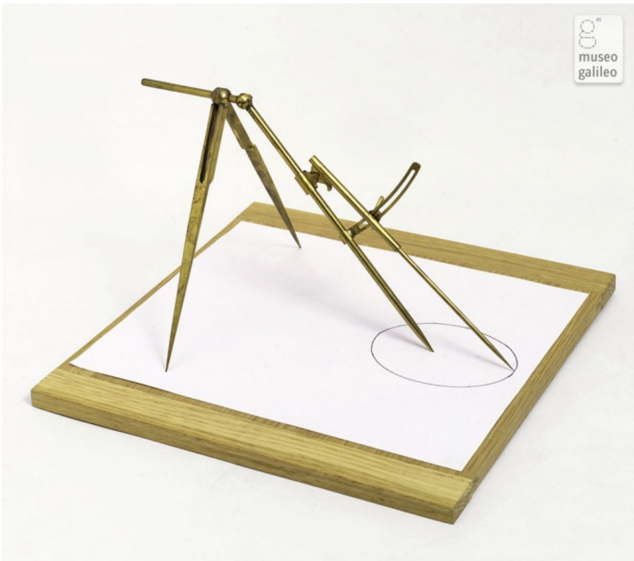


Figura 4.1: Compasso perfetto o conico.

Quest'ultimo si distingueva dal compasso usuale poiché una delle sue aste si allungava o si accorciava. Esso è descritto nelle opere di Sigzi, al-Kuhi e ibn al-Husayn. I lavori sul compasso perfetto, se mirano almeno in parte a risolvere il problema della costruibilità delle coniche nel piano e della loro continuità, rivelano anche il desiderio dei matematici di legittimare le costruzioni per in-

tersezione di coniche, di risolvere problemi solidi e di attribuire loro lo stesso status che avevano le costruzioni con riga e compasso per la risoluzione di problemi piani. Ciò condurrà i matematici in quella direzione in cui si incontrano matematica e filosofia, che riguarda l'esame e la distinzione tra la costruzione di un oggetto matematico e la dimostrazione della sua esistenza.
Diversi saggi del X e XI secolo si sono interessati alla quadratura della parabola, al calcolo dei volumi di rivoluzione e alla determinazione dei centri di gravità. Nello studio di questi problemi, le correnti di pensiero greco hanno esercitato su di essi una grande influenza. Thabit ibn Qurra ha tradotto in arabo il trattato di Archimede *Sulla sfera e il cilindro*.
Usando il metodo infinitesimale degli antichi gli arabi hanno ritrovato con dei mezzi assolutamente nuovi alcuni risultati già ottenuti da Archimede. Nello stesso tempo fecero alcune scoperte che meritano di essere ricordate nel particolare. Analizziamo a tal proposito il libro di Thabit ibn Qurra intitolato *Sulla misura della sezione conica chiamata parabola*. Egli ha contribuito a far rivivere i metodi "infinitesimali" del matematico di Siracusa, attraverso quelle che noi oggi chiamiamo somme integrali, metodo che era stato usato in molti casi già da Archimede stesso (quadratura della spirale, cubatura di una parabola di rivoluzione, ecc...).
La moderna teoria dell'analisi infinitesimale e dell'uso degli integrali per il calcolo di aree e volumi si presenta come una continuazione da un lato dell'antico metodo di esaustione di Eudosso e dall'altro di quella eccellente combinazione di ragionamenti meccanici e geometrici. Infatti Archimede, riprendendo la teoria atomica di Democrito, all'interno del *Metodo*, aveva pensato ogni figura composta o riempita da tutti i suoi elementi, gli "indivisibili", a cui poi aveva attribuito un "peso reale", considerando quindi linee e piani paralleli come "fili" e "lastre pesanti". Dall'analisi delle condizioni necessarie per il loro equilibrio, con una leva, Archimede aveva poi dedotto la misura di superfici (come l'area di un segmento parabolico) e volumi (sfera e cilindro). In seguito Archi-

