



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FERRARA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E INFORMATICA

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Divulgazione e Museologia della Matematica
Prof.ssa Alessandra Fiocca

**I TRATTATI D'ALGEBRA
DI ABŪ KĀMIL E DI AL-KARĀĪ**

di
Rosina Braile e Rudy Salmi

Anno Accademico 2016/2017

Indice

Introduzione	5
1 Abū Kāmil e la lettura geometrica dell'algebra	9
1.1 La produzione scientifica di Abū Kāmil	9
1.2 Il <i>Libro sull'Algebra</i>	11
1.3 L'interpretazione algebrica degli <i>Elementi</i>	11
1.4 La risoluzione delle equazioni di secondo grado	15
1.5 Le operazioni del calcolo algebrico	18
1.6 I numeri irrazionali nelle equazioni quadratiche	19
1.7 La regola della falsa posizione	21
1.8 Sul pentagono e sul decagono regolare	23
2 Al-Karāgī e l'aritmetizzazione dell'algebra	25
2.1 I trattati di al-Karāgī	26
2.1.1 Il <i>Manuale sulla scienza dell'aritmetica</i>	26
2.1.2 L' <i>Al-Fahrī</i>	28
2.1.3 L' <i>Al-Badī</i>	31
2.2 Il calcolo dei radicali	32
2.3 Il principio d'induzione	33
2.4 L'influenza di Diofanto	34
2.5 La controversia sulla matematica indiana	36
Bibliografia	37
Sitografia	39

Introduzione

Le tappe fondamentali del sorgere, dell'affermarsi e del consolidarsi dell'algebra nel periodo d'oro della cultura araba sono legate ad una triade famosa di matematici musulmani: al-Khwarizmī, Abū Kāmil e al-Karaġī.

Con il trattato di al-Khwarizmī (780 c. - 850 c.), *Al-Kitab al-muktasar fi hisab al-jabr wa-l-muqabala*, l'algebra sorge. Il matematico persiano, a cui si deve la prima esposizione del sistema di numerazione indiano, si era prefisso l'obiettivo di scrivere un manuale che servisse alla risoluzione dei problemi della vita quotidiana, ma in realtà l'opera ebbe una diffusione ben più ampia di quella che l'autore si aspettava.

Già nel suo nascere l'algebra di al-Khwarizmī trovava applicazioni nella risoluzione di problemi puramente geometrici, ma anche di problemi di varia natura, come quelli giuridici, in particolare di eredità secondo il diritto islamico. L'algebra era così giudicata come uno strumento di grande utilità, che poteva affiancare gli strumenti matematici già conosciuti, in cui fra i principali concetti utilizzati vi era la nozione di equazione di primo e di secondo grado, a coefficienti numerici.

Una preoccupazione si coglie nello scritto di al-Khwarizmī: la ricerca della soluzione di un'equazione è solo relegata all'ambito del calcolo oppure si può cercare il "senso" di ogni equazione nello stesso ambito dell'algebra? Il primo tentativo di risposta è di indirizzarsi verso la geometria, in cui il senso di un'equazione coincide con la ricerca di una sua soluzione geometrica. Questo discorso, appena abbozzato al sorgere dell'algebra, diventava gradualmente sempre più consistente.

L'algebrista egiziano Abū Kāmil (850 c. - 930 c.) colse questa istanza e tentò di dare una lettura algebrica di alcune proposizioni geometriche, scelte con molta oculatezza, facendo riferimento agli *Elementi* di Euclide. La teoria algebrica elaborata da al-Khwarizmī venne ampliata da Abū Kāmil nel suo *Libro sull'al-ġabr e l'al-muqā-bala*, scritto verso la fine del IX secolo. Questo trattato, che contiene la teoria delle equazioni di primo e secondo grado, ebbe numerosi lettori e commentatori, fra i quali il pisano Leonardo Fibonacci, uno dei maggiori matematici del medioevo in Occidente.

Fra le caratteristiche più salienti della trattazione di Abū Kāmil si nota un elevato livello teorico. Egli utilizza più ampiamente e con maggior sicurezza sia operazioni di calcolo algebrico sia trasformazioni sulle espressioni irrazionali. Ogni regola è dimostrata geometricamente, ma si prescinde dall'omogeneità dimensionale, per cui segmenti e superfici possono indicare sia numeri sia incognite di primo o di secondo grado. All'occorrenza Abū Kāmil fa uso di più incognite, che chiama con nomi diversi, e per semplificare la risoluzione di un problema sceglie talvolta un'incognita ausiliaria.

Tra la fine del X e il XII secolo si assiste ad un notevole sviluppo dell'algebra islamica, che si articola in due correnti relativamente distinte: l'una di indirizzo aritmetico-algebrico, l'altra di indirizzo geometrico-algebrico. In esse si fa tesoro delle innovazioni di ciascuna di queste singole discipline a favore dell'altra, in un rapporto dialettico molto fecondo.

Il primo e principale esponente dell'indirizzo aritmetico-algebrico fu il persiano al-Karāḡī (953 c. - 1029 c.). Egli scrisse molte opere importanti, di cui si ricordano in particolare il *Manuale sulla scienza dell'aritmetica* e il vasto trattato di algebra intitolato *Al-Fabrī*, nella cui prefazione si trova definito esplicitamente per la prima volta lo scopo dell'algebra: la determinazione delle grandezze incognite mediante quelle note, utilizzando i metodi più efficaci.

Al-Karāḡī era preoccupato di dare all'algebra, soprattutto nel suo aspetto di calcolo, le premesse necessarie per mostrare la verità di tutte le sue operazioni aritmetiche. In questo modo l'algebra si arricchiva e si consolidava. Nel contempo, lo sguardo di al-Karāḡī si volgeva ad interpretare con il linguaggio dell'algebra problemi già posti prima, come quelli espressi nei *Libri aritmetici* di Diofanto. Nel contesto dell'algebra, questa lettura consentiva di dare agli stessi problemi una maggiore generalità.

Oltre ad essere un discepolo arabo di Diofanto, al-Karāḡī riprendeva sostanzialmente l'algebra di Abū Kāmil, che però integrava sia nella parte teorica, sia in quella dei problemi, sfruttando ampiamente l'eredità diofantea. In quest'ottica Abū Kāmil può essere considerato come l'anello di congiunzione tra la figura di al-Khwarizmī e quella di al-Karāḡī.

Nei trattati di al-Karāḡī le operazioni aritmetiche venivano applicate sistematicamente ai monomi e poi alle quantità composte da più monomi, cioè ai polinomi. Inoltre le formule per il quadrato e per il cubo di un binomio costituivano i primi elementi di quella che oggi chiamiamo l'algebra dei polinomi. In questi scritti, compariva pure una versione arcaica del principio d'induzione, sfruttata da al-Karāḡī per giustificare la somma di progressioni aritmetiche. All'algebrista persiano veniva anche attribuito il "triangolo aritmetico", molto simile al triangolo di Tartaglia o di Pascal.

Se si considera il periodo della matematica classica congiunto al periodo d'oro della matematica araba, si può affermare che le future generazioni di matematici ricevettero un patrimonio culturale inestimabile. Già a partire dall'anno 1000 studiosi dell'Europa continentale si recarono soprattutto presso i centri culturali arabi presenti in Spagna per impadronirsi di questo straordinario tesoro e cogliere, attraverso la cultura musulmana, anche l'eredità proveniente dal mondo classico. Ebbe così inizio nell'Europa continentale il cammino della scienza, in particolare dell'algebra, che solo dopo qualche secolo raggiunse la sua massima espressione.

Capitolo 1

Abū Kāmil e la lettura geometrica dell'algebra



Poco dopo al-Khwarizmī, lo scienziato Abū Kāmil Šugā'ibn Aslam ibn Muhammad al-Hāsib al-Misrī, di origine egiziana, fece fare grandi progressi all'algebra dal punto di vista sia teorico sia pratico, tanto che le ultime due parole del suo nome significano “il calcolatore egiziano”. Riguardo la sua vita abbiamo pochissime informazioni. Nato intorno all'850 e morto intorno al 930, è ricordato per essere stato il primo matematico ad aver ammesso i numeri irrazionali come coefficienti e come radici delle equazioni. Le sue tecniche ma-

tematiche furono poi riprese dal matematico pisano Leonardo Fibonacci (1175 c. - 1235 c.) per la stesura del suo *Liber abaci* (1202), opera di fondamentale importanza per la diffusione dell'algebra in Europa.

