UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FERRARA
- EX LABORE FRUCTUS -

L'ALGEBRA DI OMAR AL-KHAYYAM

Breve studio sulle equazioni di terzo grado

Corso di Divulgazione e museologia della matematica
Anno accademico 2016 – 2017

Docente del corso: Prof.ssa A. Fiocca
Studentesse: Silvia Baroncelli, Selene Tamagnini

Indice

Capitolo 1

Problemi geometrici ed equazioni di III grado

1.1 Problemi geometrici nella civiltà Greca

Nelle opere di al-Khwarizmi (780 ca – 850 ca), di Abu Kamil (850 ca – 930 ca) e al-Karagi (953 ca – 1029 ca), la teoria delle equazioni tratta di equazioni lineari e di secondo grado. Ma a partire dal IX secolo, i matematici di Baghdad cominciarono a studiare le equazioni di terzo grado e fecero, in tale ambito, delle scoperte ragguardevoli.
Le loro opere devono la loro origine alle ricerche fatte su un problema di Archimede in cui si cerca di dividere una sfera con un piano, tale per cui i volumi dei due segmenti che ne risultano siano in un rapporto dato (proposizione 4 del libro II, *Sulla sfera e il cilindro*).

Il bizantino Eutocio d'Ascalona (circa 500 d.C.), che commentò le opere di Archimede, diede a tale problema una soluzione geometrica che fa intervenire una parabola e un'iperbole equilatera traslata.
Secondo Eutocio, Dionisodoro avrebbe risolto tale problema con l'aiuto di una parabola traslata (simmetrica rispetto all'asse delle x) e di un'iperbole.
Diocle (II sec d.C.) ha dato la costruzione di un lemma di Archimede annunciato in forma generale riguardante la divisione di un segmento utilizzando un'ellisse e un'iperbole; il problema di Diocle non può essere espresso attraverso un'equazione di terzo grado a tre termini, ma necessita di essere espressa mediante un'equazione completa di terzo grado.
I problemi riguardanti la duplicazione del cubo e la divisione di una sfera furono gli unici che i Greci (mediante i metodi che utilizzavano) abbiano ricondotto a equazioni di terzo grado. I geometri greci svilupparono un metodo geometrico per la costruzione di radici di un'equazione cubica, ma non applicarono tale procedura ad altri tipi di problemi e non elaborarono nemmeno una teoria generale delle equazioni di terzo grado; questo verrà fatto appunto dai sapienti dei paesi islamici.

1.2 Problemi geometrici nella civiltà Araba

> *"La soluzione delle equazioni di terzo grado mediante l'uso di coniche che s'intersecano è il risultato più importante dell'algebra araba. La matematica usata è esattamente dello stesso tipo dell'algebra geometrica greca, anche se vengono impiegate sezioni coniche. L'obiettivo dovrebbe essere una risposta aritmetica, ma gli arabi potevano raggiungere questo risultato soltanto misurando la lunghezza finale che rappresentava x"*
>
> Morris Kline

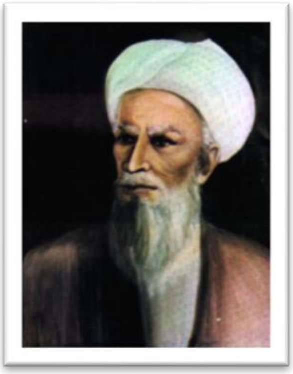
Gli arabi cercarono di far progredire l'algebra mediante la geometria. Lo stimolo iniziale fu fornito dai problemi geometrici classici o astronomici, che si traducevano in equazioni di terzo grado. Si ricordi ad esempio il problema della duplicazione del cubo, ovvero l'inserzione di due medi proporzionali x e y fra i numeri a e b, per cui

$$a : x = x : y = y : b$$

Questo si traduce nelle equazioni $x^2 = ay$ o $y^2 = bx$ e $xy = ab$, che conducono all'equazione $x^3 = a^2b$ oppure $y^3 = ab^2$.
Per quanto riguarda la soluzione di $x^3 = a^2b$ come ascissa del punto di incontro della parabola $x^2 = ay$ e dell'iperbole $xy = ab$, possiamo citare Menecmo (IV sec. a.C.), il quale risolse con questo stratagemma anche il problema della duplicazione del cubo: si trattava infatti di trovare lo spigolo di un cubo, il cui volume fosse il doppio del volume di un cubo dato, cioè di risolvere l'equazione $x^3 = 2a^3$, cosa che egli ottenne con l'intersezione della parabola $x^2 = ay$ e dell'iperbole $xy = 2a^2$.

Ancora più interesse suscitava però, presso gli arabi, il problema posto da Archimede.

Non conosciamo molto della vita di al-Mahani (820 ca – 880 ca); sappiamo però che il suo lavoro nell'ambito dell'algebra era motivato dal tentativo di risolvere appunto il problema di Archimede.



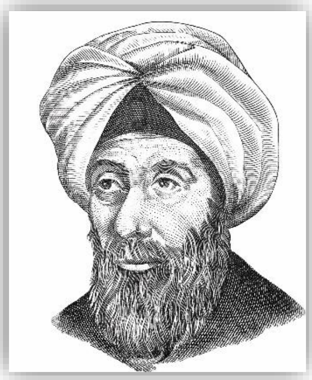
Al-Mahani

Al-Mahani fu il primo ad interessarsi al problema di Archimede e, secondo la tradizione, cercò di risolverlo in maniera algebrica esprimendolo come *"uguaglianza di un cubo e di un numero a un quadrato"*. Ciononostante, al-Mahani non riuscì a costruire la radice dell'equazione.
Omar al-Khayyam scrisse:

"Al-Mahani è stato uno degli autori moderni che concepì l'idea di risolvere il teorema ausiliario utilizzato da Archimede nella quarta proposizione del secondo libro del suo trattato sulla sfera e il cilindro in maniera algebrica. Ad ogni modo, arrivò ad un'equazione coinvolgente cubi, quadrati e numeri che non riuscì a risolvere nemmeno dopo tanta meditazione. Allora, questa soluzione fu dichiarata impossibile finché Ja'far al-Khazin la risolse con l'aiuto di sezioni coniche."

Infatti Abu Ja’far al-Khazin (900 ca – 971 ca), autore di un commento al decimo libro degli *Elementi* di Euclide e di altre opere di matematica e astronomia, trovò appunto una soluzione al problema di Archimede utilizzando le sezioni coniche.

Quasi contemporaneamente il problema di Archimede fu risolto con l’aiuto di una parabola e un’iperbole da Abu Ali al-Hasan ibn al-Hasan ibn al-Haytham (965 ca – 1040 ca), conosciuto in Europa occidentale con il nome di al-Hazen. Al-Haytham fu un matematico, un astronomo, un fisico e un medico; il suo libro sull’ottica presenta importanti scoperte sulla fisiologia della vista e sulla teoria della riflessione e rifrazione della luce e influenzò notevolmente lo sviluppo dell’ottica anche nell’Europa medioevale.



Al-Haytham

In particolare, studiò il problema della determinazione del punto in cui si riflette un punto luminoso su uno specchio cilindrico, date le posizioni del punto luminoso e dell’occhio. Tale problema si riconduce al seguente: siano dati in un piano un cerchio e due punti situati all’esterno del cerchio; si deve trovare un punto, situato sulla circonferenza, tale per cui le rette congiungenti questo punto ai due punti dati formino degli angoli acuti con il raggio del cerchio passante per questo punto.

Tale problema può essere espresso da un’equazione di quarto grado; Al-Haytham lo risolse con l’aiuto di un cerchio e di un’iperbole. Nel XVII secolo, Huygens, Barros e altri studiosi si interessarono al *problema di al-Hazen.*

Alla fine del X secolo, Abu Sahl Waygan ibn Rustam al-Kuhi (940 ca – 1000 ca) propose un nuovo problema: si trattava di trovare un segmento di sfera di volume pari a quello di un segmento di sfera dato e di area pari a quella di un altro segmento di sfera dato.

Definiamo y l’altezza del segmento della sfera cercata e x il suo raggio; siano poi a e b rispettivamente il volume e l’area dei segmenti di sfera. Allora:

$$\frac{\pi}{3}y^2(3x-y)=a \quad ; \quad 2\pi xy=b$$

Dopo le sostituzioni $\frac{a}{\pi}=a', \frac{b}{\pi}=b'$ otteniamo:

$$y^3+3a'=\frac{3}{2}b'y \quad ; \quad x^3+\frac{b'^3}{24a'}=\frac{b'^2}{4a'}x^2$$

Al-Kuhi si servì di una parabola e di un’iperbole per risolvere il problema attraverso una costruzione che gli permise di ottenere le radici delle due equazioni, in particolare rispettivamente

$$y^2=\left(\frac{b'}{2a'}-2x\right)\cdot 3a' \ \text{ e } \ xy=\frac{b'}{2}$$

Successivamente studiò le condizioni per cui il problema possiede una soluzione, compiendo quindi un’analisi completa del problema di Archimede.