mede nella *Quadratura della parabola* trova l'area di un segmento parabolico "riempiendo" la figura con triangoli sempre più piccoli e nell'opera *Sulla sfera e il cilindro* determina l'area della superficie sferica e il suo volume, considerando dapprima un numero sempre maggiore di poligoni inscritti e circoscritti ad una circonferenza e poi calcolando i volumi dei solidi ottenuti dalla loro rotazione. Non c'è, ovviamente, al termine di tali costruzioni nessun moderno passaggio al limite: la dimostrazione dell'uguaglianza tra aree o volumi viene fatta utilizzando il classico metodo di esaustione.
Soffermiamoci ora sul problema della quadratura di un segmento della parabola, cioè sulla determinazione della sua area interna. Archimede ha dimostrato che un triangolo inscritto nel segmento parabolico è 8 volte il triangolo successivo, ovvero il triangolo inscritto nel segmento residuo. Ma poiché ogni triangolo genera due triangoli successivi, questi ultimi presi insieme valgono $\frac{2}{8}$ cioè $\frac{1}{4}$ del triangolo precedente. Continuando a costruire triangoli in questo modo, si viene ad avere la seguente somma: $A + \frac{1}{4}A + \frac{1}{16}A + \frac{1}{64}A + ...$
ove A è l'area del primo triangolo.

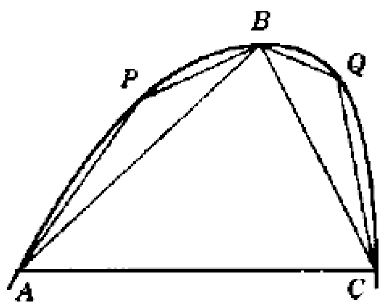


Figura 4.2: Dimostrazione della quadratura della parabola.

Nella Proposizione 23 della *Quadratura della parabola*, Archimede, avendo dunque intuito che la somma delle aree dei triangoli costruiti sui vari segmenti parabolici tendeva, all'aumentare del loro numero, all'area del segmento parabolico stesso, determina, anche se in un caso particolare, la somma di un "numero infinito" di termini, ossia la somma dei termini di quella che modernamente chiamiamo progressione geometrica di ragione $\frac{1}{4}$.
Archimede aveva già dimostrato, nel suo *Metodo*, che l'area del segmento parabolico era pari a $\frac{4}{3}$ dell'area del triangolo in esso inscritto, avente la stessa base e la stessa altezza del segmento medesimo; è quindi possibile che si sia accorto che fermandosi ad un punto della progressione geometrica così costruita, la somma dei termini successivi all'area A del primo triangolo inscritto nel segmento parabolico fosse pari a $\frac{1}{3}$ di A; per cui l'area totale, risultava pari a:
$A + \frac{1}{4}A + \frac{1}{16}A + \frac{1}{64}A + ... = A + \frac{1}{3}A = \frac{4}{3}A.$
Questo risultato di Archimede era conosciuto da Thabit ibn Qurra. La parabola considerata da Thabit ibn Qurra è definita da una proprietà che noi traduciamo oggi con l'equazione $y^2 = px$ e la quadratura della parabola è equivalente al nostro calcolo dell'integrale $\int_0^a \sqrt{px}\, dx$. Ma il calcolo diretto di un tale integrale, come valore limite della somma integrale, con la suddivisione dell'intervallo di integrazione $(0, a)$, in parti uguali, avrebbe necessitato il calcolo della somma della serie $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + ... + \sqrt{n}$. Thabit ibn Qurra elude questa difficoltà ricorrendo a un artificio: suddivide un segmento dell'asse in parti ineguali tali che le ascisse dei punti di suddivisione siano proporzionali alla successione dei quadrati $1^2, 2^2, 3^2, ...$ Allora le ordinate corrispondenti $y = \sqrt{px}$ si comportano come i numeri $1, 2, 3, ...$ La soluzione di Thabit ibn Qurra poggia su importanti proposizioni:

- la proposizione 4 sulla somma successiva dei primi n numeri dispari

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2,$$

- la proposizione 10, che dà la somma dei quadrati dei primi n numeri dispari, utilizzando il risultato precedente

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 + \frac{n}{3} = \frac{2}{3}\left[\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\right] \cdot 2n,$$

- la proposizione 12 che viene dedotta immediatamente

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\frac{(2k-2)+2k}{2} + 1 \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{n}{3} = \frac{2}{3}\left[\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\right] \cdot 2n$$

  e che l'autore formula, (tenuto conto del problema che vuole risolvere) non per i numeri $1, 3, 5, ...$ e $2, 4, 6$ ma per dei segmenti proporzionali a questi numeri;

- la proposizione 14, con la quale egli mostra che per n sufficientemente grande il rapporto:

$$n : \left[\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\right] \cdot 2n$$

  diviene sempre più piccolo.

