Università degli studi di Ferrara
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Divulgazione e Museologia della Matematica
Prof.ssa Alessandra Fiocca
anno accademico 2015-2016

Niccolò Tartaglia

Elisa Agostini
14 Giugno 2016

Indice

1 Uno sguardo alla vita del Tartaglia

Figura 1: Niccolò Tartaglia

La più recente biografia del Tartaglia è quella scritta da Gabrieli (1997). Niccolò Fontana, altrimenti noto come Tartaglia, nacque intorno al 1499 a Brescia e morì il 13 dicembre 1557 a Venezia. Niccolò fu orfano di padre, un corriere a cavallo, al servizio del governo della città, a sei anni; tale evento lasciò la famiglia in totale povertà. Nel 1512 l'esercito francese, deciso a riconquistare Brescia, mise in atto una sanguinosa campagna contro la città e i paesi vicini. Nel corso degli attacchi Niccolò, rifugiatosi con le sorelle e la madre nella cattedrale, fu raggiunto da un soldato francese che lo colpì con la spada, provocandogli una profondissima ferita alla mascella e al palato. Guedj (2000), nel suo racconto, fa corrispondere quanto effettivamente successe nel "Sacco di Brescia":

> *La grande chiesa di Brescia non ha mai conosciuto una simile affluenza, ma le persone che vi si affollano non sono fedeli intervenuti per una cerimonia religiosa. Decine di donne e bambini, accalcati, tremano nell'attesa, pieni di speranza; neppure lì, nella casa di Dio, sono al sicuro. Niccolò, la madre, il fratello e la sorella sono addossati a una colonna. Tutti tengono lo sguardo fisso sul grande portale della chiesa. Fuori, i rumori diventano sempre più forti, sempre più vicini; dentro, il silenzio è impressionante. Tutti trattengono in fiato, i corpi sono come impietriti. È la mattina del 19 febbraio 1512. Con uno schianto terribile, il portaleviene abbattuto e dal varco dilaga all'interno una massa di uomini armati che, brandendo la spada, lanciano le loro cavalcature all'interno della chiesa. I cavalli, emettendo nitriti terrificanti, si avventano contro quella massa umana che urla di terrore. Sono tutti fermi, in piedi, non possono fuggire, schiacciati, soffocati, bersagliati di colpi. Ma l'orrore deve ancora cominciare: gli uomini armati menano fendenti terribili sui corpi indifesi. Come sfuggire? Niccolò vede l'enorme spada diventare sempre più grande.. poi non vede più nulla. La madre, però, rimane illesa. Vittoria! Le truppe francesi si sono appena impadronite di quella cittadina dell'Italia settentrionale, assassinando, stuprando, rubando, bruciando. Sono guidate da un uomo giovane e attraente di appena ventidue anni, il terribile Gaston de Foix, che morirà cinquantasette giorni dopo, nella battaglia di Ravenna, col viso trafitto da quindici colpi di lancia.*

Niccolò evitò la morte, ma il colpo sofferto lo costrinse per tutta la vita a parlare in maniera estremamente difficoltosa e, in seguito, a portare la barba per nascondere le sue ferite. Proprio per questo gli venne dato il soprannome di Tartaglia, che egli stesso fece suo.

La società del XVI secolo non conosceva ancora l'istruzione pubblica gratuita e coloro che erano dotati di particolari capacità intellettuali, dovevano sostenere la spesa per le lezioni. Niccolò andò soltanto per 15 giorni, all'età di 14 anni, a una "*scuola di scrivere*", per imparare a scrivere l'alfabeto, ma arrivato alla lettera "k", la dovette abbandonare, non potendo continuare a pagare il maestro. Fu quindi essenzialmente un autodidatta, e come tale iniziò a studiare le scienze matematiche, come egli stesso riferisce nella sua ultima opera[1].