Ci si scontrava quindi sempre di più con problemi che conducevano ad equazioni di terzo grado. Fu così che si riuscì a calcolare le lunghezze dei lati di alcuni poligoni regolari sotto forma di radici di equazioni di terzo grado; questo interessava anche i lavori di misurazione e di definizione di tavole di corde o di seni.

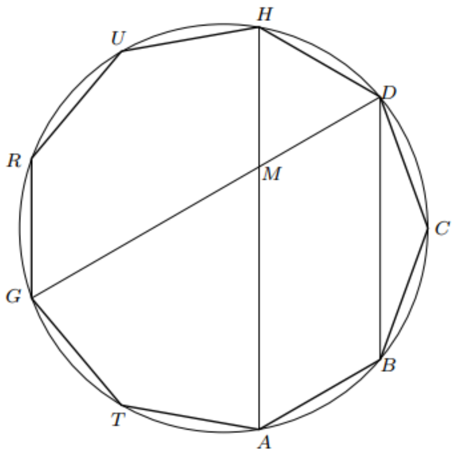
Al-Biruni

Al-Biruni (973 ca - 1048 ca) formulò esplicitamente le due equazioni

$$x^3 = 1 + 3x \qquad x^3 + 1 = 3x$$

di cui fornì risultati approssimati senza spiegare come li ottenne; tuttavia, a lui sono attribuite alcune costruzioni geometriche che si riportano in seguito.

Nella prima costruzione, dopo aver scelto un'appropriata unità di misura, si ottiene l'equazione $x^3 = 1 + 3x$, dove la x rappresenta la corda di un arco uguale ai $\frac{2}{9}$ della circonferenza. Per la soluzione della equazione trattata da al-Biruni seguiamo l'esposizione del Professor Silvio Maracchia dell'Università La Sapienza di Roma.
Si consideri un ennagono regolare di lato unitario, inscritto in una circonferenza e si considerino le diagonali DB, HA e DG tali che gli angoli alla circonferenza BDG, GDH, HAB e DHA siano uguali tra loro; infatti sottendono un arco di ampiezza tripla rispetto a quelli sottesi dai lati uguali dell'ennagono.



Poiché un angolo interno di un ennagono regolare ha ampiezza $\frac{7}{9}\pi$ e dunque gli angoli alla base del triangolo isoscele CBD hanno ampiezza $\frac{\pi}{9}$ si conclude che l'ampiezza comune di BDG, GDH, HAB e DHA è di $\frac{\pi}{3}$. In particolare, il triangolo DHM è equilatero e le coppie di rette BD ed AH, AB e GD sono parallele a due a due: in particolare $ABDM$ è un parallelogramma e $DM = AB = 1$.
Occorre ora richiamare un teorema di geometria euclidea, il teorema di Tolomeo, in base al quale in un quadrilatero inscritto in una circonferenza la somma delle aree dei rettangoli formati da coppie di lati opposti coincide con l'area del rettangolo che ha per lati le diagonali del quadrilatero stesso. Considerando allora i quadrilateri $ABDH$ e $ABCD$ si ottiene

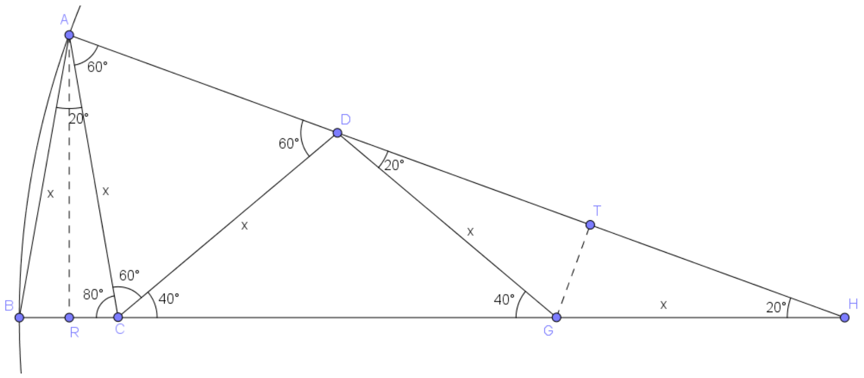
$$AH \times BD + AB \times DH = AD \times BH \quad \text{e} \quad AD \times CB + CD \times AB = AC \times DB$$

Se si pone $BD = x = AM = AC$, equivalgono a

$$(1 + x)x + 1 = AD^2 \quad \text{e} \quad AD + 1 = x^2$$

da cui segue, eliminando $AD, x^3 = 3x + 1$.

Per quanto riguarda la seconda costruzione, si trova anche nel contemporaneo di al-Biruni, Abu-I-Gud.
Sia un angolo al centro AHB di 20° inscritto in un cerchio di cui si prende il raggio come unità.



Si considera la corda $AB = x$ come lato di un poligono regolare di 18 lati inscritto dentro al cerchio. Tra i lati AH e BH dell'angolo al centro, tracciamo la linea spezzata $ACDG$, le cui parti rettilinee sono ciascuna pari a x. Abbassiamo poi da G la perpendicolare GT su AH e poi da A la perpendicolare AR su BH.
Essendo i triangoli BAC e AHB simili, avremo

$$\frac{BC}{AB} = \frac{AB}{AH}$$

ma, essendo $AH = 1$ e $AB = x$, si traduce in $BC = x^2$.
Lo stesso vale per i triangoli ARH e GTH, pertanto

$$\frac{HR}{AH} = \frac{HT}{HG}$$

ma, essendo $AH = 1$, $HR = 1 - \frac{x^2}{2}$, $HT = \frac{1-x}{2}$ e $HG = x$, la proporzione si traduce in $x^3 + 1 = 3x$.
Dopo aver calcolato x, il lato del poligono di 18 lati, possiamo calcolarci il lato dell'ennagono, che non è altro che il quadrato di x.

Thabit ibn Qurra (836 ca – 901 ca) aveva fatto conoscere ai sapienti arabi l'opera di Archimede sull'ettagono regolare, in cui il lato è costruito con l'aiuto di un metodo che si può realizzare utilizzando delle sezioni coniche.

Al-Kuhi (940 ca – 1000 ca) aveva già realizzato una costruzione identica; d'altra parte nella letteratura araba non riscontriamo casi in cui questa costruzione sia stata ricondotta ad un'equazione.

L'importanza dei problemi che venivano ricondotti a equazioni di terzo grado di forme diverse fecero apparire la necessità di costruire una teoria più generale da una parte, e di trovare metodi di risoluzione numerica dall'altra.
Abu-I-Gud sembra essere stato uno dei primi ad aver tentato, sulla base dei procedimenti geometrici degli Antichi, di sviluppare una teoria generale delle equazioni di terzo grado; tuttavia, le sue opere menzionate da Omar al-Khayyam non sono state conservate. Ci è pervenuto solo un trattato di algebra di al-Khayyam, che comunque è una delle più grandi scoperte della scienza araba.

Capitolo 2

Omar al-Khayyam e le equazioni di III grado

2.1 Note biografiche di Omar al-Khayyam

Omar al-Khayyam fu un poeta, filosofo, matematico e astronomo persiano vissuto nella seconda metà dell'undicesimo secolo. C'è discordanza per quanto riguarda la data di nascita e di morte, ma sembrerebbe essere nato il 18 maggio del 1048 e morto nel 1131. Il suo nome intero era Ghiyath al-Din Abu'l-Fath Umar ibn Ibrahim Al-Nisaburi al-Khayyami; una traduzione letterale del suo nome sarebbe "fabbricante di tende", che si riferisce probabilmente al mestiere del padre. Omar al-Khayyam giocò sul significato del suo nome scrivendo:

Omar al-Khayyam

"Khayyam, che cucì le tende della scienza,
che cadde nel dolore della fornace e fu improvvisamente bruciato,
le forbici del Fato hanno tagliato le corde della tenda della mia vita,
e colui che spezza la speranza l'ha comprato per niente!"

Al-Khayyam, nell'introduzione del suo *Trattato sulla dimostrazione dei problemi di Algebra*, descrisse le difficoltà a cui andava incontro chi decideva di studiare:


Omar al-Khayyam

"Mi era difficile dedicarmi all'algebra con la concentrazione necessaria, a causa dei disordini del tempo, che mi crearono molti ostacoli. Siamo stati derubati delle conoscenze che erano state salvate affinché un gruppo, piccolo di numero, tra mille difficoltà, potesse tentare, nei rari momenti di pace, di dedicarsi alla ricerca e all'approfondimento delle scienze. La maggior parte delle persone, che imitano i filosofi, confondono il vero con il falso, e non fanno altro che ingannare e pretendere conoscenza, usando quel poco che conoscono delle scienze soltanto per propositi spregevoli e materiali. E quando vedono una persona che ricerca il bene e preferisce la verità, facendo del suo meglio per rifiutare il falso e l'errore e vivere al di fuori dell'ipocrisia e della disonestà, lo ritengono un folle e lo deridono".

