Traduzione del capitolo XII del testo di Youschkevitch
Numeri irrazionali e teoria delle proporzioni

Per quanto concerne la tecnica e l'esattezza dei calcoli, al-Kashi ha sorpassato di molto i suoi predecessori; egli tuttavia non ha fatto altro che seguire un'evoluzione cominciata qualche secolo prima.

Lo sviluppo dei calcoli trigonometrici e planimetrici, in particolare la stesura delle tavole astronomiche sempre più esatte, obbligarono i matematici dell'Islam a sviluppare calcoli coi numeri irrazionali.

Le applicazioni geometriche dell'algebra ed il loro rapido sviluppo dovettero forzatamente condurre questi matematici a prendere sempre più in considerazione lo studio delle quantità irrazionali, innanzitutto le radici quadrate dei numeri interi e frazionari non quadrati.

Se le quantità irrazionali non appaiono che raramente nelle opere di al-Khuwarizmi e non sono trattate se non in modo molto elementare, Abu Kamil le utilizza già correntemente ed effettua con una notevole facilità delle operazioni sulle quantità irrazionali di secondo grado estremamente complesse. Non è lo stesso da parte di al-Karagi.

Questi progressi hanno condotto ad un'aritmetizzazione della teoria delle quantità irrazionali di secondo grado, tale quale la conoscevano i greci, soprattutto quella sviluppata nel libro X degli "Elementi" di Euclide, i cui teoremi servivano a trasformare o a semplificare i radicali nell'espressione delle radici delle equazioni di secondo grado o riconducibili a quelle.

Gli "Elementi" sono stati l'opera teorica che ha giocato il ruolo più importante nella cultura matematica del paesi islamici, servendo da punto di partenza per ricerche più approfondite. Dalla fine del VIII secolo all'inizio del XV secolo si possono citare circa 50 matematici che hanno tradotto, rimaneggiato e commentato quest'opera.

Il filosofo più importante di quest'epoca, Abu Nasr Muhammad al-Farabi (Farabi, circa 870 - Damasco circa 950), ha giocato un ruolo fondamentale nel risveglio dell'interesse dei matematici islamici per gli "Elementi". Nato in un villaggio situato vicino alla città di Farabi, nel punto in cui il fiume Arys si getta nel Syr Daria, fu educato dalla nobiltà guerriera turca dell'Asia Centrale. Lavorò a Baghdad a ad Aleppo. Le concezioni di al-Farabi costituiscono una sintesi del pensiero islamico e del platonismo e in particolare dell'aristotelismo che egli aveva propagato con successo in Oriente. L'interesse di questo filosofo per gli "Elementi" si esplica attraverso l'importanza riservata all'analisi dei concetti fondamentali della geometria e dell'aritmetica, concetti che occupavano un posto importante nell'opera di Aristotele. I "Commentari delle difficoltà incontrate nelle introduzioni ai libri I e V di Euclide", redatti da al-Farabi, sono stati trasmessi da una traduzione in ebraico antico.

Riguardo alle definizioni di punto, di linea, e di superficie, al-Farabi scrive: “si deve iniziare lo studio con un corpo concreto e considerare in seguito un corpo separato dalle percezioni sensibili che gli sono legate; si arriva allora alla superficie, alla linea e finalmente al punto”.

Al-Farabi si basa qui sulla concezione di Aristotele, secondo la quale i concetti matematici sono presi per astrazione delle proprietà delle cose reali. Nonostante l’importanza matematica dei commentari di Al-Farabi non sia molto grande, la loro influenza è stata considerevole. Al-Farabi, come altri filosofi, ha attirato l’attenzione dei matematici sulle opere di Aristotele, che dovevano ben presto giocare un ruolo considerevole in certe opere di matematica, come per esempio quelle di al-Hayyam.

I matematici dei paesi islamici si sono costantemente dedicati, con un interesse che non si è mai esaurito, ai problemi dei fondamenti degli “Elementi”, ovvero la teoria delle parallele, la teoria delle proporzioni e la teoria delle quantità irrazionali di secondo grado.

Già sotto al-Ma’Mum, il matematico al-Abbas ibn Sa’id al-Tauhari e il direttore dell’osservatorio Abu-t-Togib Somod ibn’Ali avevano scritto dei commentari al libro V di Euclide.

Tabit ibn-Qurra, autore di una nuova traduzione degli “Elementi”, vi aggiunse delle spiegazioni, in particolare sul libro V, e dei commentari speciali sulla teoria delle parallele.