1.1 La produzione scientifica di Abū Kāmil

Abū Kāmil, considerato il più grande algebrista arabo dopo al-Khwarizmī, scrisse numerose opere di matematica. Alcune di queste sono andate perdute, come il *Libro della fortuna*, il *Libro dei due errori*, il *Libro sull'aumento e la diminuzione* e il *Libro sui presagi*. Dai titoli citati si evince che pure Abū Kāmil fosse interessato alla magia, all'astrologia e ai

presagi, come tanti altri scienziati di quell'epoca. Le opere che invece ci sono pervenute sono:

1. il *Libro sull'Algebra*,
2. il *Libro delle cose rare nell'arte del calcolo*,
3. il *Libro sulla misurazione dei terreni e la geometria*.

Il trattato di algebra ci è giunto non in lingua araba originale ma attraverso una traduzione latina e una in ebraico antico. Quest'ultima fu redatta intorno al 1460 dal matematico Morduchai Finzi (1440-1475), originario di Mantova, probabilmente dopo una traduzione spagnola. Nella traduzione di Finzi, il trattato porta il titolo di *Calcolo di superfici*, forse per via di un'altra opera di Abū Kāmil. Il vero titolo dell'opera potrebbe essere stato: *Libro sull'al-ğabr e l'al-muqā-bala* (*Kitāb al-ğabr wa-l-muqābala*). Quest'opera conobbe un'enorme popolarità per molto tempo e fu oggetto di almeno tre commenti, tuttora non ritrovati.

Nel *Libro delle cose rare nell'arte del calcolo*, Abū Kāmil si occupava invece di soluzioni per equazioni indeterminate, riprendendo i problemi dell'*Aritmetica* di Diofanto, considerato il padre dell'algebra nel mondo classico. La sua opera, studiata a fondo dalla maggior parte degli studiosi islamici, fu d'ispirazione per molti algebristi arabi e successivamente europei¹.

Il *Libro sulla misurazione dei terreni e la geometria* era destinato non ai matematici, ma ai geometri che dovevano stabilire l'estensione dei terreni. Le regole principali, accompagnate sempre da esempi numerici, riguardavano il calcolo di aree, perimetri e diagonali di figure piane, come quadrati, rettangoli e triangoli. Abū Kāmil dava pure le regole per calcolare la superficie e il volume di vari solidi, tra cui i parallelepipedi rettangoli, i prismi circolari, le piramidi a base quadrata e i coni. Un'intera sezione era invece dedicata al calcolo dell'area del settore circolare: come approssimazione di π veniva utilizzato il numero razionale $\frac{22}{7}$. La parte finale del lavoro forniva le regole per calcolare il lato di particolari poligoni regolari inscritti in un cerchio di diametro assegnato: le regole date per il pentagono e il decagono vengono dimostrate mediante l'algebra².

¹Diofanto di Alessandria, matematico greco antico, vissuto attorno al 250 d.C., è noto come il padre dell'algebra nel mondo antico. Diofanto scrisse un trattato sui numeri poligonali e sulle frazioni, ma la sua opera principale è l'*Aritmetica*, trattato in tredici volumi dei quali soltanto i primi sei sono giunti fino a noi. La sua fama è principalmente legata a due argomenti: le equazioni indeterminate e il simbolismo matematico. Per ulteriori approfondimenti, si veda Meskens (2007), pp. 107-112.

²Karpinski (1914).

1.2 Il Libro sull'Algebra

L'*Algebra* di Abū Kāmil, come quella di al-Khwarizmī, tratta la teoria delle equazioni fino al secondo grado. La composizione del suo trattato ricorda molto l'*Algebra* del suo predecessore di Baghdād: troviamo inizialmente le soluzioni delle forme canoniche, seguono elementi di calcolo algebrico e infine esempi e problemi.

L'opera è suddivisa in tre parti:

1. risoluzione di equazioni quadratiche;
2. problemi di matematica ricreativa ed equazioni diofantee;
3. applicazioni dei metodi algebrici al pentagono e al decagono regolare.

La caratteristica dell'algebra di Abū Kāmil consiste nell'applicazione dell'algebra ai problemi geometrici. Le spiegazioni sono scritte in modo retorico, senza far uso di simboli, pertanto risultano molto prolisse. Tuttavia, nella traduzione di Finzi, compaiono sia le cifre indo-arabe sia le prime nove lettere dell'alfabeto ebraico e anche un segno analogo al nostro zero. Nonostante la somiglianza con l'opera di al-Khwarizmī, nell'opera di Abū Kāmil si trovano molti elementi innovativi di teoria, oltre a nuovi esempi e applicazioni.

All'inizio del suo trattato, Abū Kāmil cita, riferendosi ad al-Khwarizmī, tre tipi di grandezze: numeri ordinari, radici e quadrati, alle quali aggiunge potenze di grado superiore delle incognite, ovvero il cubo (*ka'b*), il quadrato-quadrato (*māl māl*), il quadrato-quadrato-cosa (o incognita) (*māl māl šay'*), il cubo-cubo e infine, omettendo la settima potenza, giunge all'ottava potenza, cioè il quadrato-quadrato-quadrato-quadrato.

Come in Diofanto, Abū Kāmil utilizza la formazione additiva degli esponenti, con la sola differenza che Diofanto esprime la quinta potenza come il quadrato-cubo. Inoltre Abū Kāmil utilizza più incognite, il che costituisce un progresso rispetto ad al-Khwarizmī, il quale si limita ad utilizzarne solo una. Abū Kāmil introduce una terminologia particolare per differenziare le varie incognite: radice o cosa (*šay'*) per la prima, *dinār* per la seconda, *fals* (unità di valuta) per la terza e *hātem* (timbro) per la quarta³.

1.3 L'interpretazione algebrica degli *Elementi*

Nel trattato di Abū Kāmil, si percepisce una costante esigenza di giustificare le teorie algebriche mediante la geometria pura e, al tempo stesso, la risoluzione algebrica

³Youschkevitch (1976).

dei problemi geometrici classici testimonia la validità del metodo, che risiede nella sua generalità d'applicazione.

Nella teoria delle equazioni di secondo grado, le regole vengono spiegate attraverso esempi numerici, come avviene nell'opera di al-Khwarizmī. Abū Kāmil però insiste sul fatto che questi esempi sono stati scelti in modo puramente arbitrario. Inoltre, nel dimostrare queste regole, egli si discosta dal suo predecessore e si basa sulle proposizioni del Libro II degli *Elementi* di Euclide. In particolare, richiama la proposizione 5, secondo cui dato un segmento AB , il cui punto medio è C , preso un altro punto D su AB , si ha che

$$AD \cdot DB + CD^2 = AC^2.$$

Se si traduce la proposizione nella forma

$$AD \cdot DB = AC^2 - CD^2$$

secondo cui un rettangolo è la differenza di due quadrati, si hanno le due soluzioni espresse in termini algebrici per le equazioni del tipo $x^2 + c = bx$, di cui si cercano solo le radici positive, nell'ipotesi che $\left(\frac{b}{2}\right)^2 > c$.

Infatti, nel caso in cui il punto D si trovi tra C e B , posto $AB = b$ e $DB = x$, vale che

$$(b-x)x + \left(\frac{b}{2} - x\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

Poiché si conosce $AD \cdot DB$, cioè $bx - x^2 = c$, allora la relazione precedente è

$$c + \left(\frac{b}{2} - x\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

che si può trasformare in

$$\left(\frac{b}{2} - x\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c.$$

Ora c , b e $\frac{b}{2}$ sono dati, quindi il problema si riduce a costruire un quadrato di lato $\frac{b}{2} - x$ e area $\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$. Per cui

$$\frac{b}{2} - x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

cioè

$$x = \frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}.$$

Se invece si suppone che D si trovi tra A e C , allora nella formula risolutiva si trova il segno positivo, poiché la relazione sarà $(x - \frac{b}{2})^2 = (\frac{b}{2})^2 - c$. Dunque la proposizione 5 può essere tradotta facilmente nel linguaggio dell'algebra.

Questi due casi possono essere espressi per mezzo di una costruzione geometrica così fatta. Sia dato il segmento AB , sia C il suo punto medio e sia CP il suo asse. Se si traccia un cerchio di centro P e raggio maggiore di PC , si ottengono due intersezioni sul segmento: una compresa tra A e C e l'altra compresa tra C e B , che danno i due casi precedenti. Indicando con D l'intersezione scelta, si è visto che $AD \cdot DB + CD^2 = AC^2$, cioè il quadrato costruito sulla metà di AB è dato dalla somma di un rettangolo e di un altro quadrato⁴.