Gli anni di al-Khayyam furono infatti anni di lotte civili e religiose che inevitabilmente, in lunghi periodi della sua vita, gli impedirono di dedicarsi con la serenità indispensabile ai suoi studi portandolo ad un pessimismo che ritroviamo anche nelle sue poesie.

Al-Khayyam è infatti ricordato anche per essere stato un poeta; è noto infatti per aver scritto le *Quartine* (in arabo *Rubaiyat),* nelle quali si riversava il suo spirito critico e ironico. Le *Quartine* sono dedicate al motivo del vino e all'esaltazione dello stesso, ma contengono anche altri temi, assai più profondi: meditazioni sulla morte e sui limiti della ragione umana "impotente" di fronte al mistero dell'esistenza, rimproveri a Dio, spesso irrazionale e incoerente, attacchi al bigottismo e all'ipocrisia dei religiosi, e così via.


Omar al-Khayyam

Circa 100 di queste quartine furono tradotte nel 1859 dall'inglese Edward Fitzgerald, altre furono tradotte dal francese Jean Baptiste Nicolas e altre ancora dall'italiano Alessandro Bausani; ciascuno di loro fece emergere dalla propria traduzione un tratto diverso del carattere di Omar al-Khayyam.

In realtà, secondo alcuni europei, non più di 30 quartine sono a lui attribuibili con certezza: essi affermano che il nome di al-Khayyam potrebbe essere una sorta di etichetta apposta a raccolte di versi di diversa provenienza; altri invece gli attribuiscono la paternità di più di 100 quartine.

Ad ogni modo al-Khayyam fu un notevole matematico e astronomo e, malgrado le numerose difficoltà, scrisse numerose opere tra cui *Problemi di aritmetica*, un libro sulla musica e uno sull'algebra prima dei 25 anni.

Nel 1070 si spostò a Samarcanda in Uzbekistan, una delle più antiche città dell'Asia centrale. Là al-Khayyam fu supportato da Abu Tahir, un promettente giurista di Samarcanda, che gli permise di scrivere la sua opera più famosa di algebra, il *Trattato sulla dimostrazione dei problemi di al-jabr e al-muqabala*[1] (in arabo *Ghiyath al-Din Abu'l-Fath Umar ibn Ibrahim Al-Nisaburi al-Khayyami*), in cui definiva l'algebra come la teoria delle equazioni, nettamente distinta dall'aritmetica.

Nel frattempo Toghril Beg, il fondatore della dinastia Seljuq, trasferì la capitale del suo dominio a Esfahan, città governata già dal 1073 da suo nonno Malik-Shah. Al-Khayyam fu invitato proprio da Malik-Shan a Esfahan per fondare un'Osservatorio insieme ad altri illustri astronomi; per 18 anni al-Khayyam fu a capo di questo gruppo di astronomi e portò a termine un lavoro di notevole qualità.

Quello fu un periodo di pace durante il quale la situazione politica gli diede la possibilità di dedicarsi interamente al suo lavoro scolastico.

Durante lo stesso periodo contribuì alla riforma del calendario avvenuta nel 1079; al-Khayyam affermò che la lunghezza dell'anno è di 365,24219858156 giorni, misura incredibilmente accurata, considerato che oggi si è arrivati a calcolarla come 365, 242190 giorni.

CURIOSITÀ

- Francesco Guccini cita Omar al-Khayyam in *Via Paolo Fabbri 43*;
- Fabrizio de André utilizzò una frase tratta da una quartina di Omar al-Khayyam in *La collina*;
- Gabriele d'Annunzio lo cita indirettamente nel *Notturno*;
- Chesterton analizza nel settimo capitolo del saggio *Eretici* la filosofia di Omar al-Khayyam;
- Una sua poesia è stata scelta come incipit per il videogioco *Prince of Persia;*
- Nel 1970 gli è stato dedicato il cratere Omar al-Khayyam sulla Luna;
- L'asteroide 3095 Omarkhayyam del 1980 è stato chiamato così in suo onore;
- Esiste una varietà di rosa intitolata ad Omar al-Khayyam, la quale è stata piantata sulla tomba di E. Fitzgerald da semi ricavati dalla tomba di al-Khayyam stesso.

Tale periodo di pace si concluse nel novembre del 1092 quando Malik-Shah morì e l'Osservatorio venne chiuso. Il terzo figlio di Malik-Shah, Sanjar, governatore di Khorasan, diventò governatore dell'impero Seljuq nel 1118 e spostò la capitale a Merv (oggi Mary, in Turkmenistan) dove creò un grande centro culturale; qualche volta al-Khayyam lasciò Esfahan per andare a Merv, e qui scrisse numerose opere sulla matematica.

A partire da un problema geometrico, giunse a porsi il problema della soluzione dell'equazione cubica $x^3 + 200x = 20x^2 + 2000$ di cui trova una soluzione numerica approssimata e stabilisce che può essere risolta soltanto mediante le coniche (si veda paragrafo 2.3), ma non è risolvibile facendo uso esclusivamente di riga e compasso. In questo modo anticipa un risultato di 750 anni dopo.

[1] I manoscritti di al-Khayyam furono tradotti in Occidente da Franz Woepcke (1826-1864) solo nel 1851 quando l'algebra in Europa aveva ormai raggiunto livelli decisamente superiori a quello peraltro notevole del matematico persiano.

Impostò inoltre, sebbene in maniera molto generale, la problematica della trasformazione dei problemi geometrici in problemi algebrici e della soluzione delle equazioni cubiche. Si rese conto che le equazioni cubiche possono avere soluzioni multiple, precedendo in questo modo i lavori degli algebristi rinascimentali italiani, quali Scipione del Ferro, Tartaglia, Cardano, Ferrari…

Busto di Omar al-Khayyam a Bucarest

Omar al-Khayyam si dedicò anche a tanti altri argomenti: affrontò le difficoltà poste dal V postulato di Euclide e dimostrò, inconsapevolmente, alcune proprietà delle geometrie non-euclidee, giungendo a quelle figure che sono oggi associate con le cosiddette "ipotesi dell'angolo ottuso, acuto e retto"; studiò i problemi dei rapporti giungendo a dimostrare l'equivalenza tra uguaglianza dei rapporti secondo Eudosso ed Euclide e quella dovuta ad al-Mahani, basata sulle frazioni continue; infine, si occupò di quello che oggi è conosciuto come Triangolo di Tartaglia e dei coefficienti binomiali. Tale schema avrebbe fatto la sua comparsa in Cina nella stessa epoca, ma presupponiamo che la scoperta sia stata fatta da Omar indipendentemente dai cinesi; le comunicazioni tra Arabia e Cina non erano molto intense a quei tempi, ma vi era una via della seta che collegava la Cina con la Persia e non è da escludere che attraverso tale via si siano potute trasmettere informazioni scientifiche.

Omar al-Khayyam

"Il mio venire non ha dato alcun frutto alla Ruota celeste
Né la sua bellezza e dignità si è accresciuta per la mia dipartita.
Da nessuno ancora le mie due orecchie hanno udito
Che scopo abbia la mia venuta e questa mia dipartita".

Omar Khayyam

2.2 Gli studi sulle equazioni di Omar al-Khayyam

Prima di Omar al-Khayyam, algebra e aritmetica erano entrambe concepite come scienze che permettevano la determinazione di incognite a partire da relazioni tra grandezze conosciute; non vi era cioè una netta distinzione tra aritmetica e algebra.
Le grandezze ricercate potevano essere numeri assoluti (numeri interi) oppure grandezze continue (linea, superficie, volume e tempo). Tenendo conto della differenza tra le incognite che rappresentavano dei valori interi e quelle che rappresentavano dei valori, ovvero delle grandezze continue, in algebra si aveva bisogno tanto di soluzioni numeriche quanto di soluzioni sotto forma di costruzioni geometriche.

Se le equazioni erano di secondo grado, contenenti "cose", lati e quadrati, la soluzione numerica poteva essere dedotta dalla soluzione geometrica (che si poteva trovare con l'aiuto degli *Elementi* di Euclide).
Invece, per le equazioni che contenevano anche dei cubi (che non si potevano ridurre a equazioni di secondo grado), una soluzione non poteva essere trovata se non con l'aiuto delle sezioni coniche (e ci si poteva appoggiare ai primi due libri delle *Coniche* di Apollonio di Perga); vi è quindi la prima indicazione dell'impossibilità di risolvere tali equazioni con l'uso esclusivamente di riga e compasso, la quale verrà ribadita da Cartesio (1596 - 1650) nel 1637 e dimostrata solo nel 1837 da Wentzel.