Abu’Abdollah Muhammad ibn Isa al-Mahani (morto verso l’880), matematico di Baghdad, e originario della città iraniana di Maham, scrisse dei commentari ai libri I, V, X e XIII.

Dopo al-Mahani, il matematico e astronomo Abu-l-Abbas al-Fodl Ibn Hatim an-Nayrizi, originario di Bghdad e conosciuto ugualmente sotto il nome latinizzato di Anaritius (morto nel 922) e Muhammad ibn Abd al-Baqi al-Bagdadi (morto nel 1100) e altri matematici hanno scritto dei commentari agli “Elementi”.

La teoria delle quantità irrazionali quadratiche e biquadratiche è esposta nel libro X degli “Elementi”, dove tali quantità vengono rappresentate attraverso figure geometriche, ossia rette e rettangoli. Euclide ha qui stabilito una classificazione e alcune proprietà delle grandezze che si possono concepire come radici irrazionali di equazioni generali quadratiche e biquadratiche. Questa classificazione gli servì, nel libro XIII, a determinare e a costruire gli spigoli dei poliedri regolari.

Nel libro X Euclide espone e dimostra geometricamente alcune identità importanti come ad esempio:

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{a + b \pm 2\sqrt{ab}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}{a - b}$$

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2} - b}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2} - b}{2}}$$

I commentatori arabi hanno quindi mostrato che queste identità corrispondono a delle operazioni aritmetiche e le hanno spiegate per mezzo di esempi numerici. È quello che ha fatto anche l'indiano Bahaskara, ma in una maniera molto più limitata.

Citiamo qualche esempio di al-Bagdadi:

$$\sqrt{10} \pm \sqrt{8} = \sqrt{18 \pm \sqrt{320}}$$

$$\sqrt{6 \pm \sqrt{20}} = \sqrt{5} \pm 1$$

$$\sqrt{\sqrt{8} \pm \sqrt{6}} = \sqrt[4]{4\frac{1}{2}} \pm \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt[4]{12} \pm \sqrt[4]{3} = \sqrt{\sqrt{27} \pm \sqrt{24}} = \sqrt{51 \pm \sqrt{2592}}$$

si ottiene facilmente l'ultima trasformazione scrivendo la parte sinistra nella forma

$$\sqrt[4]{3} \cdot \left(\sqrt{2} \pm \sqrt{1}\right) = \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt{\sqrt{9} \pm \sqrt{8}}$$

Esistono anche, nell'opera di al-Karagi, certe trasformazioni di radici cubiche, per esempio:

$$\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{16}$$

$$\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{128}$$

È così che è stata soppressa nella scienza del Vicino e Medio Oriente la differenza tra le grandezze geometriche incommensurabili e le quantità numeriche irrazionali.

I numeri irrazionali divengono allora a tutti gli effetti un oggetto dell'aritmetica e dell'algebra. Questo si può constatare, per esempio, nell'opera di al-Biruni, autore sul quale la scienza indiana ha esercitato una certa influenza. Nel libro di trigonometria della sua opera al-Biruni (Khorasan, 973 - Ghazna, 1048) scrive: “la circonferenza e il diametro di un cerchio sono in un certo rapporto; si tratta del rapporto della misura numerica della circonferenza rispetto a quella del diametro e questo rapporto è irrazionale”. Molti matematici, sull’esempio dei Greci e degli Alessandrini, designavano il prodotto di due rette con l’espressione “superficie del rettangolo”, al-Biruni si riferiva invece al “prodotto delle linee”.

I matematici dei paesi islamici non si accontentavano come gli indiani di utilizzare i numeri irrazionali, essi ne fecero un oggetto di studi teorici. Per questi essi utilizzarono la teoria delle proporzioni dei matematici greci, l’analizzarono, la criticarono e svilupparono in seguito la loro propria teoria estendendo la nozione di numero all’insieme dei numeri reali positivi.

Al-Mahani aveva già fatto un’analisi critica della teoria delle proporzioni di Eudosso e di Euclide ed altri seguirono il suo esempio. Nessuno di loro negò l’esattezza della definizione classica dell’uguaglianza di due rapporti formulata nel libro V degli “Elementi” di Euclide, ma la maggior parte dei matematici riteneva che questa definizione non esprimesse l’essenza di una rapporto, noi diremo la misura di un rapporto. Mentre il procedimento consistente nel misurare una grandezza attraverso un’altra, cioè l’algoritmo euclideo, gioca un ruolo di primo piano nella definizione del rapporto tra grandezze commensurabili (“Elementi” libro VII), i multipli uguali dei termini di una proporzione sono direttamente comparati gli uni agli altri nella definizione generale del libro V degli “Elementi”.