Abū Kāmil richiama pure la proposizione 6, molto simile nel contenuto alla proposizione 5, in quanto afferma che se il punto D si trova sul prolungamento di AB , allora vale che $AD \cdot BD + CB^2 = CD^2$, dove C è sempre il punto medio di AB . Ora, se $AB = b$ e $BD = x$, si ha che

$$(b + x)x + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2} + x\right)^2$$

la cui verifica è immediata. È importante osservare che le proposizioni 5 e 6 sono state lette dai posteri come se fossero un'unica proposizione: nel caso in cui D si trovi tra A e B si richiama la proposizione 5, mentre quando D si trova al di là di B si richiama la proposizione 6. Ciò si traduce da un punto di vista aritmetico-algebrico nel fatto di cambiare il segno all'incognita nel passare da un caso all'altro⁵.

Queste proposizioni equivalgono sostanzialmente al metodo del completamento del quadrato di una somma (o di una differenza) contenuta in un'espressione di secondo grado a due termini, cioè una trasformazione del tipo

$$x^2 + p = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2.$$

Vediamo quindi in dettaglio come Abū Kāmil risolve l'equazione del tipo

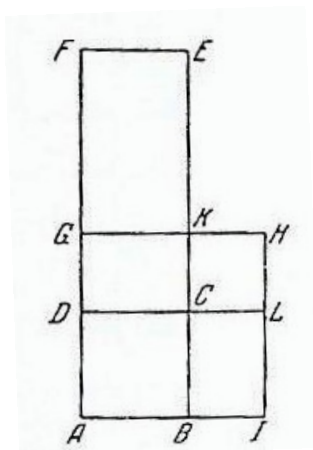
$$x^2 + q = px$$

dove si suppone che il coefficiente del termine di grado massimo sia uguale a 1.

⁴Nel caso in cui C coincida con D , cioè CD^2 è nullo, allora $AD \cdot DB = AC^2$. Quindi tra tutti i rettangoli necessari per avere la relazione espressa dalla proposizione 5, il massimo è il quadrato di lato AC .

⁵Galuzzi, Maierù, Santoro (2010), pp. 175-177.

CASO 1. Abū Kāmil suppone $\left(\frac{p}{2}\right)^2 > q$ ed esamina il caso in cui il quadrato ricercato sia più piccolo del numero assegnato, cioè $x^2 < q$ e di conseguenza $x^2 < \left(\frac{p}{2}\right)^2$. Egli rappresenta geometricamente il quadrato ricercato come $x^2 = ABCD$, a cui aggiunge il rettangolo $DCEF = q$ con $DF > DA$.



Si ottiene così il rettangolo $ABEF = px$ in cui $AF = p$ viene diviso in due parti uguali dal suo punto medio G , mentre il punto D lo divide in due parti diverse. Per tale motivo Abū Kāmil fa riferimento alla proposizione 5 del Libro II degli *Elementi* di Euclide. Ne risulta che:

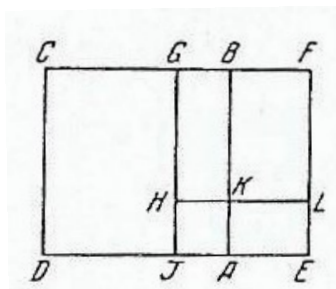
$$DF \cdot DA + GD^2 = AG^2.$$

Dato che $DF \cdot DA = q$ e $AG = \frac{p}{2}$, e per ipotesi $GD = \frac{p}{2} - x$, si ha che

$$x = \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p^2}{2}\right) - q}.$$

Inoltre Abū Kāmil dimostra, ispirandosi ad Euclide, l'uguaglianza dell'area dello gnomone $CKGAILC$ e del rettangolo $DCEF$.

CASO 2. Suppone in seguito $x^2 > \left(\frac{p}{2}\right)^2 > q$. In figura si ha che $ABCD = x^2$, il rettangolo $ABFE = q$, il rettangolo $CDEF = px$ e G è il punto medio di $CF = p$.



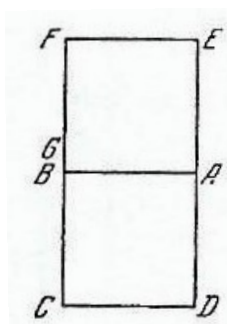
Dopodiché utilizza l'equazione:

$$BF \cdot BC + BG^2 = GC^2.$$

Dato che $BF \cdot BC = q$ e $BG = x - \frac{p}{2}$, si trova che

$$x = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p^2}{2}\right) - q}.$$

CASO 3. Abū Kāmil pone $\left(\frac{p}{2}\right)^2 = q$ e, affiancando il rettangolo $ABFE = q$ al quadrato $ABCD = x^2$, dimostra per assurdo con le stesse proposizioni di Euclide che il punto G , essendo il punto medio di CF , non può essere situato né più in basso né più in alto rispetto al punto B , cioè i due punti devono coincidere; ne segue che $x = \frac{p}{2}$.



1.4 La risoluzione delle equazioni di secondo grado

Sin dalla nascita dell'algebra araba il quadrato della radice, come pure la radice stessa, era considerata come un'incognita da determinare. Questa caratteristica appare ancora in modo evidente nell'opera di Abū Kāmil. Per questa ragione l'autore stabilisce regole precise con cui determinare direttamente x^2 sotto forma di radicali. Utilizzando

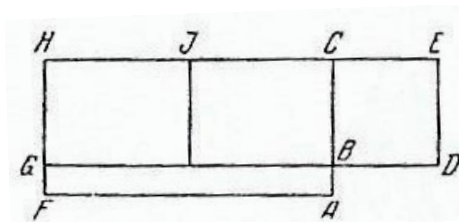
la nostra simbologia, le regole per le equazioni dalla quarta alla sesta forma canonica⁶ possono essere scritte nel modo seguente:

$$x^2 = \frac{p^2}{2} + q - \sqrt{p^2q + \left(\frac{p^2}{2}\right)^2},$$

$$x^2 = \frac{p^2}{2} - q \pm \sqrt{\left(\frac{p^2}{2}\right)^2 - p^2q},$$

$$x^2 = \frac{p^2}{2} + q + \sqrt{p^2q + \left(\frac{p^2}{2}\right)^2}.$$

Ogni regola è basata sui metodi dell'algebra geometrica, con la sola differenza che, secondo Abū Kāmil, i segmenti e le superfici possono rappresentare indifferentemente sia numeri sia la prima o la seconda potenza dell'incognita. Si rinuncia così all'esigenza classica di rispettare l'omogeneità delle dimensioni nelle dimostrazioni geometriche⁷. Ad esempio, nel caso dell'equazione $x^2 + px = q$ con $p = 10$ e $q = 39$, Abū Kāmil rappresenta x^2 come un segmento AB che prolunga fino ad incontrare il punto C , con $BC = 10x$, in modo che la somma dei due segmenti $AB + BC = AC$ rappresenti già il numero 39.



Per quanto riguarda il quadrato $CBDE$, si afferma che è 100 volte più grande rispetto al segmento AB moltiplicato per una delle sue unità, in modo tale che il seg-

⁶Le forme canoniche per le equazioni a cui si fa riferimento sono quelle date da al-Khwarizmī, ovvero:

1. $ax^2 = bx$
2. $ax^2 = c$
3. $ax = c$
4. $ax^2 + bx = c$
5. $ax^2 + c = bx$
6. $bx + c = ax^2$

Nel caso in esame, $a = 1$, $b = p$ e $c = \frac{q}{4}$.

⁷Tuttavia i matematici del Medio Oriente, non perseverando in questa direzione, non furono in grado di giungere alla geometria analitica, che ritroveremo infatti molto più avanti con Cartesio.

mento BC sia uguale a 10 volte il segmento AB , etc. In notazione moderna si ha che

$$BC = px, \quad CBDE = p^2 \cdot x^2$$

e poi si pone

$$FA = GB = p^2.$$

Scrivendo direttamente i calcoli con la notazione algebrica, si ha che

$$\text{rettangolo } ACHF = AF \cdot AC = p^2 \cdot q,$$

$$\text{rettangolo } ABGF = p^2 \cdot x^2 = \text{quadrato } CBDE$$

da cui

$$\text{rettangolo } GHED = EH \cdot CE = \text{rettangolo } ACHF = p^2 \cdot q$$

cioè

$$p^2 \cdot x^2 + p^2 \cdot px = (p^2 + px)px = p^2 \cdot q.$$

Se I è il punto medio del segmento CH , allora si ha che⁸:

$$EH \cdot CE + (IC)^2 = (IE)^2$$

ovvero

$$p^2 q + \left(\frac{p^2}{2}\right)^2 = \left(px + \frac{p^2}{2}\right)^2$$

da cui risulta che

$$IE = BC + CI = px + \frac{p^2}{2} = \sqrt{p^2 q + \left(\frac{p^2}{2}\right)^2}.$$

Dato che $AC + CI = q + \frac{p^2}{2}$ e $x^2 = AB = AC - BC$, si ha che

$$x^2 = \frac{p^2}{2} + q - \sqrt{p^2 q + \left(\frac{p^2}{2}\right)^2}$$

cioè la tesi.