Thabit ibn Qurra procede alla quadratura di un segmento parabolico di area S tagliato dalla corda coniugata a un diametro qualunque. Per semplificare ci limiteremo al caso del segmento dove la corda è perpendicolare all'asse. Thabit ibn Qurra si rifà alle *Coniche* di Apollonio e dimostra la seguente proposizione (proposizione 16): se si divide un segmento dato dall'asse in n parti proporzionali ai numeri dispari $1, 3, 5, ...2n-1$, allora le corde coniugate passanti per i punti di suddivisione (cioè le ordinate y) sono proporzionali ai numeri pari $2, 4, 6, ..., 2n$ (si potrebbe ugualmente invertire la tesi).

Si uniscono quindi con dei segmenti la sommità della parabola e la estremità delle corde successive.

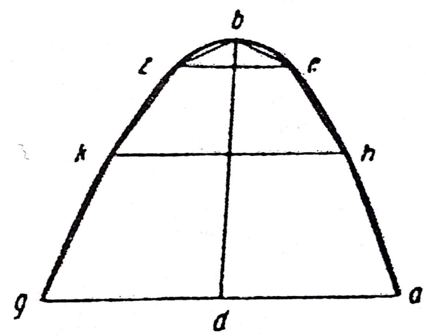


Figura 4.3

Nella tesi seguente, la proposizione 17, Thabit ibn Qurra dimostra che il poligono S_n, così ottenuto, composto dal triangolo σ_n e da $n-1$ trapezi, è più piccolo rispetto ai 2/3 del rettangolo R circoscritto al segmento parabolico della quantità $\frac{n}{3}\sigma_n$; quindi si ha $\frac{2}{3}R - S_n < \frac{n}{3}\sigma_n$, dove l'area di σ_n è il prodotto del primo segmento dell'asse e della prima semicorda. Infatti le parti dell'asse (quest'ultimo di lunghezza a) sono uguali a $u, 3u, 5u, ..., (2n-1)u$, con $u = a/n^2$, mentre le corde sono uguali, con l'equazione della parabola, a $2\sqrt{pu}, 4\sqrt{pu}, 6\sqrt{pu}, ..., 2n\sqrt{pu}$. In seguito si ottiene l'area del poligono inscritto, cioè della somma integrale, con il seguente valore:

$$S_n = u\frac{2\sqrt{pu}}{2} + 3u\frac{2\sqrt{pu}+4\sqrt{pu}}{2} + ... + (2n-1)u\frac{(2n-2)\sqrt{pu}+2\sqrt{pu}}{2.}$$

Poiché l'area del rettangolo circoscritto è uguale a:

$$R = [u + 3u + ... + (2n-1)u] \cdot 2n\sqrt{pu},$$

la proposizione 17 si deduce immediatamente dalla proposizione 12. Nella proposizione 18 Thabit ibn Qurra dimostra che per un numero n sufficientemente grande delle parti in cui è diviso l'asse della parabola, S_n meglio approssima l'area del segmento parabolico S. Si utilizzano qui delle figure circoscritte convenienti che, attraverso il metodo di esaustione, servivano come base alla vecchia dimostrazione della proposizione 1 del libro X degli *Elementi* di Euclide. Questa proposizione dice: «quando si toglie dalla più grande delle due grandezze date più della metà, e da ciò che resta più della sua metà, e di nuovo da quello che resta più della sua metà ancora e così via... se si segue questo procedimento un gran numero di volte, si può ottenere una parte che è più piccola della più piccola delle due grandezze date». Nella proposizione 19, Thabit ibn Qurra constata, basandosi sulla proposizione 17, che per un numero n di suddivisioni assai grandi, la differenza $\frac{2}{3}R - S_n$ diviene più piccola di una qualunque area arbitrariamente data. Il passaggio al limite sarà effettuato nella proposizione 20: infatti tenuto conto delle due proposizioni precedenti, le due ipotesi, $S > \frac{2}{3}R$ e $S < \frac{2}{3}R$, portano a una contraddizione da dove risulta che $S = \frac{2}{3}R$. Con l'aiuto di questo stesso procedimento, Thabit ibn Qurra ha calcolato per la prima volta, un integrale $\int_0^a x^n \, dx$ per un valore frazionario dell'esponente n, cioè $\int_0^a x^{\frac{1}{2}} \, dx$, procedendo a una suddivisione dell'intervallo di integrazione in n parti ineguali. E' con un procedimento analogo, consistente nella divisione dell'asse delle ascisse in segmenti che formano una serie geometrica, che Fermat nel XVII secolo, intraprende la quadratura delle curve $y = x^{\frac{m}{n}}$, con $\frac{m}{n} \neq -1$.