Nella definizione stessa dell’uguaglianza dei rapporti, appariva già presso i matematici islamici il desiderio di sviluppare il procedimento della misura e di stabilire uno stretto legame tra i rapporti incommensurabili e quelli commensurabili, servendo questi ultimi ad esprimere i primi sotto forma di approssimazione.

Poco a poco la definizione classica delle proporzioni fu rimpiazzata da un’altra che essenzialmente riproduceva la definizione pre-eudossiana, detta ANTYPHARETICA, che si basa sull’algoritmo Euclideo; questa equivaleva alla definizione dell’uguaglianza di due rapporti attraverso l’uguaglianza dei quozienti parziali, ottenuti sviluppando questi rapporti in frazioni continue.

Si trova una definizione analoga presso al-Mahani che però ancora non propone un’analisi del legame esistente fra tale definizione e quella del libro V degli “Elementi”.

Molti autori hanno dato la medesima definizione di al-Mahani, come ad esempio an-Nayrizi e ibn al-Haytam. Quest’ultimo in particolare studiò per la prima volta il legame esistente tra le due definizioni.

Dopo Tabit ibn Qurra i matematici hanno accordato un’attenzione particolare alla teoria dei rapporti composti, sulla quale basarono parti importanti della geometria, della trigonometria e dell’aritmetica (regola del tre).

Nei “Commentari delle difficoltà che si trovano nelle introduzioni del Libro di Euclide”, composti nel 1077 da Umar al-Hayyam, si trova una elaborata teoria delle proporzioni. Il primo libro dei "Commentari" è consacrato al problema delle parallele; gli altri due trattano della teoria delle proporzioni.

Al-Hayyam considera in tutti i casi giusta, ma non "vera", la definizione di proporzione che si trova sul libro V degli "Elementi", cioè sostiene che essa non esprima l'essenza, il vero senso di un rapporto che consiste nel misurare una grandezza per mezzo di un'altra.

Per quello che concerne i rapporti numerici, cioè i rapporti fra i numeri interi, al-Hayyam ammette la definizione euclidea di proporzione [Libro VII] e nel caso delle grandezze incommensurabili definisce la proporzione in un modo per così dire antipharetico.

Egli dice: "Noi riportiamo sulla seconda grandezza tutti i multipli della prima, in modo che il resto sia più piccolo della prima; riportiamo sulla quarta tutti i multipli della terza, in modo che il resto sia più piccolo della terza; sia il multiplo della prima nella seconda uguale al multiplo della terza nella quarta. Riportiamo in seguito sulla prima tutti i multipli del resto della seconda, in modo che il resto sia più piccolo che il resto della seconda e allo stesso modo riportiamo sulla terza tutti i multipli del resto della quarta in modo che il resto sia più piccolo del resto della quarta e sia il multiplo del resto della seconda uguale al multiplo del resto della quarta. Allo stesso modo riportiamo sul resto della seconda tutti i multipli del resto della prima e sul resto della quarta tutti i multipli del resto della terza e siano i loro multipli uguali. In questo modo riportiamo gli uni dopo gli altri i multipli dei resti come spiegato e sia il numero dei resti della prima e della seconda uguale al numero dei resti corrispondenti della terza e della quarta e questo indefinitamente. In questo caso il rapporto della prima con la seconda è necessariamente uguale al rapporto della terza con la quarta. Questa è la vera proporzionalità secondo il metodo geometrico".

In altri termini: si può scomporre il rapporto A/B in una frazione continua con i quozienti parziali $q_1,q_2,..q_n$ e i rapporto C/D in una frazione continua con i quozienti parziali $q_1',q_2',\ldots q_n'$. Secondo la definizione, questi rapporti sono uguali se $q_n'=q_n$ per tutti gli n.

Al-Hayyam fornisce anche la definizione euclidea della relazione "più grande di"[Libro V]. Secondo al-Hayyam si ha $A/B > C/D$ se, mentre $q_k'=q_k$ per $k<m$, le inuguaglianze $q_m<q_m'$ per m dispari e $q_m>q_m'$ per m pari sono soddisfatte (sic).