⁸Si confronti la proposizione 6 del Libro VI degli *Elementi*.

1.5 Le operazioni del calcolo algebrico

Come in al-Khwarizmī, nell'opera di Abū Kāmil gli esempi e i problemi sono preceduti da diverse regole sulle trasformazioni algebriche; anche se sono molto più numerose rispetto a quelle di al-Khwarizmī. Oltre alla moltiplicazione di monomi e binomi e alla moltiplicazione e divisione di radici quadrate, Abū Kāmil introduce molte altre operazioni di calcolo algebrico, alcune delle quali sono citate nei problemi stessi. Egli ritiene opportuno formulare regole semplici come:

$$\left(\frac{a}{b}\right) \cdot b = a, \quad \frac{a}{b} = \frac{a^2}{ab}, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$$

(quest'ultima regola è presente pure in al-Khwarizmī). Inoltre introduce pure la regola:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2 + b^2}{ab}.$$

Egli studia in modo dettagliato il caso in cui la somma o la differenza di due radici quadrate di numeri razionali $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ sia un numero razionale oppure sia la radice quadrata di un numero razionale. Questo è esattamente ciò che accade quando \sqrt{ab} o equivalentemente $\sqrt{\frac{a}{b}}$ è razionale. Abū Kāmil utilizza la regola

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{a + b \pm 2\sqrt{ab}},$$

e dunque, a titolo di esempi numerici:

$$\sqrt{18} \pm \sqrt{8} = \sqrt{18 + 8 \pm 2\sqrt{144}} \quad \text{cioè } \sqrt{50} \text{ o } \sqrt{2}$$

e

$$\sqrt{10} \pm \sqrt{2} = \sqrt{10 + 2 \pm 2\sqrt{20}}.$$

Vi sono due particolarità che caratterizzano il modo in cui Abū Kāmil tratta l'algebra: un alto livello teorico e, malgrado l'utilizzo di dimostrazioni geometriche, una tendenza all'arimetizzazione. Abū Kāmil richiama più volte l'attenzione del lettore verso il carattere generale delle identità algebriche, spiegate prima attraverso esempi numerici e poi formulate in modo retorico in forma generale. Nella maggior parte dei casi queste identità si deducono dalla teoria delle proporzioni, in particolare sfruttando la proprietà secondo cui il prodotto dei medi è uguale a quello degli estremi.

Qui Abū Kāmil si discosta dalle tradizioni classiche, in un modo comunque in-

teressante. Non fa distinzione tra la teoria generale delle proporzioni di Eudosso e la teoria delle proporzioni di grandezze commensurabili, ma parla in modo generale di teoria delle proporzioni, senza distinguere i termini commensurabili da quelli incommensurabili. Egli sosteneva molto esplicitamente che i termini delle proporzioni potessero essere numeri sia razionali sia irrazionali⁹.

1.6 I numeri irrazionali nelle equazioni quadratiche

Negli esempi riportati da Abū Kāmil sulla teoria delle equazioni, le quantità irrazionali di secondo grado si presentavano costantemente come numeri, cioè come oggetti di natura puramente aritmetica. Queste potevano essere sia coefficienti sia radici dell'equazione. Mentre in al-Khwarizmī, gli irrazionali compaiono molto raramente come radici di equazioni, ma mai come coefficienti.

L'opera di Abū Kāmil è estremamente ricca di esempi. Due tipi di problemi si riallacciano all'algebra di al-Khwarizmī. Un primo problema consiste nel dividere il numero 10 in due parti in modo tale da soddisfare una data condizione, mentre il secondo riguarda la determinazione di un numero x di persone tale che $\frac{a}{x} = \frac{a}{x+b} + c$. Si osserva che già in questi due tipi di esempi il grado di difficoltà aumenta molto rapidamente in quanto si deve fare ricorso frequentemente alle tecniche di calcolo per le quantità irrazionali di secondo grado.

Ora studiamo un esempio che riteniamo molto pratico e utile sulle quantità irrazionali di secondo grado. Si divida il numero 10 in due parti uguali x e $10 - x$ tali che

$$\frac{x}{10-x} + \frac{10-x}{x} = \sqrt{5}.$$

L'equazione di secondo grado corrispondente sarà

$$(2 + \sqrt{5})x^2 + 100 = (10 + \sqrt{500})x$$

che si riduce dopo aver moltiplicato per $(2 + \sqrt{5})$ all'equazione

$$x^2 + \sqrt{50000} - 200 = 10x.$$

Ma l'autore non è soddisfatto di questo risultato; pertanto trova un'altra soluzione più semplice considerando come cosa, cioè come radice: $\frac{10-x}{x}$. Ponendo allora $y = \frac{10-x}{x}$,

⁹Youshkevitch (1976).

si ha che

$$y^2 + 1 = \sqrt{5}y \quad \text{e} \quad y = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}.$$

A partire dall'equazione lineare

$$\frac{10 - x}{x} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2},$$

determina l'incognita x dove il coefficiente è irrazionale. Abū Kāmil eleva poi al quadrato entrambi i membri dell'equazione

$$10 - \frac{x}{2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}}x$$

per poi determinare $x = \sqrt{125} - 5$ usando l'equazione di secondo grado

$$x^2 + 10x = 100.$$

Quantità irrazionali ancora più complicate compaiono in un altro problema che si può scrivere nella forma seguente:

$$\left(\sqrt{\frac{x}{2}} + 3\right) \left(\sqrt{\frac{x}{3}} + 2\right) = 20.$$

Un primo approccio può far pensare che Abū Kāmil non sia in grado di trovare la strada più semplice per arrivare alla soluzione. Invece di rappresentare l'equazione nella forma

$$x + (2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})\sqrt{x} = 14\sqrt{6}$$

e di utilizzare la formula per il quadrato della radice che egli stesso ha ideato, ottenendo così immediatamente

$$x = 15 + 20\sqrt{6} - \sqrt{1449 + 600\sqrt{6}},$$

Abū Kāmil inizia con le seguenti trasformazioni:

$$6 + \sqrt{\frac{x^2}{6}} + \sqrt{3x} + \sqrt{2x} = 20,$$

$$\left(14 - \sqrt{\frac{x^2}{6}}\right)^2 = 196 + \frac{x^2}{6} - \sqrt{\left(196 + \frac{2}{3}\right) \cdot x^2} = 5x + \sqrt{24x^2},$$

$$5x + \sqrt{24x^2} + \sqrt{\left(196 + \frac{2}{3}\right) \cdot x^2} = 196 + \frac{x^2}{6},$$

$$x^2 + 1176 = 30x + \sqrt{864x^2} + \sqrt{4704x^2}.$$

Ottiene così l'espressione molto complicata:

$$x = 15 + \sqrt{1176} + \sqrt{216} - \sqrt{441 + \sqrt{1058400} + \sqrt{1016064} + \sqrt{194400}}.$$

Ma, subito dopo, Abū Kāmil trova pure la soluzione più semplice suddetta. Sottolinea nella penultima equazione l'identità:

$$\sqrt{24} + \sqrt{196 + \frac{2}{3}} = \sqrt{232 + \frac{2}{3} + 2\sqrt{24 \cdot 196 + \frac{2}{3}}} = \sqrt{400 + \frac{2}{3}}$$

tale che

$$x^2 + 1176 = 30x + \sqrt{9600x^2}.$$

A partire da qui, Abū Kāmil ottiene il valore di x che abbiamo dato, con la differenza che nel suo testo si trova $\sqrt{2400}$ e $\sqrt{2160000}$ invece di $20\sqrt{6}$ e $600\sqrt{6}$.