Intorno al 1518 si trasferì a Verona dove formò una famiglia con cui visse nella contrada di S. Maria Antica. In realtà il Tartaglia, pur ricordando spesso la sua famiglia nei suoi brani autobiografici, non parla della sua paternità, così come non accenna al suo matrimonio. Nell'Archivio di Stato di Verona sono però conservati due libretti anagrafici del 1529 i quali illustrano il nucleo familiare composto da Tartaglia e da quattro donne: la moglie Domenica, la figlia carnale Margherita, la figliastra Benvenuta e Anna, figlia di quest'ultima.

Tartaglia visse il periodo veronese, che si concluse nel 1534 con il suo trasferimento a Venezia, tenendo lezioni pubbliche e private, consultato come esperto di calcoli, di cambi, di misurazioni, di valute e di altri svariati problemi sia teorici che pratici. Il Registro dell'estimo dell'anno 1531, conservato nell'Archivio di Stato di Verona, prova che il Consiglio Comunale versava per lo stipendio di Tartaglia come maestro d'abaco, il compenso di 8 lire (libre) veronesi al mese.

Altre testimonianze dell'attività del matematico bresciano nel periodo della sua permanenza veronese si ritrovano nei suoi scritti ed in altri documenti pubblici. Si racconta lo studio del numero dei casi possibili nel gioco dei dadi, la controversia tra mercanti di preziosi ma soprattutto il primo approccio con le equazioni di terzo grado, la cui soluzione costituirà uno dei suoi grandi meriti.

I primi 17 quesiti del Libro nono di *Quesiti et inventioni diverse* furono proposti al Tartaglia dal 1521 al 1533 a Verona.

Con il desiderio di dare alle stampe qualche suo lavoro di matematica, nel 1534 Tartaglia si trasferì nella città lagunare "*in le case nove di San Salvatore*" dove si fermò fino alla morte, con una drammatica parentesi bresciana, durata dal marzo 1548 all'ottobre 1549. Venezia, nella sua strategica posizione, era crocevia del flusso commerciale nonché il maggior centro tipografico d'Italia.

Anche in questa città Tartaglia mantenne l'attività di lettore pubblico e privato di matematica. Tartaglia ebbe inoltre l'opportunità di accrescere la sua fama di matematico di successo attraverso la fitta corrispondenza con i maestri d'abaco[2], matematici e

[1] *Il General Trattato,* parte seconda (GT2) f. *27*

[2] Le cosiddette "botteghe d'abaco" erano luoghi adibiti alla formazione di mercanti, architetti, ingegneri, militari e artigiani. I ragazzi all'età di circa 10 anni si rivolgevano ai "maestri d'abaco" per

in generale persone influenti che proponevano spesso problemi di vario genere. Acquistò reputazione come un promettente matematico partecipando con successo a un gran numero di dibattiti pubblici[3].

I quesiti che vanno dal XVIII al XLII che si trovano nel Libro nono di *Quesiti et inventioni diverse* furono proposti al Tartaglia dal 1534 al 1541 a Venezia.

L'argomento riguardante le equazioni di terzo grado era difficile da affrontare per il fatto che autorevoli matematici anteriori, quali Luca Pacioli, affermarono l'impossibilità di risolvere le equazioni di terzo grado del tipo[4]:

$$x^3 + px = q, \qquad x^3 + q = px, \qquad x^3 = px + q.$$

Il professore di matematica Scipione dal Ferro ($1465 - 1526$) dell'Università di Bologna, intorno al 1515, risulta avesse trovato un modo per risolvere $x^3 + px = q$, decise però di non divulgare tale scoperta. Dopo circa vent'anni Tartaglia ebbe il sospetto che qualcuno avesse ottenuto qualche risultato e perciò fu mosso dall'intenzione di determinare una tecnica di risoluzione. Il matematico bresciano fu contattato da Antonio Maria Fior, studente di Scipione del Ferro, il quale, vantandosi di essere in grado di risolvere questo genere di problemi; nacque così una disputa tra Tartaglia e Fior che sfociò in una disfida matematica organizzata nel 1534. Fior propose a Tartaglia trenta problemi tutti risolvibili con equazioni della forma $x^3 + px = q$, nella convinzione che non potesse essere capace di determinare una soluzione. Tartaglia, tuttavia, essendo in possesso della regola generale, risolvette tutti i problemi nel termine di due ore, da ciò ne ricavò onore e gloria.