Notiamo che al-Hayyam estende questa definizione anche al caso in cui uno solo dei due rapporti è incommensurabile e l'altro è commensurabile (cioè mentre la scomposizione in frazione continua di quest'ultimo si ferma ad una certa soglia); egli dà così un criterio permettendo di comparare un numero irrazionale con un numero razionale.

La definizione dell'uguaglianza dei rapporti di al-Hayyam è identica a certe definizioni date dai suoi predecessori. Le definizione dell'inuguaglianza dei rapporti, al contrario, sembra poter essergli attribuita. In più al-Hayyam si è particolarmente sforzato di stabilire l'equivalenza delle due teorie: la sua da una parte e quella di Eudosso ed Euclide dall'altra. In tutta una serie di proposizioni, al-Hayyam dimostra che rapporti che sono uguali o inuguali secondo Euclide lo sono anche secondo lui e viceversa. Le sue dimostrazioni si basano sulla proposizione che concerne l'esistenza di una quarta grandezza proporzionale a tre grandezze date A,B,C. Tale proposizione non figura nel libro V degli "Elementi" nonostante Euclide la utilizzi implicitamente per dimostrare alcuni suoi teoremi.

Nella proposizione 12 del libro VI, Euclide la dimostra per mezzo della teoria delle parallele, ma unicamente nel caso particolare dei segmenti. Nel libro XII, la utilizza implicitamente per calcolare delle aree delimitate da linee curve. Al-Hayyam sottolinea l'importanza di questa proposizione e cerca di farla derivare dal principio di continuità. Questa proposizione apparve per la prima volta nelle opere europee sotto forma di un assioma nella traduzione latina degli "Elementi", fatta da Johannes Companus di Novara (circa XIII sec). Questa traduzione, accompagnata da commentari, si appoggiava sulla traduzione latina di Adelardo di Bath, fatta a partire dal testo arabo degli "Elementi" e da altri testi arabi. Il principio di continuità a cui fa riferimento al-Hayyam deriva, come egli stesso afferma, da Aristotele e consiste nell'affermare la possibilità di dividere le grandezze all'infinito, cioè nel fatto che le grandezze non si compongono di indivisibili.

Egli dimostra nel modo seguente la tesi concernente l'esistenza di una quarta grandezza proporzionale a tre grandezze date A, B, C: per duplicazione si può ottenere una grandezza N molto grande tale che $C/N<A/B$; dividendo per 2 un necessario numero di volte si può ottenere, inoltre, una grandezza M molto piccola tale che $C/M>A/B$. Poiché le grandezze sono indefinitamente divisibili, deve esistere fra N ed M una grandezza intermedia D tale che $C/D = A/B$.

Il principio di continuità di al-Hayyam ovviamente non può essere alla base di una dimostrazione rigorosa dell'affermazione secondo la quale una grandezza continua che passa da un valore più piccolo C/N ad uno più grande C/M, passa necessariamente per tutti i valori intermedi. L'insieme dei razionali nell'intervallo (0,1), per esempio, è continuo secondo al-Hayyam. Il significato che al-Hayyam attribuisce al termine "continuo" viene ora espresso con il concetto di "denso". Il grande merito di al-Hayyam risiede niente meno che nell'idea di aver fondato il principio di esistenza della quarta grandezza proporzionale sulle proprietà delle grandezze continue.

Dopo aver dimostrato l'equivalenza delle due teorie, al-Hayyam avrebbe potuto utilizzare le proprietà contenute nelle proposizioni del Libro V degli "Elementi". Ma la teoria greca delle proporzioni presentava una lacuna importante. In numerosi manoscritti degli "Elementi", il Libro VI contiene una definizione (la quinta) che si enuncia come segue: "un rapporto è detto composto di rapporti se le misure dei rapporti moltiplicate tra loro formano un rapporto"[10-12, Libro VI]. Questa definizione è senza dubbio stata aggiunta più tardi in quanto Euclide non spiega da nessuna parte ciò che intende per "misura di un rapporto" e non parla in nessuna altra parte dell'opera della moltiplicazione di tali misure.

Malgrado questo, la composizione dei rapporti è di fatto utilizzata negli "Elementi"; ad esempio, nella proposizione 23 del Libro VI, nella quale Euclide dimostra che le aree dei parallelogrammi simili sono tra loro come il rapporto composto dei loro lati. Euclide sottolinea inoltre che il rapporto K/M è formato dai rapporti K/L e L/M tenendo conto che nella composizione dei rapporti A/B e C/D senza termine comune ci si appoggia sulla tesi che concerne l'esistenza della quarta retta proporzionale .