Il trattato di Thabit ibn Qurra sulla parabola si riallaccia ad un altro dei suoi libri, *Sul calcolo delle paraboloidi*, in cui egli dà una classificazione dei paraboloidi di rivoluzione generati dalla rotazione dei segmenti definiti da una corda qualunque o da un diametro qualunque e una corda ad esso coniugato. Questi solidi sono divisi in due gruppi: *Le cupole paraboliche* e *le sfere paraboliche*. Nel primo gruppo, si distinguono:

1. *le cupole con vertice arrotondato*, dove l'asse di rotazione è l'asse della parabola;

2. *le cupole con vertice appuntito*, ottenute quando il segmento in rotazione non contiene l'asse della parabola;

3. *le cupole con vertice incavato*, quando il segmento in rotazione contiene l'asse della parabola.

Il secondo gruppo comprende:

1. *le sfere in forma di zucca*, ottenute dalla rotazione di un segmento retto intorno ad una corda coniugata all'asse;

2. *le sfere ovoidi*, ottenute dalla rotazione di un segmento intorno ad una corda non perpendicolare a un diametro coniugato.

Thabit ibn Qurra si occupa del calcolo dei volumi delle cupole paraboliche ma il suo metodo è diverso da quello di Archimede. Il primo infatti si dedica al calcolo del volume delle cupole con vertice appuntito e con vertice incavato; l'altro invece ai paraboloidi di rivoluzione, dove l'asse della parabola è uguale all'asse di rotazione. Dalla proposizione 11, la più importante del trattato di Thabit ibn Qurra, si ha:

$$\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n}(2k+1)[(2k+2)^2+(2k)^2+2k(2k+2)]+\frac{2}{3}\sum_{k=0}^{n}(2k+1)=\frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n}(2k+1)\right]\cdot(2n+2)^2.$$

Questa è essenziale per calcolare il volume di un solido inscritto in una cupola e costituito da un cono e dai tronchi di coni.

4.2 L'eredità dei lavori di Thabit ibn Qurra

Le opere di Thabit ibn Qurra hanno fornito spunti per altre ricerche. Suo figlio Abu ishaq ibrahim ibn Sinan ibn Thabit ibn Qurra ha trovato un altro procedimento per effettuare la quadratura della parabola mentre al-Kuhi ha indicato un mezzo molto più semplice e molto più rapido per effettuare la cubatura della cupola parabolica. Thabit ibn Qurra si serve di 36 proposizioni aritmetiche e geometriche, al-Kuhi invece arriva allo stesso risultato servendosi solo di 3 proposizioni.

Dopo Thabit ibn Qurra e al-Kuhi, c'è ibn al-Haytam, che ha portato un importante contributo alla storia del calcolo infinitesimale calcolando il volume di un solido di rivoluzione generato dalla rotazione di un segmento parabolico intorno ad un'ordinata qualunque. Nel suo *Trattato sulla misura di un solido parabolico* che noi conosciamo da un manoscritto del XVI secolo, ibn al-Haytam dichiara che sono i lavori di Thabit ibn Qurra e al-Kuhi che hanno dato l'impulso a queste ricerche. Egli ricorda i problemi risolti da questi due matematici e rimprovera al primo la difficoltà e la lunghezza dei suoi metodi e al secondo le lacune e la brevità delle sue dimostrazioni. La soluzione apportata da ibn al-Haytam al problema della cupola parabolica è certamente originale, ma il suo contribuito più interessante è la cubatura del secondo gruppo dei solidi di rivoluzione, cubatura che né Thabit ibn Qurra né al-Kuhi erano giunti ad effettuare.