Il metodo di usare intersezioni di coniche per risolvere equazioni di terzo grado era già stato usato da Menecmo, Archimede e al-hazen, ma a Omar al-Khayyam si deve l'importante generalizzazione di tale metodo in modo da includere tutte le equazioni di terzo grado (aventi radici positive).
Omar al-Khayyam scriveva:

"Quando l'oggetto del problema è un numero assoluto, né noi, né alcuno di quelli che hanno trattato l'algebra (eccettuati i casi in cui vi sono solo i primi tre livelli, vale a dire il numero, la cosa e il quadrato) siamo stati abili a risolvere questa equazione; forse altri dopo di noi saranno capaci di riempire il vuoto".

Tale dimostrazione verrà data nel XVI secolo da Scipione del Ferro e Nicolò Tartaglia, i quali trovarono la soluzione delle equazioni di terzo grado sotto forma di radicali.

L'opera di Omar al-Khayyam sull'algebra comprende una classificazione delle equazioni in base al grado dell'equazione e al numero di termini che compaiono nei due membri dell'equazione: infatti, non disponendo del concetto di coefficienti negativi, era costretto a suddividere il problema in parecchi casi in modo tale che a, b e c fossero sempre positivi. Inoltre, doveva specificare le sue sezioni coniche per ciascun caso, perché il concetto di parametro generale non era ancora disponibile a quei tempi.

Trattato sulla dimostrazione dei problemi di al-jabr e al-muqabala

Infine, non tutte le radici di una data equazione di terzo grado venivano date, perché egli non giudicava appropriate le radici negative e non considerava tutte le intersezioni delle sezioni coniche.
Si ottengono in questo modo 25 forme canoniche di equazioni:

- 6 erano già state studiate da al-Khwarizmi:

"I quadrati sono uguali alle radici":	$ax^2 = bx$
"I quadrati sono uguali a un numero":	$ax^2 = c$
"Le radici sono uguali a un numero":	$ax = c$
"I quadrati e le radici sono uguali a un numero":	$ax^2 + bx = c$
"I quadrati e i numeri sono uguali alle radici":	$ax^2 + c = bx$
"Le radici e i numeri sono uguali ai quadrati":	$bx + c = ax^2$

- Altre 5 equazioni possono essere ricondotte a queste dividendo l'equazione per l'incognita o per il quadrato dell'incognita;

- Le soluzioni delle 14 rimanenti, invece, sono costruite mediante l'utilizzo delle sezioni coniche. Queste 14 si dividono in:

    - 1 forma a due termini

$$x^3 = a$$

    - 6 forme a tre termini

$$\left.\begin{array}{r} x^3 + bx = a \\ x^3 + a = bx \\ bx + a = x^3 \end{array}\right\} \text{ Prive di termini al quadrato}$$

$$\left.\begin{array}{r} x^3 + cx^2 = a \\ x^3 + a = cx^2 \\ x^3 = a + cx^2 \end{array}\right\} \text{ Contenenti termini al quadrato}$$

    - 7 forme a quattro termini

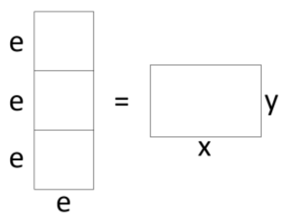
$$\text{Un trinomio è uguale ad un monomio } \begin{cases} x^3 + cx^2 + a = bx \\ x^3 = a + bx + cx^2 \\ x^3 + a + bx = cx^2 \\ x^3 + bx + cx^2 = a \end{cases}$$

$$\text{Due binomi sono uguali tra loro } \begin{cases} x^3 + cx^2 = bx + a \\ x^3 + a = cx^2 + bx \\ x^3 + bx = cx^2 + a \end{cases}$$

Questa classificazione riguarda solamente le equazioni le cui soluzioni sono positive e quindi, trasferendo il discorso ad un sistema di assi cartesiani, soltanto le intersezioni delle curve nel primo quadrante. Inoltre fra le curve, privilegiò i cerchi, le iperboli equilatere, per le quali asintoti ed assi di simmetria siano paralleli agli assi coordinati, e le parabole, il cui asse di simmetria sia anche uno degli assi coordinati.
Omar al-Khayyam si attenne strettamente al principio dell'omogeneità delle dimensioni, ovvero cerca di rendere tutti i termini dell'equazione dello stesso grado:

"Ogni volta che diremo in questo libro 'un numero è uguale ad un rettangolo', intenderemo considerare un rettangolo di cui un lato è l'unità, mentre l'altro è uguale alla misura del dato numero, in modo tale che ognuna delle parti in cui è misurato sia uguale al lato che abbiamo preso come unità"

Ad esempio, se abbiamo l'equazione $3 = xy$, avremo (dove con e è indicata l'unità di misura):



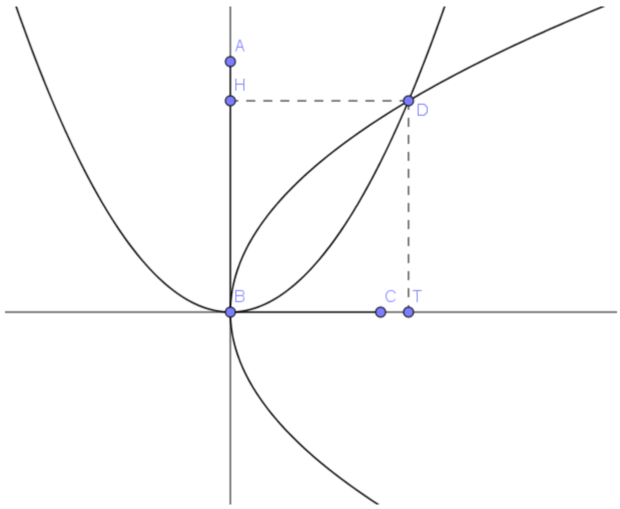
Per equazioni di grado superiore al terzo, Omar al-Khayyam evidentemente non prevedeva la possibilità di utilizzare metodi geometrici simili, perché lo spazio non contiene più di tre dimensioni:

“Quello che viene chiamato dagli algebristi quadrato-quadrato *è, in termini di grandezza continua, un fatto puramente teorico. Esso non esiste nella realtà in alcun modo.”*

Cerchiamo ora di analizzare meglio l’approccio di Omar al-Khayyam alle equazioni di terzo grado, analizzando alcuni casi di equazioni cubiche binomie, trinomie e quadrinomie.

2.2.1 Equazioni binomie

Il primo tipo di equazioni che richiede sezioni coniche sono quelle del tipo *“numero uguale a cubo”*, ovvero equazioni del tipo $\boldsymbol{x^3 = N}$, con N numero dato.
Omar al-Khayyam dapprima risolse un problema ausiliario, quello di cercare due segmenti tra due segmenti dati che creino una proporzione continua; se i due segmenti dati sono $AB = a$ e $BC = b$, il problema è quello di determinare x e y tali che $a: x = x: y = y: b$.
Al-Khayyam disegnò due segmenti perpendicolari AB e BC e costruì due parabole, entrambe aventi vertice in B: la prima ha asse BC e “parametro” BC, mentre la seconda ha asse AB e “parametro” AB; nelle notazioni moderne, le equazioni delle due coniche sono $y^2 = bx$ e $x^2 = ay$.



Sia D il loro punto di intersezione; allora le perpendicolari $x = DH$ e $y = DT$ soddisfano le equazioni delle parabole e quindi anche la proporzione continua iniziale.
Poi Omar passò a considerare l’equazione $x^3 = N$. Costruì un blocco rettangolare di base e^2 e altezza $N \cdot e$. A questo punto, costruì un cubo equivalente a tale blocco; nel caso $N = 2$, si ottiene il noto problema della duplicazione del cubo.
Omar al-Khayyam procedette in questo modo: risolse il problema ausiliario della proporzione continua con $a = e$ e $b = N \cdot e$ e provò che il primo medio x è il lato del cubo cercato.

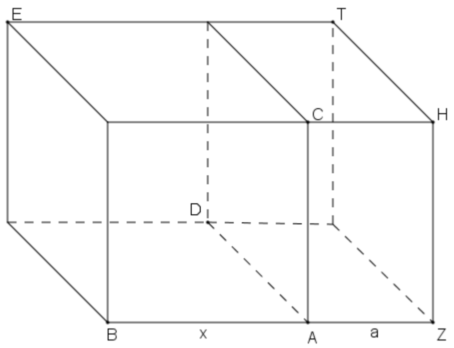
2.2.2 Equazioni trinomie

Passiamo ora ad alcuni esempi relativi a equazioni cubiche composte da tre termini.