La composizione, cioè, nel nostro vocabolario, la moltiplicazione dei rapporti, era necessaria per calcoli trigonometrici, in particolare per il teorema di Menelao sul quadrilatero completo. Per questo motivo, altri editori degli "Elementi", ad esempio Teone di Alessandria (circa 370), hanno incorporato nel Libro VI la definizione di "misura" di un rapporto, estranea di per sé allo spirito dell'opera. La "misura" di un rapporto, cioè il suo valore numerico, prefigurava per i matematici greci il concetto di numero reale.

Al-Hayyam sottolinea l'importanza della teoria dei rapporti composti in geometria e in astronomia e ne dà i fondamenti. Per mezzo delle tesi precedenti egli dimostra due proprietà di questi rapporti:

1) Per tre grandezze A,B,C della stessa specie, il rapporto A/C è composto dai rapporti A/B e B/C

2) Per quattro grandezze A,B,C,D della stessa specie, il rapporto A/D e composto dai rapporti A/B, B/C, C/D.

Inoltre egli aggiunge che queste proprietà possono facilmente essere estese a un numero qualunque di grandezze.
I risultati ottenuti da al-Hayyam nel dimostrare queste tesi sono particolarmente interessanti. Il modo in cui le ha stabilite è discutibile, ma qui egli mostra niente meno che una nuova concezione di numero.

Come gli Antichi, al-Hayyam intende per numero, nel senso proprio del termine, un insieme di unità indivisibili. Allo steso tempo solleva la questione del legame esistente tra la nozione di rapporto e quella di numero. Tale problema è, secondo al-Hayyam, di natura filosofica pertanto non viene studiato dai geometrici: "un rapporto di grandezze può essere per essenza un numero o è solamente accompagnato da un numero o ancora il rapporto è legato a un numero non per natura ma per mezzo di qualcosa di estraneo, o ancora il rapporto è legato per natura a un numero e non ha bisogno per questo di niente di esteriore?"

Lasciando del tutto da parte l'aspetto "filosofico" di questa questione, al-Hayyam considera necessario introdurre nelle matematiche un'unità divisibile ed una nuova categoria di numeri che corrispondono a dei rapporti qualunque di grandezze. Nel dimostrare la prima proprietà dei rapporti composti, egli sceglie una certa unità e suppone che il suo rapporto con una grandezza ausiliaria G sia uguale al rapporto di A con B. Questa grandezza G, lui dice, noi "la concepiamo non come una linea, una superficie, un corpo o un tempo, ma come una grandezza che lo spirito astrae da tutto e che appartiene ai numeri, ma non ai numeri assoluti e reali, perché il rapporto di A rispetto B può spesso non essere misurabile numericamente, cioè si può non trovare due numeri il cui rapporto sia uguale a questo rapporto". È così, spiega al-Hayyam, che procedono i calcolatori e gli agrimensori, che parlano di una metà o di una parte di una unità supposta indivisibile, o della radice di cinque o di dieci ecc. L'unità scelta è in ogni caso divisibile e "la grandezza G, che è arbitraria, è considerata come un numero nel senso indicato".

È così che al-Hayyam oppone la sua concezione del numero a quella degli antichi e in particolare a quella di Aristotele. Rapporti qualsiasi possono essere allora espressi sia attraverso dei numeri, cioè attraverso dei numeri in senso proprio, sia, come noi diciamo oggi, attraverso "elementi impropri" del dominio numerico, cioè attraverso dei numeri irrazionali. La composizione dei rapporti è ricondotta ormai alla moltiplicazione dei numeri ed i rapporti sostituiscono pienamente la funzione che consiste nel misurare delle grandezze arbitrarie.

Tale concezione non fu la sola presente nella scienza araba. Abu Abdollah Muhammad ibn Yusuf al-Gayyam, contemporaneo di al-Hayyam, vissuto a Siviglia alla fine del IX secolo, era invece un sostenitore della teoria euclidea. Ma le concezioni dei detrattori della teoria degli Antichi corrispondevano meglio ai bisogni delle matematiche utilizzate nei calcoli.

Circa centocinquanta anni più tardi- le tappe intermedie sono quasi sconosciute- le concezioni di al-Hayyam furono ampiamente sviluppate nell'"Esposizione di Euclide" e nel "Trattato del quadrilatero completo" di Nasir ad-Din at-Tusi.