Girolamo Cardano ($1501 - 1576$) riteneva, con il sostegno delle affermazioni di Luca Pacioli nella *Summa*, che soluzioni per queste equazioni fossero impossibili. Fu quindi naturale che si incuriosisse alle voci che Tartaglia aveva trovato un metodo generale per trattarle; cominciò così a lavorare per cercare di scoprire il metodo di Tartaglia, ma senza successo. Alcuni anni più tardi, nel 1539 egli contattò Tartaglia, dapprima attraverso un intermediario, poi personalmente, intenzionato ad ottenere la formula

imparare a padroneggiare le operazioni fondamentali, le più diffuse tecniche di calcolo commerciale, la geometria pratica e i rudimenti dell'algebra. L'impostazione dei "trattati d'abaco", testimoni sopravvissuti fino ai nostri giorni di questo ambiente, riflette il tipo di insegnamento impartito che era basato su un metodo mnemonico-operativo piuttosto che logico-deduttivo.

[3]Nel Cinquecento, in Italia, i matematici si affrontavano in pubblici duelli, davanti a folle di spettatori, sfidandosi a risolvere problemi complessi. Dalla vittoria o dalla sconfitta dipendeva la successiva fortuna personale e scientifica dei due avversari. Ognuno dei contendenti proponeva all'avversario un numero stabilito di problemi di vario genere, generalmente 30. I problemi, risolti in un periodo di tempo preventivamente stabilito, venivano depositati presso una persona influente, scelta di comune accordo tra i contendenti. I giudici scelti dichiaravano il vincitore della disfida colui che riusciva a risolvere i problemi dell'avversario senza errori e nel tempo concordato.

[4]Nel XV secolo, si faceva distinzione tra vari tipi di equazioni di terzo grado, perché si ammettevano come coefficienti soltanto numeri strettamente positivi.

risolutiva dell'equazione generale di terzo grado. Tartaglia rifiutò, in maniera anche offensiva, questa richiesta, esponendo le sue intenzioni di pubblicare la formula in un suo libro che aveva intenzione di scrivere.

Quando però il medico milanese invitò Niccolò a Milano, promettendo di organizzare un incontro col marchese del Vasto Alfonso d'Avolos, il matematico bresciano accettò di incontrarlo, nel timore di recare offesa al mecenate e con la speranza di poter dare una svolta alla propria vita. A Milano tuttavia non incontrò alcun marchese e, dopo molte persuasioni, acconsentì a svelare il suo metodo a Cardano con la condizione che quest'ultimo non lo pubblicasse e lo tenesse per sé. Niccolò rivelò la sua formula in versi, per aiutare a proteggere il segreto nel caso in cui il foglio fosse caduto nelle mani sbagliate.

Cardano mantenne la promessa di tenere segreto il metodo di Tartaglia fino a quando, con il suo studente Ludovico Ferrari ($1522 - 1565$), scoprì a Bologna che Scipione dal Ferro, e non Tartaglia, fu il primo ad aver trovato la formula risolutiva delle equazioni di terzo grado anni prima.

Il medico milanese, sebbene avesse giurato di non rivelare il metodo di Tartaglia, si decise a pubblicarla non sentendosi più tenuto a non pubblicare ciò che altri, prima di Niccolò, avevano scoperto. Nel 1545 dunque Cardano pubblicò l'*Ars magna* contenente le soluzioni per le cubiche e le equazioni quartiche e tutto il lavoro addizionale che egli aveva completato dalla formula di Tartaglia.