1.7 La regola della falsa posizione

Ci occupiamo ora di un problema in cui sono utilizzati dei procedimenti propriamente algebrici e allo stesso tempo la regola della falsa posizione. Il numero 10 deve essere decomposto in tre parti tali che:

$$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ xz = y^2 \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases} \quad \text{con } x < y < z.$$

Abū Kāmil parla di una parte piccola, di una parte media e di una parte grande¹⁰. Si pone innanzitutto $y_1 = 1$ e poi si ottiene dalla seconda e dalla terza equazione del sistema un'equazione biquadratica di quarto grado in y_1 :

$$1 + y_1^2 = y_1^4$$

¹⁰Qui, e in altri casi analoghi, Abū Kāmil non fa uso di termini che ha già impiegato per indicare più incognite che si trovano nella stessa equazione (come fa invece nella sua opera sulla teoria dei numeri); nell'*Algebra* questi termini saranno utilizzati soltanto occasionalmente nella sostituzione delle incognite.

e le equazioni

$$z_1 = y_1^2 = \frac{1}{2} + \sqrt{1 + \frac{1}{4}}, \quad y_1 = \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{1 + \frac{1}{4}}}.$$

Quindi si trova:

$$x_1 + y_1 + z_1 = 1 + \frac{1}{2} + \sqrt{1 + \frac{1}{4}} + \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{1 + \frac{1}{4}}}$$

e

$$x : 1 = 10 : \left(1 + \frac{1}{2} + \sqrt{1 + \frac{1}{4}} + \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{1 + \frac{1}{4}}} \right).$$

Per rappresentare x in una forma più conveniente, Abū Kāmil, che esprime tutti questi calcoli in modo retorico, esegue delle trasformazioni che gli consentono di passare dall'equazione lineare che abbiamo appena scritto all'equazione di secondo grado:

$$100 + 3x^2 + \sqrt{5x^4} = 30x + \sqrt{500x^2}.$$

Moltiplicando per $\frac{3}{4} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{8} = \frac{3-\sqrt{5}}{4}$, ottiene a partire dalla forma canonica

$$x^2 + 75 - \sqrt{3125} = 10x,$$

il valore

$$x = 5 - \sqrt{\sqrt{3125} - 50}.$$

Dopo aver calcolato z nella stessa maniera, Abū Kāmil ottiene $y = 10 - x - z$. Inoltre calcola ancora y partendo dalla falsa posizione $y_1 = 2$.

Per risolvere questo problema, Abū Kāmil ha dovuto risolvere un'equazione bi-quadratica di quarto grado. In altri problemi, compaiono equazioni di secondo grado rispetto ad una potenza qualunque dell'incognita. Ad esempio, il problema che si può esprimere attraverso le equazioni

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ xz = y^2 \\ xy = 10 \end{cases} \quad \text{con } x < y < z$$

viene risolto dall'autore con l'equazione

$$x^8 + 100x^4 = 10000$$

la cui soluzione è

$$x = \sqrt[4]{\sqrt{12500} - 50}.$$

Abū Kāmil affronta pure problemi molto complicati che possono essere ricondotti a due equazioni di secondo grado, come ad esempio il caso:

$$4\sqrt{x - 3\sqrt{x}} = x - 3\sqrt{x} + 4.$$

Abū Kāmil risolve questo problema ponendo $x - 3\sqrt{x}$ uguale al quadrato di un'incognita ausiliaria.

1.8 Sul pentagono e sul decagono regolare

Abū Kāmil utilizza i metodi algebrici anche in un'altra opera, il *Libro sulla misurazione dei terreni e la geometria*, che ci è giunta, sebbene incompleta, in una traduzione latina e in un'altra in ebraico antico. In questo trattato l'autore si occupa pure di pentagoni e di decagoni regolari¹¹.

Nell'opera non viene affrontato il problema della costruzione delle figure, né tanto meno vengono classificati i vari tipi di irrazionalità quadratiche, come avviene per esempio in Euclide. Invece vengono trattati i rapporti numerici che intercorrono tra i loro elementi e tra i diametri dei cerchi in cui sono inscritti e circoscritti. In tal modo, il lato del pentagono inscritto in una circonferenza di diametro 10 si esprime come radice dell'equazione biquadratica

$$\frac{x^2}{5} = 5 + \frac{x^4}{625},$$

da cui

$$x = \sqrt{62 \frac{1}{2} - \sqrt{781 \frac{1}{4}}}.$$

Abū Kāmil calcola pure la lunghezza dei lati del decagono inscritto e le grandezze delle figure circoscritte. Inoltre esprime il diametro in funzione dei lati e determina infine il

¹¹Il manoscritto arabo di quest'opera intitolato *Kitab... al-mubammas wa-l-mu'aššar* è stato ritrovato e studiato recentemente da M. Levey. Si può consultare il suo articolo su Abū Kāmil nel *Dictionary of scientific biography*, vol. I, 1970, pp. 30-32.

rapporto tra le aree e i lati.

Si richiama, in particolare, un problema nel quale l'esigenza classica dell'omogeneità delle dimensioni non viene rispettata: si determini l'altezza x di un triangolo equilatero, sapendo che la somma della sua area e dell'altezza è 10. Il problema si risolve con l'equazione

$$x^2 + \sqrt{3}x^2 = \sqrt{300}$$

la cui soluzione è

$$x = \sqrt{\frac{3}{4} + \sqrt{300}} - \sqrt{\frac{3}{4}}.$$

Le opere di Abū Kāmil, che si sono fin qui trattate, hanno esercitato una grande influenza sugli ulteriori sviluppi dell'algebra¹².

¹²Karpinski (1914).

Capitolo 2

Al-Karağī e l'arimetizzazione dell'algebra



Alle opere di Abū Kāmil devono essere strettamente associate tre opere di uno studioso di Baghdād, Abū Bakr Muhammad ibn al-Hasan al-Karağī (953 c. - 1029 c.), vissuto un secolo e mezzo dopo al-Khwarizmī. Era originario della città di Karağ, situata a circa metà strada tra Teheran e Kaswin. Lo si trova spesso sotto il nome di al-Karhī, perché la lettera araba “djim” si pronuncia come la j spagnola, se è accompagnata da un punto sopra di essa¹.

Sappiamo che al-Karağī trascorse gran parte della sua vita a Baghdād, dove scrisse le sue opere più importanti, tra cui l'*al-Fabrī*, dedicato proprio al califfo della Città del Sapere. Dopo aver abbandonato Baghdād, il matematico persiano si dedicò ad un progetto ingegneristico sulla perforazione dei terreni per l'estrazione dell'acqua dalle falde acquifere².

Molti storici della matematica concordano nel fatto che al-Karağī sia stato il primo matematico a de-geometrizzare completamente l'algebra, rimpiazzando le interpretazioni geometriche con le operazioni dell'aritmetica. Così facendo, al-Karağī conferì al-

¹Il problema sul nome di questo scienziato non è completamente risolto. Per approfondimento, si può consultare l'articolo “al-Karağī” di R. Rashed nel *Dictionary of scientific biography*, vol. VII, 1973, pp. 240-246.

²Il suo trattato di idraulica, intitolato *Inbat al-miyah al-khafiya*, è stato tradotto e commentato da Giuseppina Ferriello, nel testo *L'estrazione delle acque nascoste. Trattato tecnico-scientifico di Karağī*, Torino, Kim Williams Books, 2007.

l'algebra una dignità di disciplina a se stante, rendendola autonoma da ogni altra branca della matematica.

2.1 I trattati di al-Karāḡī

I più importanti trattati matematici di al-Karāḡī sono:

1. *Kitāb al-Kāfī fī-l-hisāb* (“Manuale sulla scienza dell'aritmetica”),
2. *Al-Fabrī fī'l-jabr wa'l-muqābala* (“L'algebra gloriosa”),
3. *Al-Badī' fī'l-hisāb* (“La magnifica aritmetica”).

Al-Karāḡī si propone di applicare l'aritmetica all'algebra, cioè di mostrare che le leggi, le regole e alcuni algoritmi dell'aritmetica continuano ad essere veri quando sono applicati ad espressioni algebriche di forma polinomiale. Questo studio persegue lo scopo di organizzare in maniera più completa la trattazione delle equazioni algebriche.

I trattati d'algebra di al-Karāḡī, in particolare l'*al-Fabrī* e l'*al-Badī*, sono la testimonianza del suo lavoro. Questa sua ricerca porta a strutturare l'algebra in maniera autonoma rispetto alla matematica fino ad allora creata: è possibile classificare la sua opera come aritmetizzazione dell'algebra, intendendo con questo termine che i procedimenti aritmetici sono validi anche per l'algebra. Una volta verificato ciò, si dà all'algebra una struttura autonoma e consistente.

Le fonti d'ispirazione di al-Karāḡī sono le opere di al-Khwarizmī e i *Libri aritmetici* di Diofanto, già rivisitati da altri matematici arabi. È evidente che, dopo di lui, il *Kitāb al-jabr wa al-muqābala* di al-Khwarizmī non è più una diretta fonte d'ispirazione quanto lo sono i trattati di matematici come quelli di al-Karāḡī, che hanno dato all'algebra quella struttura, del resto conservata fino a noi, che la rende autonoma nel panorama matematico, ponendo implicitamente la domanda se siano sufficienti per la trattazione presentata gli insiemi numerici fino ad allora conosciuti³.

2.1.1 Il *Manuale sulla scienza dell'aritmetica*

Il *Manuale sulla scienza dell'aritmetica* (*Kitāb al-Kāfī fī-l-hisāb*), analogamente al manuale di Abu-l-Wafā⁴ sull'aritmetica pratica, era destinato, come l'autore stesso sottolinea,

³Rashed (2011), pp. 78-80.