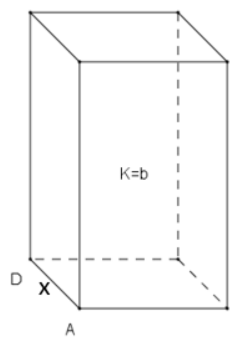
- **Esempio di un'equazione riconducibile ad una di quelle già analizzate da al-Khwarizmi:**

$$\boldsymbol{x^3 + ax^2 = bx}$$

Ci aspetteremmo la riduzione immediata dell'equazione al tipo più semplice e già considerato da al-Khwarismi: $x^2 + ax = b$; Omar al-Khayyam invece fornì prima una dimostrazione geometrica della semplificazione che si sarebbe andati a compiere. Dopo aver detto che seguirà un procedimento analogo a quello seguito per le equazioni di secondo grado, Omar al-Khayyam costruì il cubo $ABCDE$



Prolungò poi BA dalla parte di A di un segmento $AZ = a$; in questo modo l'intero parallelepipedo misura $x^3 + ax^2$ ed è uguale quindi a bx.
Omar al-Khayyam considerò ora un rettangolo K di misura b, per cui il parallelepipedo che ha K come faccia e $AD = x$ come ulteriore dimensione, risulta, dall'equazione stabilita, equivalente al parallelepipedo BT.



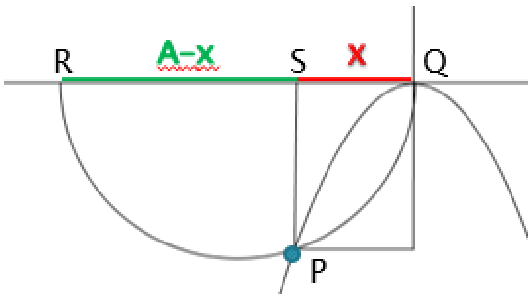
Ma anche questo parallelepipedo ha una dimensione uguale ad AD e da ciò segue che le relative basi HB e K devono essere uguali, *"ma la base HB"* scrisse Omar al-Khayyam *"è uguale al quadrato CB più il rettangolo HA che è uguale al numero delle radici, prima dato per il quadrato* [ax e prima era ax^2]. *Allora K,*

che è il numero dato delle radici è uguale al quadrato più il numero delle radici date per il quadrato".
Si ha quindi $b = x^2 + ax$ e Omar al-Khayyam concluse: *"questo era quanto si è cercato di provare"* cosicché nell'esempio numerico che pone subito dopo, opera la semplificazione che noi avremmo fatto subito.

Procedimenti geometrici analoghi furono seguiti da Omar al-Khayyam anche per le equazioni del tipo: $x^3 + ax = bx^2$ e $x^3 = x^2 + ax$.
Si noti che la geometria porta alla generalizzazione dei problemi e delle equazioni corrispondenti: siamo vicini, cioè, all'algebra letterale.

- **Equazioni non riconducibili ad equazioni già studiate da al-Khwarizmi;** si analizzeranno i 6 casi di equazioni cubiche trinomie, affrontate da al-Khayyam nel capitolo IV della sua Algebra.

<u>*Equazione del tipo $x^3 + bx = a$*</u>
Nella terminologia di Omar al-Khayyam, può essere scritta come *"un cubo e (un numero di) lati sono uguali ad un numero".*
Al-Khayyam scrisse l'equazione nella forma omogenea (cioè ogni termine ha tre dimensioni) $x^3 + B^2x = B^2A$, dove $B^2 = b$ e $B^2A = a$. Costruì poi la parabola $x^2 = By$.
Tracciò poi il semicerchio avente come diametro QR di lunghezza uguale a A. Allora, l'intersezione P della parabola e del semicerchio determina la perpendicolare PS e QS è la soluzione dell'equazione.



Il grafico a fianco è da leggersi con l'asse delle ascisse è orientato verso sinistra e quello delle ordinate verso il basso.

Dalla proprietà geometrica della parabola data da Apollonio (*prop. I, 11*), si ha $x^2 = B \cdot PS$ o anche la relazione $\frac{B}{x} = \frac{x}{PS}$.
Consideriamo ora il triangolo rettangolo QPR. La sua altezza PS è media proporzionale fra QS e SR e perciò $\frac{x}{PS} = \frac{PS}{A-x}$.
Dalle due relazioni precedenti si ottiene dunque che $\frac{B}{x} = \frac{PS}{A-x}$.
D'altra parte si ha inoltre che $PS = \frac{x^2}{B}$. Sostituendo questo valore in $\frac{B}{x} = \frac{PS}{A-x}$ si ottiene l'equazione cubica di cui si cercava la soluzione.

Equazione del tipo $x^3 + a = bx$
Allo stesso modo, al-Khayyam scrisse l'equazione $x^3 + a = bx$ nella forma

$$x^3 + c^2h = c^2x$$

e la risolse intersecando la parabola $yc = x^2$ con il ramo destro dell'iperbole $y^2 = x(x-h)$.
Al-Khayyam fece notare che in questo caso possono esserci diverse soluzioni, come potrebbe non essercene alcuna. In realtà le curve possono non avere qui alcun punto di intersezione poiché il matematico arabo non prese in considerazione il ramo di sinistra dell'iperbole che passa per la sommità della parabola e la taglia ancora in un altro punto. La radice in quest'ultimo caso è negativa: il problema è quindi per lui insolubile poiché l'equazione ha una radice negativa e due radici complesse.
Le due curve possono inoltre essere tangenti o tagliarsi in due punti. Nel primo caso, l'equazione ha una soluzione, nel secondo ne ha due.
Al-Khayyam dichiarò così esplicitamente che un'equazione di terzo grado *può* avere due radici.

Equazione del tipo $bx + a = x^3$
La terza equazione è risolta allo stesso modo della precedente, l'unica differenza è il segno del termine costante a.

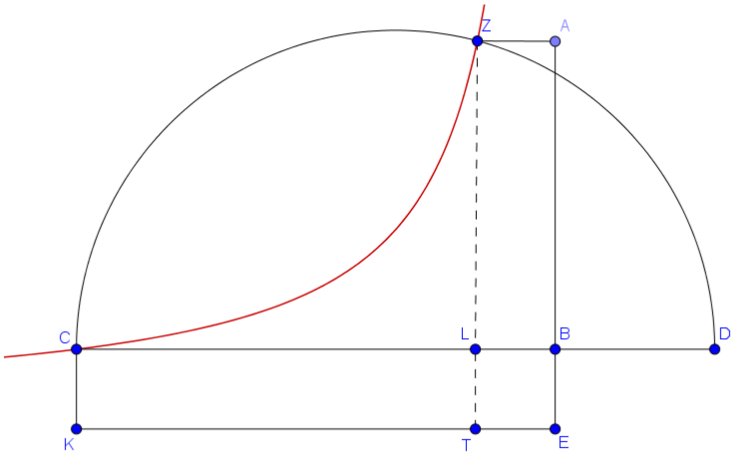
Equazione del tipo $x^3 + cx^2 = a$
Nel caso sopra citato, si pone $a = p^3$, per cui $x^2\,(x + c) = p^3$ e le coniche scelte sono l'iperbole $xy = p^2$ e la parabola $y^2 = p(x + c)$. Questa soluzione è inutilmente complicata perché richiede una soluzione preliminare dell'equazione $p^3 = a$ tramite le due parabole.
Sarebbe molto più semplice porre $a = hd^2$ e intersecare la parabola $x^2 = hy$ con l'iperbole $(x + c)y = d^2$.

Equazione del tipo $x^3 + a = cx^2$
Questa tipologia è risolta con un metodo simile al precedente. Ancora una volta, il termine costante a è uguale al cubo p^3.
Si considerano poi la parabola $y^2 = p(c - x)$ e l'iperbole $xy = p^2$.
Secondo Omar al-Khayyam, tale equazione può possedere una o due radici positive (se il ramo superiore della parabola e quello dell'iperbole si toccano o si tagliano) oppure nessuna soluzione (nel caso in cui le curve non si incontrino).
Rimandiamo alla lettura dell'Appendice per un'ulteriore analisi dell'argomento.

Equazione del tipo $x^3 = a + cx^2$
Tale equazione è risolta allo stesso modo della precedente, l'unica differenza è il segno del termine costante a.