Non esporremo la dimostrazione di questi matematici ma ne citeremo solamente la tesi e i lemmi più importanti. In primo luogo, ibn al-Haytam trova quattro formule diverse dando le somme degli interi naturali per le prime quattro potenze. La somma degli interi naturali alla quarta potenza, ottenuti qui per la prima volta, è dato da ibn al-Haytam sotto la seguente formula:

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \left(\frac{n}{5} + \frac{1}{5}\right) n \left(n + \frac{1}{2}\right) \left[(n+1)n - \frac{1}{3}\right].$$

Più tardi questa formula sarà ripresa sotto una forma un po' diversa, ma senza dimostrazione, nella *Chiave dell'aritmetica* di al-Kashi. Inoltre ibn al-Haytam stabilisce le disuguaglianze seguenti:

$$\frac{8}{15}(n-1)n^4 < \sum_{k=1}^{n-1}(n^2-k^2)^2 < \frac{8}{15}n \cdot n^4,$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}(n^2-k^2)^2 > \frac{8}{15}n \cdot n^4,$$

che gli permettono di valutare i valori approssimati di cui ha bisogno per passare implicitamente al limite e per dimostrare l'unicità della sua soluzione. I principali risultati ai quali egli è pervenuto sono i seguenti:

1. Il volume del solido di rivoluzione generato dalla superficie *abg* nella sua rotazione intorno a un diametro qualunque *ag* (*bd* è una corda coniugata) è uguale al volume della metà del cilindro di altezza *kl* uguale al segmento *ag* del diametro e di raggio uguale al segmento *bk*, perpendicolare a questo diametro.

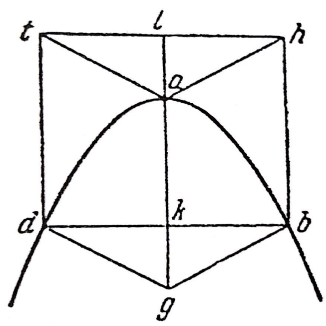


Figura 4.4

2. Il volume del solido di rivoluzione generato dalla rotazione del segmento parabolico *abg* intorno all'asse *ag* è uguale ai $\frac{8}{15}$ del volume del cilindro di altezza *kl* uguale all'asse *ag* e raggio di base uguale al segmento *bk* perpendicolare all'asse.

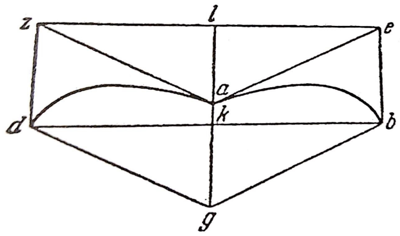


Figura 4.5

Questa proposizione implica un calcolo equivalente al calcolo dell'integrale definito $\int_0^a t^4\,dt$. Supponiamo che bg sia perpendicolare ad ag. Scegliamo la retta ag come asse delle ordinate e la retta bg come asse delle ascisse. Poniamo $dg = bg = r$ e $ag = h$. Il volume V del solido di rivoluzione generato dal segmento abg della parabola $y^2 = p(x+r)$ è dato dunque dall'integrale seguente:

$$V = \pi \int_0^h x^2\,dy = \pi \int_0^h \left(\frac{y^4}{p^2} - \frac{2ry^2}{p} + r^2\right) dy = \pi \left(\frac{h^5}{5p^2} - \frac{2rh^3}{3p} + r^2 h\right).$$

Se $x = 0$ allora $p = \dfrac{h^2}{r}$ con $y = h$ e ibn al-Haytam giunge allora a:

$$V = \frac{8}{15}\pi r^2 h.$$

Questo risultato di ibn al-Haytam non era conosciuto dai matematici greci. E' stata riscoperta, dai matematici europei della prima metà del XVII secolo, la regola più generale dell'integrazione delle potenze dove l'esponente è un intero positivo qualunque, regola che fu quasi immediatamente estesa agli esponenti frazionari e agli esponenti negativi.