⁴Abu l-Wafā (Baghdad, 940 - Nīshāpūr, 998) fu un matematico e astronomo persiano. Realizzò un quadrante a muro per accurate misure astronomiche della declinazione delle stelle. Introdusse inoltre la funzione trigonometrica tangente e migliorò i metodi di calcolo delle tavole trigonometriche per affrontare problemi geometrici relativi alle sfere trigonometriche.

agli scribi e ai mercanti. Essa si compone di settanta brevi capitoli. I primi 43 trattano dell'aritmetica, i 10 seguenti della geometria. Per molti aspetti, qui al-Karāḡī fa riferimento ad Abu-l-Wafā. I capitoli dal 54 al 70 riguardano l'algebra.

Nella parte aritmetica, al-Karāḡī, proprio come Abu-l-Wafā, non utilizza cifre. Per quanto riguarda le operazioni, la duplicazione e la divisione per due non sono trattate separatamente. Viene data particolare importanza alla decomposizione delle frazioni ordinarie in somme di frazioni fondamentali; l'autore spiega in che modo le frazioni ordinarie devono essere ridotte al minimo comune denominatore.

Egli introduce la prova per undici, oltre alla prova del nove, che è sicuramente una novità nella letteratura matematica araba, dal momento che si possono intravedere ragionamenti che appartengono a quella parte della matematica che oggi chiamiamo aritmetica modulare. Le regole del tre sono sviluppate col supporto di una teoria delle proporzioni esposta in modo molto dettagliato⁵.

Inoltre vengono risolti due problemi, che erano già ben noti sia in Cina sia in India, come applicazioni del teorema di Pitagora:

- **PROBLEMA 1.** *Determinare la lunghezza di una canna che si trova in uno stagno ed emerge dall'acqua di 5 braccia, sapendo che l'estremità della canna, sotto l'influenza del vento, si allontana di 10 braccia dalla sua posizione iniziale e si ferma esattamente all'altezza della superficie dell'acqua⁶.*
- **PROBLEMA 2.** *Sulle sponde opposte di un fiume largo 50 braccia vi sono esattamente una di fronte all'altra due palme alte rispettivamente 20 e 30 braccia. In cima alle palme, si trovano due uccelli che scorgono un pesce in superficie. Entrambi si precipitano sul pesce nello stesso momento e lo raggiungono nello stesso istante, sulla retta che unisce i piedi delle palme. Si deve trovare il punto d'incontro dei due uccelli e il tragitto percorso da ciascuno di essi⁷.*

La risoluzione delle sei forme canoniche delle equazioni è l'argomento principale dei capitoli d'algebra del *Manuale*, ma le dimostrazioni dei problemi non sono date. Da un punto di vista metodologico, l'esposizione di al-Karāḡī presenta dei grandi vantaggi. In al-Khwarizmī e Abū Kāmil, gli elementi del calcolo algebrico sono incorporati nella soluzione delle forme canoniche e vengono completati soltanto al bisogno. Invece al-Karāḡī raccoglie tutti questi elementi prima della soluzione propriamente detta delle equazioni e dei problemi.

⁵Allo stesso tempo, a Ghaznī, al-Bīrūnī trattava ampiamente questo stesso problema.

⁶Qui al-Karāḡī utilizza correttamente la regola che consente di calcolare il diametro del cerchio, data l'altezza e la base di un segmento qualunque.

⁷Questo problema si riduce ad un'equazione di primo grado.

Egli spiega sistematicamente le operazioni fondamentali utilizzando monomi e polinomi e anche quantità irrazionali, cita le identità più importanti, indica come si ottiene la somma di una progressione aritmetica ed espone nel penultimo capitolo il metodo di risoluzione delle sei forme di equazioni, basandosi per le equazioni di secondo grado sugli esempi di al-Khwarizmī. Il capitolo 70 include una serie di problemi.

2.1.2 L'*Al-Fabrī*

Il *Manuale* è una sorta d'introduzione ad una vasta opera di al-Karāḡī sull'algebra, scritta intorno al 1010, che porta il titolo di *Al-Fabrī*, in omaggio al visir di Baghdād Fahr-al-Mulk, a cui è dedicata.

L'*Al-Fabrī* è costituito da una prefazione e da due parti: la prima, divisa in 15 capitoli, è dedicata a considerazioni teoriche illustrate da esempi. In quest'opera, al-Karāḡī riprende tutti gli elementi essenziali dell'*Algebra* di Abū Kāmil, ma aggiunge in diversi punti, sia nella parte teorica sia nei problemi, nuovi elementi che si rifanno in particolare all'*Aritmetica* di Diofanto⁸.

La prefazione dell'*Al-Fabrī* definisce di passaggio lo scopo della scienza del calcolo, cioè la determinazione delle quantità incognite mediante le quantità note, utilizzando i metodi più opportuni. A questo servono le regole dell'algebra, che presentano un carattere di generalità e di efficienza.

Rifacendosi a Diofanto, Al-Karāḡī spiega la formazione delle diverse potenze delle incognite, chiamando la quinta potenza “quadrato-cubo” come l'autore greco. Dopo essersi spinto fino al “cubo-cubo-cubo”, al-Karāḡī sottolinea come si possa continuare all'infinito questa serie di potenze che corrisponde ad una catena di proporzioni che oggi scriveremmo nella forma:

$$1 : x = x : x^2 = x^2 : x^3 = x^3 : x^4 = \dots$$

A questa serie di potenze si aggiunge, come in Diofanto (che comunque non andava oltre la sesta potenza), la serie delle “parti”, vale a dire la serie delle potenze reciproche delle incognite, legate tra loro dalle proporzioni:

$$\frac{1}{x} : \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} : \frac{1}{x^3} = \frac{1}{x^3} : \frac{1}{x^4} = \dots$$

La “parte” di un numero è definita come ciò che moltiplicato per tale numero dà l'unità.

⁸Nell'*Al-Fabrī* al-Karāḡī riprende gran parte dei problemi dell'*Aritmetica* di Diofanto: quasi metà dei problemi del Libro I, molti problemi del Libro II, quasi tutti i problemi del Libro III e del libro IV.

L'insieme delle diverse regole “necessarie per le operazioni algebriche” e i teoremi “utili per risolvere le difficoltà” sono molto più numerosi e più sistematici rispetto alle opere di Abū Kāmil. Al-Karāḡī fornisce non solo le formule per ottenere il quadrato della somma o della differenza di un binomio e il cubo di una somma, ma dopo aver considerato le identità della forma:

$$\frac{1}{2} \left[\frac{a^2 - b^2}{a - b} + (a - b) \right] = a, \quad \frac{1}{2} \left[\frac{a^2 - b^2}{a - b} - (a - b) \right] = b,$$

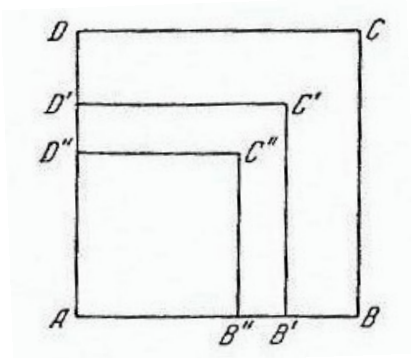
procede anche con la somma di qualche progressione aritmetica. Oltre a queste serie, nel suo trattato si trovano pure le regole per calcolare la somma dei primi n numeri naturali, la somma dei loro quadrati e dei loro cubi⁹:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \left(\sum_{k=1}^n k \right) \cdot \left(\frac{2n+1}{3} \right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Al-Karāḡī dà una dimostrazione semplice ed elegante per la somma dei cubi, sia di carattere geometrico sia di carattere algebrico.