2.2.3 Equazioni quadrinomie

Omar al-Khayyam, dopo aver studiato le equazioni trinomie, si dedicò allo studio delle equazioni quadrinomie.
I metodi di risoluzione sono gli stessi usati per risolvere le equazioni trinomie; per risolvere la prima utilizza circonferenza e iperbole, per la seconda usa due iperboli e così via…
Consideriamo, ad esempio, la prima cioè $x^3 + ax^2 + bx = c$ e vediamone la risoluzione geometrica proposta da Omar al-Khayyam.
Sia BE il lato di un quadrato la cui area sia uguale al numero b dei "lati" (ovvero $BE^2 = b$) e si costruisca un solido avente per base il quadrato di BE ed altezza BC, perpendicolare a BE, tale che risulti uguale al "numero" c dato. BD, sul prolungamento di BC dalla parte di B, sia uguale al numero dei "quadrati".



$$BE^2 = b$$

$$BE^2 \cdot BC = c$$

$$BD = a$$

Disposti i segmenti BE, BC, BD come in figura, si costruiscano il semicerchio DZC di diametro CD, il rettangolo BK, l'iperbole con asintoti le rette ABE ed EK e passante per C e il segmento $AB = LZ$.
L'iperbole, oltre C, deve incontrare il semicerchio in un altro punto, Z.
Per la proprietà dell'iperbole equilatera si ha l'uguaglianza dei rettangoli ZE e BK; togliendo da essi la parte comune data dal rettangolo EL, si ottiene $ZB = LK$.
Si ha dunque

$$ZL : LC = EB : BL$$

e di conseguenza

$$ZL^2 : LC^2 = EB^2 : BL^2.$$

Ma poiché Z è punto della circonferenza, si ha $ZL^2 : LC^2 = DL : LC$; allora:

$$EB^2 : BL^2 = DL : LC.$$

Quindi si ha l'uguaglianza dei solidi

$$EB^2 \cdot LC = BL^2 \cdot DL.$$

Tenendo presente che $LC = BC - BL$ e che $DL = BL + BD$, le operazioni tra solidi operate da Omar al-Khayyam si possono sintetizzare scrivendo:

$$EB^2 \cdot BC - BL \cdot EB^2 = BL^3 + BL^2 \cdot BD.$$

Basta ora sostituire ad $EB^2 \cdot BC$ il suo valore c, ad EB^2 il suo valore b ed a BD il suo valore a; dopodiché si somma ad entrambi i membri il solido $BL \cdot EB^2 = b \cdot BL$ e si ottiene

$$c = BL^3 + a \cdot BL^2 + b \cdot BL$$

ovvero si ottiene che il segmento BL verifica l'equazione data.

Omar al-Khayyam comunque non diede un esempio numerico per ogni caso o per ogni forma di equazione; tra le lacune del suo trattato, troviamo l'analisi incompleta dell'equazione $x^3 + bx = ax^2 + c$ la cui soluzione è costruita con l'aiuto del cerchio $y^2 = (x - \frac{c}{b})(a - x)$ e dell'iperbole $x(\sqrt{b} - y) = \frac{c}{\sqrt{b}}$.
Omar al-Khayyam sottolineò, a ragione, che questa equazione possiede sempre una soluzione: l'ascissa del punto K e, per $\frac{c}{b} \geq a$ questa radice è semplice.

Tuttavia, non sottolineò che per $\frac{a}{b} < c$ possono esistere altre due radici positive; questo perché ha mancato la scoperta dell'esistenza di tre radici di un'equazione di terzo grado (scoperta che farà Girolamo Cardano nel XVI secolo). D'altra parte non è facile scoprire la possibilità dell'esistenza di altri due punti di intersezione tra A e K sulla figura di al-Khayyam.

2.3 Esempi di equazioni con potenze negative

Omar al-Khayyam considerò le equazioni che contengono delle incognite portate a una potenza negativa e che possono essere ricondotte ai tipi di equazioni precedenti mediante opportune sostituzioni: lui stesso scrive *"attraverso proposizioni ausiliarie"*.

Ad esempio, l'equazione

$$x^2 = a \cdot \frac{1}{x^3}$$

si riconduce alla determinazione di quattro medi proporzionali tra 1 e a, costruzione che era già stata data da al-Haytham, ma non trascritta da al-Khayyam nel suo trattato perché ritenuta troppo complicata.

Per risolvere invece l'equazione

$$\frac{1}{x^3} + 3\,\frac{1}{x^2} + 5\,\frac{1}{x} = 3 + \frac{3}{8}$$

Al-Khayyam suggerì la semplice sostituzione $\frac{1}{x} = z$, riconducendosi così ad un'equazione di terzo grado nota.

Un altro esempio che portò Omar al-Khayyam è quello di

$$x^3 = \frac{10}{x^3}$$

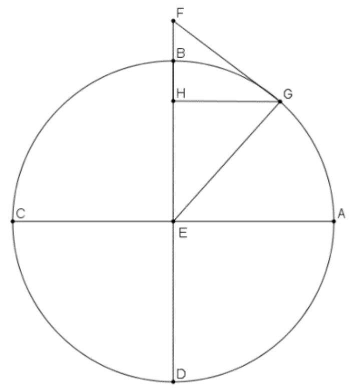
Moltiplicando entrambi i membri per x^3, si trova $(x^3)^2 = 10$ da cui $x^3 = \sqrt{10}$ o, con le parole di Omar (tradotte da Woepcke), *"quindi la radice di 10 sarà il cubo cercato"*.

Per quanto riguarda l'equazione di quarto grado

$$x^2 + 2x = 2 \cdot \frac{1}{x^2}$$

Al-Khayyam evidenziò il fatto che non si conosca alcun procedimento per risolverla.

2.4 Trattato della divisione di un quarto di cerchio
(*Risala fi taqsim rub ad-da ira*)



Una piccola opera algebrica di al-Khayyam, redatta prima del suo grande trattato, è stata rinvenuta a Teheran. Il manoscritto s'intitola "Trattato della divisione di un quarto di cerchio" (*Risala fi taqsim rub ad-da ira*) e studia la soluzione del problema seguente: dividere il quarto di cerchio AB dal cerchio $ABCD$ nel punto G in modo che: $\frac{AE}{GH} = \frac{EH}{HB}$. GH è la perpendicolare abbassata dal punto G sul diametro BD. Traccia infine la tangente GF che taglia la retta BD in F.

Al-Khayyam espresse tale problema con l'equazione $\frac{1}{\sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{1-\cos \alpha}$ (dove α rappresenta l'angolo GEH): infatti $\frac{AE}{\mathrm{AE} \cdot \sin \alpha} = \frac{10}{AE-10}$ da cui $\frac{1}{\sin \alpha} = \frac{1}{\frac{AE}{10}-1} = \frac{1}{\frac{1}{\cos \alpha}-1} = \frac{\cos \alpha}{1-\cos \alpha}$.

Partendo da questa equazione, considera $sin\alpha = 50/60$, ovvero $0{,}8333\ldots$ e $\alpha = 57°$ (valori più esatti sono $sin\alpha = 0{,}8393$ e $\alpha = 57°$ 4' 34").

Al-Khayyam ottenne questi valori, secondo termini usati da lui stesso, con l'aiuto di mezzi ausiliari utilizzati per stabilire le tavole dei seni, ovvero evidentemente attraverso tentativi e interpolazioni.

In alternativa, volendo ricondurre il problema ad un'equazione cubica, si può procedere come segue.

Dalla proporzione $\frac{1}{\sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{1-\cos \alpha}$ si ottiene l'equazione

$$1 - \cos \alpha = \cos \alpha \sin \alpha.$$

$$1 = \cos \alpha (\sin \alpha + 1)$$

$$\frac{r}{\cos \alpha} = r \sin \alpha + r$$

Osservando che $\frac{r}{\cos \alpha} = EF$, $r \sin \alpha = GH$ e $r = EG$, Al-Khayyam ricondusse il problema a quello della costruzione di un triangolo in cui vale la relazione

$$EF = GH + EG$$

Ponendo la proiezione del lato EG sull'ipotenusa uguale a 10 e $x = GH$, al-Khayyam si occupò di trovare la soluzione dell'equazione di terzo grado:

$$x^3 + 200\,x = 20\,x^2 + 2000$$

Nella costruzione che egli utilizzò per risolverlo, la radice x è l'ascissa del punto di intersezione del cerchio e dell'iperbole

$$y^2 = (x - 10)(20 - x) \qquad \text{e} \qquad xy = \sqrt{2}\,10\,(x - 10).$$

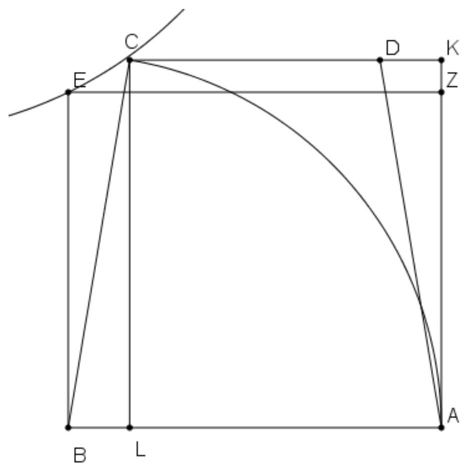
Approcciò inoltre la classificazione delle equazioni di terzo grado, che conosciamo già, fece il punto dei risultati ottenuti da certi suoi predecessori a partire da al-Mahani ed espresse la speranza di riuscire a esporre nel dettaglio la teoria delle 14 forme di equazioni di cui si può trovare la soluzione solo con l'aiuto delle sezioni coniche.