Nel suo manuale di trigonometria, Nasir ad-Din tratta ancora più nel dettaglio la teoria dei rapporti composti dimostrando per esempio la loro commutabilità nella moltiplicazione. Secondo Nasir ad-Din ogni rapporto ha la sua misura. La composizione dei rapporti è sostituita nei teoremi dalla moltiplicazione delle loro misure. At-Tusi esprime con ancora maggior precisione l'idea che ogni rapporto "può essere chiamato numero, misurato attraverso l'unità, allo stesso modo il primo termine di un rapporto è misurato dal secondo". Nel risultato definitivo, tutti i rapporti delle linee trigonometriche sono convertiti in numeri che possono essere espressi approssimativamente attraverso delle frazioni razionali.

I Cinesi e gli Indiani avevano introdotto i numeri negativi; i matematici del Vicino e del Medio Oriente sono giunti in seguito alla nozione di numero reale, che comprende sia i numeri razionali sia i numeri positivi irrazionali. Questa conquista teorica notevole fu conosciuta in Europa alla fine del XVI secolo grazie all'edizione romana di una versione dell'"Esposizione di Euclide" di Nasi ad-Din at-Tusi.

Nel XVII secolo, Gregorio di San Vincenzo sviluppò una teoria delle "designazioni (quantitative) dei rapporti" che corrisponde alle "misure dei rapporti" dei suoi precursori.

André Tacquet criticò e "corresse" il punto di vista di Euclide, partendo da un punto di vista che si avvicina a quello di al-Hayyam. Cartesio relegò la teoria generale delle proporzioni degli Antichi all'aritmetica e Newton, infine, non designò il numero come un insieme di unità, ma come un rapporto astratto di una grandezza qualunque con un'altra grandezza della stessa specie scelta come unità.

Ben inteso, l'evoluzione della nozione di numero si è potuta fare in Europa grazie soprattutto allo sviluppo gigantesco di matematici calcolatori, ma si è prolungata in seguito in maniera autonoma.

Dalla fine del XVI secolo, Simon Stevin è intervenuto in maniera decisiva per far riconoscere alle quantità irrazionali lo stato di numero. Egli si rifiutava di designarle attraverso il termine "irrazionali" o di "inesprimibili".

Sarebbe interessante sapere se non esistono dei legami diretti fra la teoria delle proporzioni del XVII secolo e quella che si trova nelle opere arabe di matematica.

L'introduzione dei numeri negativi ha giocato un ruolo molto importante nell'estensione della nozione di numero ai numeri reali. Ma i matematici del Vicino e del Medio Oriente non hanno ereditato dall'India la nozione di numero negativo. Solo recentemente è stato scoperto un caso unico di utilizzo di tali numeri nell'opera di Abu-l-Wafa destinata agli scribi. Abu-l-Wafa ha dato una formula per moltiplicare rapidamente due numeri a due cifre aventi la stesa cifra nelle decine:

$$(10a+b)\cdot(10a+c)=\{10a+b-[10\cdot(a+1)-(10a+c)]\}\cdot 10(a+1)+$$
$$+[10\cdot(a+1)-(10a+b)]\cdot[10\cdot(a+1)-(10a+c)]$$

che applica direttamente alla moltiplicazione di numeri ad una cifra. Nell'esempio che dà, egli pone a=0, b=3, c=5 e scrive "se noi vogliamo moltiplicare tre per cinque, togliamo quello che resta di dieci sottraendo uno di questi numeri, dall'altro numero, e otteniamo il detto due. Ora moltiplichiamo il resto di dieci sottratto cinque per il resto di dieci sottratto il tre, otteniamo trentacinque. Se togliamo il debito, cioè 20, otteniamo 15 che è il risultato della moltiplicazione di cinque per tre".

Qui, come in altri casi noti, l'introduzione dei numeri negativi risulta dalla sforzo fatto per stabilire il carattere universale di una regola di calcolo dapprima rinvenuta per una classe più ristretta di problemi. Noi non conosciamo un altro esempio di utilizzo dei numeri negativi nella letteratura araba. Segnaliamo ancora che in un manoscritto latino-si tratta di una traduzione o di una versione rimaneggiata di un manoscritto arabo-vicino all' "Algebra" di al-Huwarizmi, certe grandezze che dovevano essere sottratte vengono designate attraverso dei punti posti al di sotto. Questo modo di designazione così come il fatto di sottrarre un numero più grande da uno più piccolo testimonia l'influenza della scienza indiana.