Accanto a questi indimenticabili lavori se ne incontrano altri che furono fallimentari come l'opera di Ahmad ibn 'Umar al-Karabisi sul calcolo del volume di un toro. I risultati ottenuti in quest'opera erano già conosciuti dai matematici ellenistici e si basano su dei fondamenti sbagliati.

Conclusione

Dalla traduzione di alcuni capitoli del libro di Adof P. Youschkevitch, *Les mathématiques arabes* e dall'approfondimento di alcune tematiche riguardanti l'algebra, la geometria e l'analisi della matematica araba, è impossibile non notare il mescolamento di antiche e nuove tradizioni, frutto delle incredibili capacità di relazione che l'Islam dimostra di possedere sia quando guarda a Occidente, sia quando guarda a Oriente. La matematica islamica consiste infatti di quattro componenti importanti:

1. un'aritmetica di chiara derivazione indiana, compreso il principio posizionale;

2. un'algebra di derivazione mista (indiana, persiana, greca) ma con profonde innovazioni originali;

3. una trigonometria fondamentalmente ellenistica ma innervata dalle concezioni indiane e da sviluppi originali;

4. una geometria di origine greca, cui gli islamici forniscono un contributo originale.

Insomma, il legame dell'Islam con il mondo greco antico non è esclusivo, ma è forte, sistematico e decisivo: un vero e proprio flusso ininterrotto di conoscenze che vengono assorbite, metabolizzate e sviluppate. I primi due secoli della dinastia degli Abbasidi (periodo in cui operano al-Khwarizmi, i Banu Musa, Abu l-Wafa) sono considerati i secoli del "rinascimento islamico": per gli arabi è un'epoca di grande sviluppo economico, civile e culturale di cui è parte non marginale la scienza. Tanto che molti considerano la scienza prodotta nel corso di questi secoli come una sorta di ripartenza – un rinascimento, appunto – del sapere ellenistico. Molti studiosi e uomini di cultura si ritrovano fianco a fianco a Baghdad, contagiandosi e la matematica islamica è un esempio luminoso di questo contagio originale e creativo, foriero di nuova conoscenza. È traducendo dal sanscrito e dal greco (direttamente o attraverso il siriano) che gli islamici possono realizzare un'operazione davvero inedita: intrecciare le conoscenze geometriche occidentali con le conoscenze algebriche e aritmetiche orientali, raggiungendo con questa fusione livelli altissimi. Dunque il contributo islamico allo sviluppo della matematica va ben oltre la mera assimilazione e fusione della matematica ellenistica e di quella indiana (opera che, da sola, sarebbe comunque eccezionale). Gli arabi hanno contribuito con un proprio apporto originale allo sviluppo della matematica e hanno consentito all'Europa di scoprirla, a partire dal XIII secolo.

"Anche quando certe conoscenze matematiche si sono obliate del tutto, rimane saldo l'abito del rettamente ragionare, il gusto per le dimostrazioni eleganti, il disinteresse e l'indipendenza nel giudicare, il pensiero logico disciplinato, lo spirito scientifico acuito, la precisione dell'espressione, la saldezza dei convincimenti, il senso del vero".

Giovanni Antonio Colozza (1857-1943)

Bibliografia

[1] Adof P. Youschkevitch, *Les mathématiques arabes*, Librarie Philosophique J. Vrin, 2000.

[2] Carl B. Boyer, *Storia della matematica*, Oscar Mondadori, 2015.

[3] *Algebra Islamica*, slide del Seminario della Prof.ssa Clara Silvia Roero.

[4] Roshdi Rashed *Les mathématiques infinitésimales du IX au XI siècle*, volume I e II, Al-Furqan Islamic Heritage Foundation.

Siti consultati:

[5] `http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/`

[6] `https://web.math.unifi.it/archimede/islam/islam.html`

[7] `http://www.treccani.it/enciclopedia/`

[8] `http://www.ilpost.it/2016/03/14/pi-greco-day-storia/`

[9] `http://keespopinga.blogspot.it/`