2.5 Studio delle equazioni dopo Omar al-Khayyam

I matematici dei paesi islamici si sono interessati alla teoria geometrica delle equazioni di grado superiore anche dopo al-Khayyam. In un manoscritto anonimo troviamo la costruzione della soluzione di un problema che conduce a un'equazione di quarto grado. Secondo l'autore del manoscritto, i geometri e gli algebristi si erano già trovati di fronte a questo problema, ma non erano riusciti a risolverlo.

Si tratta, come è noto, della costruzione di un trapezio $ABCD$ in cui $AB = AD = BC = 10$ e la cui area è uguale a 90. Se supponiamo che il problema abbia soluzione, che si abbassi la perpendicolare AK sul prolungamento di CD e si scelga quindi come incognita $DK = z$, otteniamo allora:

$$z^4 + 2000\,z = 20\,z^2 + 1900.$$



Tracciamo la retta $BE = \frac{9}{10} AB$ perpendicolarmente ad AB e facciamo passare per E l'iperbole $(10 - x)y = 90$ (l'asse delle ascisse si confonde con BA, quello delle ordinate con BE). Intorno a B, preso come centro, costruiamo il cerchio $x^2 + y^2 = 10^2$. L'ascissa del punto di intersezione C delle due curve è la radice dell'equazione; il resto della costruzione è evidente.

Nella *Chiave dell'aritmetica* di al-Kasi (1380 ca – 1429 ca), l'autore affermò che Saraf-ad-Din al-Mas udi, matematico che visse nel XII-XIII secolo e maestro di Nasi ad-Din at-Tusi, aveva scritto un'opera sulle 19 forme di equazioni che esistono, oltre alle 6 generalmente conosciute (ovvero sulle forme che erano state studiate da al-Khayyam).

È possibile quindi che al-Mas udi, in quanto suo allievo, abbia conosciuto le opere di al-Khayyam. Al-Kasi stesso si è interessato alle equazioni del quarto grado e afferma di aver dato le soluzioni di 70 equazioni di forme diverse (in realtà, ce ne sono solo 65), che né i suoi predecessori, né i suoi contemporanei avevano studiato.
Inoltre, al-Kasi aveva annunciato l'intenzione di dedicare un'opera specifica a questo problema, ma non sappiamo se abbia realizzato questo progetto.

La teoria geometrica delle equazioni non si è diffusa nei paesi magrebini; perlomeno si può dire che gli arabi occidentali non vi si siano interessati, pur avendo una certa conoscenza della questione.
Nel XIV secolo, ibn Haldun scriveva:

"Siamo stati informati che numerosi grandi saggi d'Oriente hanno aumentato il numero delle equazioni al di là di queste sei forme e hanno superato il numero di 20; vi hanno trovato delle soluzioni certe con l'aiuto di dimostrazioni geometriche. Allah eleva coloro ai quali accorda la sua grazia…"

Nel XVII secolo, la costruzione geometrica delle radici delle equazioni di grado superiore susciterà grande interesse presso i matematici europei. Cartesio prese come base della sua matematica universale la costruzione delle radici reali di equazioni algebriche qualunque, con l'aiuto di curve algebriche scelte in maniera appropriata. Indicò in particolare una costruzione unica per risolvere delle equazioni di terzo e quarto grado con

l'aiuto di una parabola e di un cerchio. Presso di lui, lo sviluppo della geometria analitica è strettamente legato all'utilizzo delle costruzioni geometriche in algebra, per esempio l'elaborazione di una classificazione delle curve algebriche. Quasi tutti i grandi matematici del XVII e anche del XVIII secolo si sono interessati alla costruzione delle soluzioni geometriche delle equazioni, ivi compreso Isaac Newton, che dedicò a questo problema un capitolo intero della sua *Aritmetica universale*. D'altra parte, la costruzione geometrica delle radici che serviva ancora a Cartesio come metodo generale di risoluzione dei problemi algebrici, presso Newton è solo un metodo che serve a calcolare i valori approssimanti delle prime 2 o 3 cifre della radice di un'equazione a coefficienti numerici qualunque.
È nel XVII secolo e in quelli successivi che il problema dei limiti delle radici sollevato da Archimede, e più tardi dagli algebristi arabi, trovò soluzione.

Appendice

Metodo di Omar al-Khayyam per l'esistenza delle radici delle equazioni di terzo grado della forma $x^3 + a = cx^2$ con $a, c > 0$

Mostriamo che non esiste alcuna soluzione positiva per $c \leq \sqrt[3]{a}$.

1) Se $x = \sqrt[3]{a}$, allora $cx^2 = c\sqrt[3]{a^2} \leq a \Leftrightarrow c\sqrt[3]{a^2}\,\sqrt[3]{a} \leq a\sqrt[3]{a} \Leftrightarrow c \cdot a \leq a\sqrt[3]{a}$ $\Leftrightarrow\ c \leq \sqrt[3]{a}$

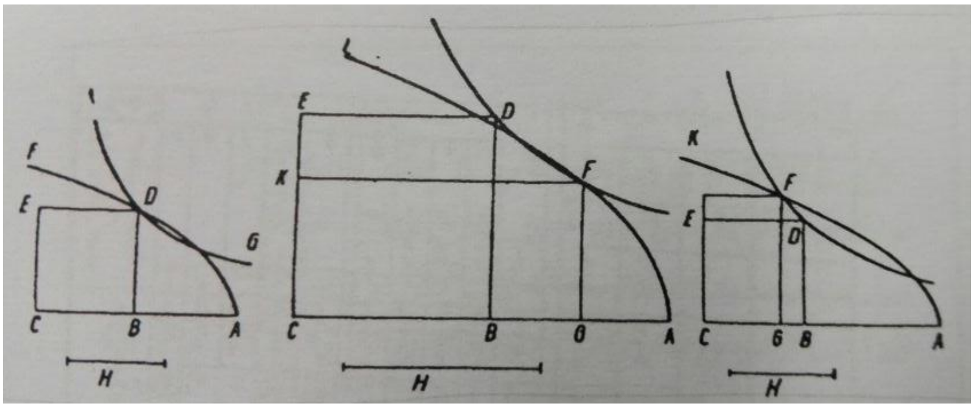
   Dunque, se $x = \sqrt[3]{a}$ e se $c \leq \sqrt[3]{a}$, ne segue che $cx^2 \leq a$ e dunque l'equazione è impossibile in quanto

   $$x^3 + a = cx^2$$

   dove il termine a sinistra risulta essere $> a$, mentre il termine a destra risulta essere $\leq a$.
2) Se $x < \sqrt[3]{a}$ e se $c \leq \sqrt[3]{a}$, allora $cx^2 < c\sqrt[3]{a^2} \leq a$ ovvero $cx^2 < a$.
   L'equazione risulta quindi impossibile come nel caso precedente.
3) Se $x > \sqrt[3]{a}$ e se $c \leq \sqrt[3]{a}$, allora $x^3 > a \geq cx^3 > cx^2$ in quanto $c > x$.
   Anche in questo caso l'equazione risulta impossibile.

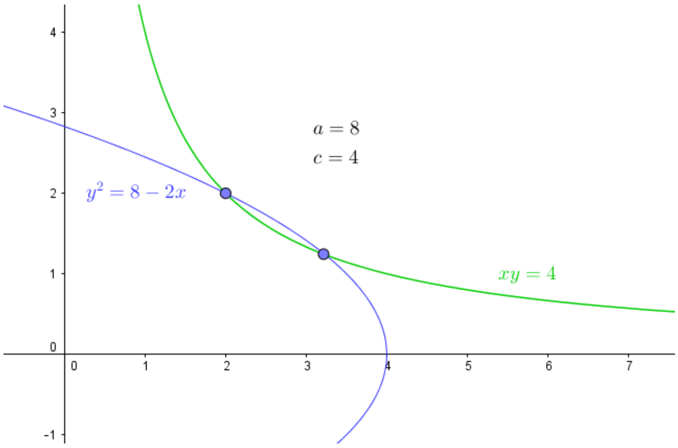
Studiamo quindi i casi in cui $c > \sqrt[3]{a}$ e inoltre $\sqrt[3]{a} \gtreqless \frac{c}{2}$.