Sia $1 + 2 + \dots + n$ il lato di un quadrato $ABCD$; al-Karāḡī pone $n = 10$. Egli costruisce su questo quadrato uno gnomone $BB'C'D'DC$ nel quale $BB' = n$. L'area

⁹Al-Daffa' (1978), p. 45.

dello gnomone è allora uguale a:

$$2n(1 + 2 + \dots + n) - n^2 = 2n \frac{n(n+1)}{2} - n^2 = n^3.$$

Egli costruisce poi sul quadrato $AB'C'D'$ lo gnomone $B'B''C''D''D'C'$ dove $B'B'' = n - 1$. La superficie dello gnomone sarà $(n - 1)^3$. Continuando in questo modo, egli ottiene finalmente un quadrato di lato 1, nel quale, come si vede, la superficie del quadrato originale è composta dalla superficie di tutti gli gnomoni e dal quadrato $1^2 = 1^3$, tale da ottenere:

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2.$$

Inoltre, al-Karāḡī dà la somma di qualche altra serie legata direttamente alle precedenti, come per esempio:

$$\sum_{k=1}^{n-1} k \cdot (k+1) = \left(\sum_{k=1}^{n-1} k \right) \cdot \left(\frac{2n}{3} + \frac{2}{3} \right),$$

$$\sum_{k=1}^{n-2} k \cdot (k+1) \cdot (k+2) = \sum_{k=1}^{n-1} k^3 - \sum_{k=1}^{n-1} k = \left(\sum_{k=1}^{n-1} k \right)^2 - \sum_{k=1}^{n-1} k.$$

Quest'ultima serie è basata sull'identità:

$$(k-1)k(k+1) = k^3 - k.$$

La teoria delle equazioni di secondo grado di al-Karāḡī è strettamente legata a quella di Abū Kāmil; è così per esempio che egli determina le regole per calcolare x e x^2 . Tuttavia, anche in questo caso, troviamo alcuni elementi nuovi nell'*Al-Fabrī*. Infatti, oltre al metodo geometrico che consente di trovare la formula per determinare le radici, al-Karāḡī fornisce un metodo puramente aritmetico che consiste nel “completare il quadrato”, senza far riferimento ai corrispondenti teoremi del Libro II degli *Elementi*.

Dal momento che il coefficiente del termine di grado massimo è spesso diverso da 1, proprio come negli esempi ispirati a Diofanto, al-Karāḡī fornisce delle regole appropriate che rendono inutile una trasformazione preliminare alle forme canoniche di al-Khwarizmī.

Notiamo, in particolare, che fu al-Karāḡī il primo ad intraprendere lo studio sistematico delle equazioni trinomie che sono di secondo grado rispetto ad una potenza qualunque dell'incognita oppure delle equazioni che si possono ricondurre a questa

forma, una volta divise per un'opportuna potenza dell'incognita; vale a dire le equazioni della forma:

$$ax^{2n} + bx^n = c, \quad ax^{2n} + c = bx^n, \quad bx^n + c = ax^{2n}$$

e

$$ax^{2n+m} = bx^{n+m} + cx^m.$$

Al-Karāḡī enuncia delle regole per calcolare x^n e studia degli esempi di equazioni di quarto, sesto e di settimo grado (applicando l'ultimo metodo citato). È evidente che la soluzione $x = 0$ non viene presa in considerazione.

Alla fine della prima parte, al-Karāḡī spiega quali sono le trasformazioni da effettuare per eliminare le quantità irrazionali di secondo grado che compaiono al denominatore. Per esempio, si deve trovare un numero che, moltiplicato per $(3 + \sqrt{5})$, dia 1; questo problema si riduce alla risoluzione di un'equazione di secondo grado.

I cinque capitoli della seconda parte dell'*Al-Fabrī* costituiscono una vasta raccolta di problemi d'algebra e di teoria dei numeri; essi contengono più di 250 problemi.

2.1.3 L'*Al-Badī*

Un'altra opera di al-Karāḡī sull'algebra e sull'analisi indeterminata, la *Magnifica aritmetica (Al-Badī'fī-l-hisāb)*, ritrovata da G. Levi della Vida¹⁰, è stata pubblicata recentemente in arabo¹¹.

Quest'opera contiene un'esposizione puramente aritmetica o algebrica di molti problemi che sono trattati tradizionalmente in modo geometrico, alla maniera di Euclide. Una sezione di questo libro è dedicata alla teoria delle quantità irrazionali di secondo grado che l'autore considera come delle quantità numeriche.

In questo trattato d'algebra, al-Karāḡī riprende la sistemazione degli esponenti algebrici per poi estendere alle espressioni algebriche le operazioni aritmetiche, dando una prima esposizione dell'algebra dei polinomi. Tutto ciò, com'è ovvio, è entrato integralmente nella presentazione dell'algebra elementare. Queste regole furono poi lette dai successori di al-Karāḡī nella loro generalità, tanto che al-Samaw'al¹² per la prima

¹⁰Si può consultare il suo articolo: *Appunti e quesiti di storia letteraria araba. IV. Due nuove opere del matematico al-Karāḡī*, Rivista degli studi orientali, XIV, n°3, 1933.

¹¹A. Anbuba, *l'algebra al-Badī' di al-Karāḡī*, Beyrouth, 1964, introduzione in francese.

¹²Il principale successore di al-Karāḡī fu al-Samaw'al (XII secolo), figlio di un erudito ebreo, emigrato dal Marocco e stabilito a Baghdad, e di una letterata originaria dell'Iraq. Egli fu filosofo, medico e matematico, profondo conoscitore sia delle opere greche che indiane. Scrisse, all'età di soli 19 anni, il *Libro luminoso sull'aritmetica* in cui sintetizzava e raggruppava tutti i risultati ottenuti fino ad allora, in particolare quelli dovuti ad al-Karāḡī.

volta nella storia arriverà a scrivere:

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n} \quad \text{con } m, n \in \mathbb{Z}.$$

L'applicazione delle regole aritmetiche ad espressioni algebriche avviene con gradualità, passando prima per i monomi per arrivare poi ai polinomi. Le operazioni di addizione, di sottrazione e di moltiplicazione sono ottenute nella loro forma generale; non così per le operazioni di divisione e di radice. Per la divisione, egli considera solo quella tra due monomi e di un polinomio per un monomio.

Per l'estrazione di radice quadrata di un polinomio, al-Karāḡī presenta un metodo generale solo nel caso in cui i coefficienti siano positivi, che consiste nel dare il seguente sviluppo secondo la forma:

$$(x + y + z)^2 = x^2 + 2xy + (y^2 + 2xz) + 2yz + z^2$$

che sarà considerata l'espressione "canonica" del quadrato di un trinomio.

Ribalta, quindi, il problema: vuole determinare la radice quadrata di un polinomio a cinque termini, espresso secondo la forma canonica, indicando due metodi¹³.

- **METODO 1.** Si considera la somma delle radici quadrate dei due termini estremi ed il quoziente del secondo termine per il doppio della radice quadrata del primo termine oppure il quoziente del quarto termine per il doppio della radice quadrata dell'ultimo. Così, se abbiamo il seguente polinomio $x^6 + 4x^5 + (4x^4 + 6x^3) + 12x^2 + 9$, prendiamo $\sqrt{x^6} = x^3$, $\sqrt{9} = 3$ e $\frac{4x^5}{2x^3} = 2x^2$ oppure $\frac{12x^2}{2 \cdot 3} = 2x^2$. Allora la radice quadrata del polinomio è $x^3 + 2x^2 + 3$.
- **METODO 2.** Dal terzo termine si sottrae il doppio del prodotto della radice quadrata del primo termine per la radice quadrata dell'ultimo, per poi sommare alla radice quadrata del risultato la radice dei termini estremi. Così, nel polinomio $x^8 + 2x^6 + 11x^4 + 10x^2 + 25$, consideriamo $11x^4 - 2x^4 \cdot 5 = x^4$, la cui radice è x^2 , $\sqrt{x^8} = x^4$, $\sqrt{25} = 5$, per cui $x^4 + x^2 + 5$ è la radice quadrata del polinomio dato.

2.2 Il calcolo dei radicali

Sia al-Karāḡī sia, dopo di lui, al-Samaw'al pongono il problema di estendere le operazioni aritmetiche anche a quantità algebriche irrazionali, ottenendo risultati po-

¹³Galuzzi, Maierù, Santoro (2010).

sitivi senza giungere a caratterizzare cosa sia un numero reale, quanto esclusivamente basandosi sul libro VII e sul libro X degli *Elementi*, dove sono presentati i rapporti irrazionali.

In forza del fatto che le quantità algebriche si riferiscono a numeri e a segmenti, le operazioni algebriche possono riferirsi a quantità aritmetiche o geometriche, per cui l'incognita può essere irrazionale o razionale, senza, però, porsi alcun problema sulla costituzione e sulla natura dei numeri reali. La conseguenza immediata di ciò è la lettura, in chiave algebrica, del libro X degli *Elementi*, in cui il termine “grandezza” è interpretato da al-Karaḡī sia in senso geometrico che numerico, tanto da affermare:

Dico che i monomi sono infiniti; il primo è assolutamente razionale, per esempio 5, il secondo è razionale in potenza, come $\sqrt{10}$, il terzo è definito in rapporto al suo cubo, come $\sqrt[3]{20}$, il quarto è la mediale definita in rapporto al suo biquadrato, come $\sqrt{\sqrt{10}}$ per esempio, la quinta è la radice sesta, poi la radice nona, e così all'infinito¹⁴.