Per valutare il numero di soluzione dell'equazione, al-Khayyam confronta tra loro le ordinate della parabola $y^2 = \sqrt[3]{a}(c - x)$ e quelle dell'iperbole $xy = \sqrt[3]{a^2}$ per l'ascissa $x = c - \sqrt[3]{a}$.



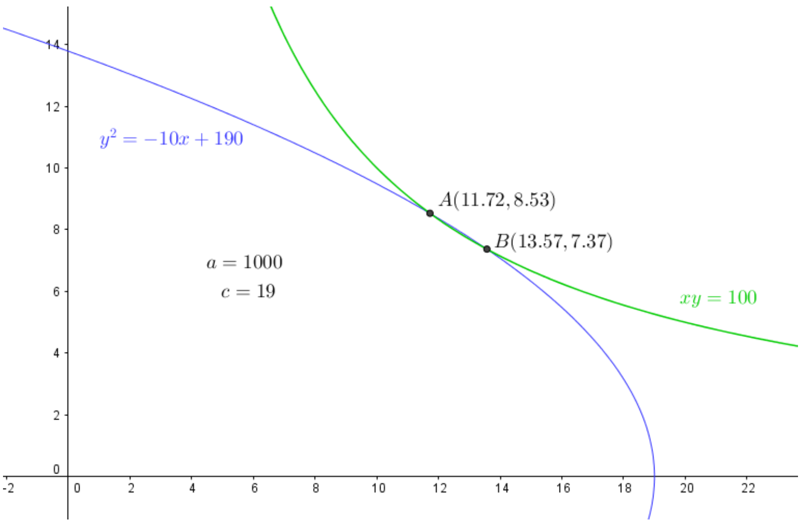
1) Se $\sqrt[3]{a} = \frac{c}{2}$, le ordinate delle due curve sono uguali a $\sqrt[3]{a}$ ed esiste ancora, come è facilmente visibile nella prima figura a sinistra, un altro punto di intersezione, pertanto esistono due soluzioni.

Forniamo un esempio numerico di questo caso.

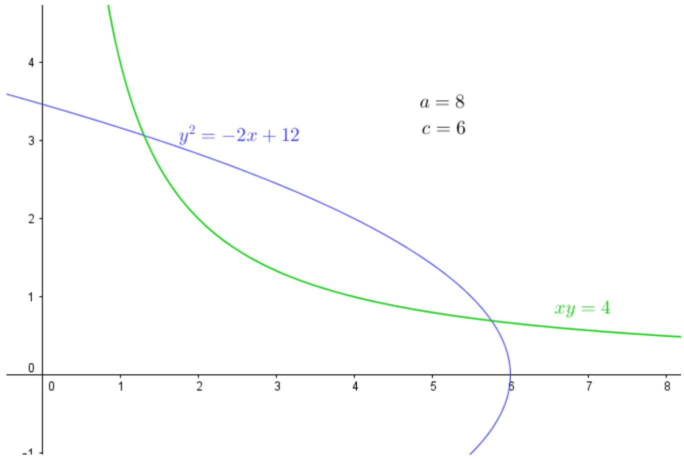


2) Se $\sqrt[3]{a} > \frac{c}{2}$, allora $x = c - \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{a}$ e l'ordinata dell'iperbole, che è uguale a $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{c} - \sqrt[3]{a}$, è più grande dell'ordinata della parabola, che è uguale a $\sqrt[3]{a}$, come si può vedere nella figura centrale. A destra di BD, le curve possono quindi essere sia tangenti l'una con l'altra, sia secanti, sia non incontrarsi; di conseguenza, o il problema ha rispettivamente una o due soluzioni (inferiori a $c - \sqrt[3]{a}$) o non ha soluzioni.

Riportiamo in seguito un esempio numerico, in cui sono presenti due soluzioni entrambe inferiori a $c - \sqrt[3]{a} = 19 - 10 = 9$.



3) Infine, se $\sqrt[3]{a} < \frac{c}{2}$, allora il punto D dell'iperbole si trova all'interno della parabola, come si può vedere nella figura più a destra, ovvero l'ordinata dell'iperbole è più piccola di quella della parabola; nel qual caso, poiché le curve si tagliano in due punti, esistono quindi due soluzioni.
Forniamo, infine, anche in questo caso un esempio numerico.



L'analisi molto dettagliata di al-Khayyam non ricopre però tutto il problema. Già Archimede, e più tardi al-Kuhi, avevano constatato che il limite delle radici positive è determinato dalla condizione $a \leq c^3 \frac{4}{27}$, mentre al-Khayyam ha semplicemente dimostrato che per $a \leq \frac{c^3}{8} = \frac{3^3 c^3}{8} \cdot \frac{1}{27}$ possono esserci due radici e che per $a > \frac{3^3 c^3}{8} \cdot \frac{1}{27}$ possono esserci sia una, sia due, sia nessuna radice, mentre per $a \geq c^3$, non c'è alcuna soluzione.

A seguito dei suoi studi a riguardo, al-Khayyam sottolineò un errore nei conti di Abu-l-Gud. Secondo quest'ultimo, le curve sono tangenti quando $\sqrt[3]{a} = \frac{c}{2}$ e non si incontrano quando $\sqrt[3]{a} > \frac{c}{2}$.

Al-Khayyam rifiutò questa asserzione servendosi dell'esempio seguente:

$$x^3 + 144 = 10x^2$$

In questo caso $\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{144} > 5 = \frac{c}{2}$. E le curve

$$y^2 = \sqrt[3]{144}(10 - x) \qquad \text{e} \qquad xy = \sqrt[3]{144^2}$$

si incontrano per $x = 6$ (al-Khayyam non dà la radice $2 + 2\sqrt{7}$).

Sottolineiamo brevemente che al-Khayyam stesso commise un errore di calcolo nell'esempio che segue. Desiderando citare un caso in cui le curve non si tagliano allorquando $\sqrt[3]{a}$ è maggiore di $\frac{c}{2}$, considera l'equazione:

$$x^3 + 41^3 = 80\,x^2$$

Per i valori delle ascisse

$$x_1 = \sqrt[3]{a} = 41 \quad \text{e} \quad x_2 = \sqrt[3]{a} + \frac{3}{4}\,(c - \sqrt[3]{3}) = 41 + \frac{3}{4} \cdot 39$$

le ordinate della parabola sono minori delle ordinate corrispondenti dell'iperbole e al-Khayyam ne concluse che le curve non si tagliano.

In realtà esistono due punti di intersezione tra queste due ascisse; risulta per esempio dal fatto che, per il valore intermedio $x_3 = \frac{11}{10} \cdot 41$, l'ordinata dell'iperbole è più piccola di quella della parabola.

Omar al-Khayyam avrebbe dovuto scegliere un termine costante un po' più grande, per esempio 43^3.

Bibliografia

[1] B.L. van der Waerden*, A history of Algebra – from al-Khwarismi to Emmy Noether*, Springer, Germany, 1985.

[2] H. Eves, *An introduction to the history of mathematics*, Holt Rinehart and Winston, USA, 1976.

[3] Y. Dold-Samplonius, J.W. Dauben, M. Folkerts, B. van Dalen, *From China to Paris: 2000 years transmission of mathematical ideas,* Franz Steiner Verlag, Stuttgart, 2002.

[4] D.E. Smith, *History of mathematics,* Ginn and Company, USA, 1923.

[5] D.J. Struik, *Matematica: un profilo storico,* Universale Paperbacks il Mulino, Bologna, 1981.

[6] S. Maracchia, *Storia dell'Algebra,* Liguori Editore, Napoli, 2008.

[7] C.B. Boyer, *Storia della matematica,* Istituto Editoriale Internazionale, Milano, 1976.

[8] G. Loria, *Storia delle matematiche – dall'alba della civiltà al secolo XIX,* Editore Ulrico Hoepli, Milano, 1950.

[9] M. Kline, *Storia del pensiero matematico, volume 1: dall'antichità al Settecento,* Einaudi, 1999.

[10] A.P. Youschkevitch, *Les mathématiques arabes (VIIIè – Xvè siécles)*, Vrin Paris, Parigi, 1976.

Sitografia

[1] http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/

[2] http://pages.di.unipi.it/romani/DIDATTICA/CMS/equaD.pdf

[3] https://web.math.unifi.it/archimede/islam/islam.html

[4] http://www-dimat.unipv.it/~rosso/terzogrado.pdf

[5] https://areeweb.polito.it/didattica/polymath/htmlS/info/Antologia/Khayam.htm

[6] http://jwilson.coe.uga.edu/emt669/Student.Folders/Jones.June/omar/omarpaper.html

[7] https://it.wikipedia.org/wiki/Pagina_principale