Da qui si evince che, non solo i monomi sono infiniti, ma lo sono anche i binomi, i trinomi,

Al-Karaḡī sviluppa così il calcolo dei radicali ed illustra le regole necessarie per i monomi e i polinomi, considerando gli indici delle radici strettamente positivi. Egli considera esempi del tipo:

$$x \sqrt[y]{y} \quad \sqrt[x]{x} \cdot \sqrt[y]{y} \quad \sqrt[x]{x} \pm \sqrt[y]{y} \quad \sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{y}}.$$

Queste operazioni, nello spirito di ciò che sta facendo al-Karaḡī, sono la premessa alla trattazione delle equazioni algebriche.

2.3 Il principio d'induzione

Nei suoi trattati al-Karaḡī utilizza una sorta di principio d'induzione, anche se non ne dà un'esposizione rigorosa. Sostanzialmente, egli dimostra una certa proposizione per $n = 1$, poi prova il caso $n = 2$ basandosi sul risultato precedente, poi dimostra il caso $n = 3$ basandosi sul caso $n = 2$, e procede in questo modo fino ad $n = 5$ per poi concludere che si può continuare questo processo indefinitamente. In questo modo di ragionare si può quindi intravedere quello che oggi noi chiamiamo principio d'induzione.

¹⁴ *Al-Badī*, p. 29 del testo arabo, ripreso da Rashed (1996).

Un passo ulteriore è compiuto da al-Karāğī nel momento in cui legge i *Libri aritmetici* di Diofanto in chiave algebrica, tenendo conto che ormai dispone di strumenti di calcolo che gli consentono di tradurre l'analisi indeterminata nell'algebra indeterminata. Al-Karāğī precisa che problemi di questo genere hanno un'infinità di soluzioni.

Nel suo elenco vi sono problemi presi direttamente dai *Libri aritmetici* ed altri redatti da lui sullo stile di quelli di Diofanto. Questi sono alcuni esempi:

1. equazioni ad una sola incognita, del tipo

$$\begin{array}{lll} ax^2 = u^2 & ax^2 - bx = u^2 & ax^2 + bx = u^2 \\ ax^2 + b = u^2 & ax^2 + bx + c = u^2 & ax^3 + bx^2 = u^2 \end{array}$$

che sono facilmente generalizzate negli esponenti $2n$, $2n - 1$, $2n - 2$, dove $n = 1, 2, 3, \dots$;

2. equazioni a due incognite, della forma $x^2 + y^2 = u^2$, $x^3 \pm y^3 = u^2$;

3. equazioni a tre incognite, come $x^2 + y^2 + z^2 \pm (x + y + z) = u^2$.

Queste equazioni si combinano tra loro, ottenendo sistemi di due equazioni in una, in due e in tre incognite, sistemi di tre equazioni in tre incognite,

Si ha l'impressione che egli si preoccupi di trovare metodi risolutivi delle equazioni sempre più generali, individuando i diversi casi in cui considerare quali siano le condizioni per ottenere le soluzioni.

L'opera di al-Karāğī si può racchiudere nell'aver esteso le operazioni aritmetiche all'algebra ed averne visto come ciò possa essere utile nella soluzione di problemi di stile diofanteo per mezzo di radicali, in modo tale che l'algebra acquisti una solida struttura e possa cominciare ad essere considerata strumento idoneo per la soluzione di problemi matematici.

Lo stile adottato da al-Karāğī può essere classificato come un tentativo di trovare "soluzioni per radicali" alle equazioni, dove con questi termini, che diventeranno gradualmente di uso comune per tanti secoli, si indica che le soluzioni sono trovate esclusivamente servendosi delle quattro operazioni e dell'estrazione delle radici e si arriva ad avere una "formula risolutiva" per le stesse equazioni¹⁷.

¹⁷Galuzzi, Maierù, Santoro (2010), pp. 65-67.

2.5 La controversia sulla matematica indiana

Dal momento che al-Karađi non utilizzò le cifre arabe in alcuna delle sue due opere e che invece si ispirò molto all'*Aritmetica* di Diofanto, qualche storico della scienza ne ha dedotto che al-Karađi rifiutò la matematica indiana e che all'epoca vi fosse un vivace dibattito che contrapponeva due diverse scuole di pensiero: una a favore delle scienze indiane e l'altra a favore delle scienze greche.

Gli storici non negano che la scienza indiana abbia esercitato una certa influenza sugli stessi difensori della matematica greca. In al-Karađi, ci sono molti elementi che sono d'origine sia indiana sia greca, come pure numerose tradizioni e concetti antichi che all'epoca erano diventati parte integrante della scienza nei paesi islamici. In ogni caso è difficile stimare il giusto valore dell'importanza di tutte queste differenti componenti ed è chiaro che la preferenza di uno studioso verso la letteratura greca o indiana si riflette poi sulla sua stessa opera.

Per quanto riguarda la scrittura dei numeri, non c'è alcuna ragione di credere che esistessero due scuole scientifiche in contrasto tra loro. Sottolineiamo che proprio uno dei più accaniti sostenitori dell'utilizzo delle cifre indiane, ovvero al-Khwarizmī, ne ha fatto un uso piuttosto limitato nella sua stessa *Algebra*. La rappresentazione dei numeri in lettere, utilizzata per secoli in molte opere, trova un'ampia giustificazione nelle capacità e nelle esigenze tradizionali dell'uomo a cui questi testi sono indirizzati. Da allora queste capacità e questi bisogni si sono evoluti lentamente soltanto nel Medioevo¹⁸.

¹⁸Youschkevitch (1976).

Bibliografia

Al-Daffa' A. A., 1978, *The muslim contribution to mathematics*, London, Croom Helm.

Boyer C. B., 1980, *Storia della matematica*, Milano, Mondadori.

Galuzzi M., Maierù L., Santoro N., 2010, *La nascita dell'algebra e la riflessione dei matematici arabi*, Roma, Aracne.

Karpinski L. C., 1914, *The Algebra of Abu Kamil*, in *American Mathematical Monthly*, **21** (2), pp. 37-48.

Kline M., 1972, *Storia del pensiero matematico. Dall'antichità al Settecento*, Vol. II, Torino, Einaudi.

Levey M. (a cura di), 1966, *The Algebra of Abu Kamil. Kitab fi al-Jabr wa'l-muqabala*, Madison, University of Wisconsin Press.

Meskens A., 2010, *Travelling Mathematics - The fate of Diophantos' Arithmetic*, Netherlands, Birkhäuser.

Rashed R., Morelon R., 1996, *Encyclopedia of the History of Arabic Science. Mathematics and the physical sciences*, Vol. II, London and New York, Routledge.

Rashed R., 2011, *D'al-Khwarizmi à Descartes. Études sur l'histoire des mathématiques classiques*, Paris, Hermann.

Sarton G., 1947, *Introduction to the History of Science*, Vol. III, Baltimora, Carnegie Institution of Washington.

Youshkevitch A. P., 1976, *Les mathématiques arabes: VIII-XV siècles*, Paris, Ed. Vrin, pp. 52-66.

Sitografia

<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies>

MacTutor History of Mathematics archive è un sito creato da J. O'Connor e E. Robertson (University of St. Andrews, Scozia) che raccoglie le biografie di migliaia di protagonisti della storia della matematica, dall'antichità all'età contemporanea.

<https://web.math.unifi.it/archimede/islam/>

Sito del Giardino di Archimede, dedicato alla divulgazione della matematica. Si è visionata la mostra virtuale sull'algebra nel mondo islamico, curata da Clara Silvia Roero, con particolare riguardo verso la scheda su Abu Kamil e l'indirizzo aritmetico-algebrico.

<http://gallica.bnf.fr/html/und/livres/livres>

Gallica è il progetto di biblioteca digitale gestito dalla Biblioteca Nazionale Francese, che permette l'accesso a circa 3.000 periodici e a oltre 4.000 manoscritti, in versione digitalizzata.

<https://books.google.it/>

Google Libri è lo strumento sviluppato da *Google* che consente la ricerca di libri antichi oppure in commercio, in formato digitale.

<http://www.maa.org/book/export/html/>

Sito della *Mathematical Association of America* da cui sono stati scaricati alcuni articoli d'archivio.

<http://culturemath.ens.fr/video/html/>

Sito sull'algebra araba in cui sono riprodotte e commentate diverse iconografie tratte dalle opere classiche e medievali.

https://it.wikipedia.org/wiki/Pagina_principale

Wikipedia è un'enciclopedia online, a contenuto libero, da cui sono state tratte alcune note biografiche e storiche.

<http://www.muslimheritage.com/article/muhammad-al-karaji>

Sito dedicato alla storia delle scienze e delle tecnologie del mondo musulmano.

<http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html>

Versione digitalizzata degli *Elementi* di Euclide, a cura del Dipartimento di Matematica e Informatica della Clark University (Worcester).