Tartaglia, quando lo scoprì, divenne furibondo per il fatto che Cardano avesse ignorato il suo giuramento. L'anno seguente Tartaglia pubblicò i *Quesiti* in cui esponeva anche la sua posizione nella storia e la sua convinzione che il milanese avesse agito in cattiva fede.

Ferrari intervenne prendendo le difese di Cardano e invitò Tartaglia a un confronto pubblico nello stile di quello già tenuto con Fior. Tartaglia rifiutò, perché voleva confrontarsi con Cardano, sia per motivi di rancore, sia per il fatto che era una figura molto influente nel mondo matematico, medico e letterario. Niccolò fu poi convinto ad accettare da una lettera giuntagli da Brescia nel 1548 da parte di Giacomo Aleni, un gentiluomo col quale aveva fatto conoscenza tramite un comune amico, Marcantonio Valgolio. In questa si affermava che gli sarebbe stato offerto un posto di lettorato nella sua città natale, a patto che lui mostrasse la sua bravura nella sfida con Ferrari. La disputa ebbe luogo nella chiesa dei Frati Zoccolanti il 10 agosto 1548 e vide a confronto Tartaglia e il matematico Lodovico Ferrari, autore di sei *Cartelli* ($1547 - 1548$) che stimolarono altrettante *Risposte* da parte del matematico bresciano[5].

Tuttavia, il dibattito non ebbe per Tartaglia esito favorevole, al punto che egli decise di fuggire da Milano quella notte stessa per tornare a Brescia, dove rimase per un anno a

[5] *Risposte a Lodovico Ferrari*, Venezia 1547 $[1 - 4]$ e Brescia 1548 $[5 - 6]$

lavorare, senza ricevere infine alcun pagamento. Tartaglia si rivolse al Podestà di Brescia affinché l'Aleni pagasse quanto pattuito, ossia uno stipendio annuo di 200 scudi d'oro per una lezione pubblica al giorno sugli *Elementi*. L'Aleni, avvalendosi dei suoi privilegi, fu assolto e Tartaglia, ormai povero, tornò a Venezia, dove riprese il lavoro di insegnante e rimase fino alla fine della sua vita.

La scoperta del metodo di risoluzione delle equazioni di terzo grado[6] non è però l'unico contributo che Tartaglia diede alla matematica. Prima che fosse coinvolto nelle discussioni sull'equazione cubica, nel 1537 pubblicò la *Nova Scientia*, trattato riguardante le discipline matematiche applicate all'arte militare: nel lavoro egli descrisse la fondazione scientifica della balistica, la misura dei calibri, il rilevamento territoriale, nuovi metodi e strumenti balistici includendo il primo tavolo da fuoco.

Stampò inoltre edizioni latine di alcune opere di Archimede avvalendosi della traduzione latina da parte di Guglielmo di Moerbeke (XIII secolo), a Tartaglia si deve inoltre la prima traduzione commentata degli *Elementi* di Euclide (1543).

Morì il 13 dicembre 1557 e venne sepolto, come era suo desiderio, nella chiesa di S. Silvestro. Curzio Troiano, editore delle ultime opere del matematico bresciano, si apprestò a trasportare a casa sua tutto il patrimonio bibliografico del quale era in parte beneficiario. Questo fatto è testimoniato dal fatto che Notaio Rocco di Benedetti iniziò a redigere a casa di Curzio Troiano l'inventario dei libri, tre giorni dopo la morte di Tartaglia, mentre nel testamento appare che il patrimonio si trovava nell'abitazione del matematico il 10 dicembre. Nell'inventario sono menzionate solo una lista di oggetti privi di valore a dimostrare la solitudine di un uomo ingegnoso che visse una vita sfortunata e difficile. L'eredità che lasciò Tartaglia consiste di potenti stimoli volti ad affrontare successive indagini algebriche e in generale a superare i confini della matematica greca.

2 Uno sguardo alle opere del Tartaglia

Una delle competenze che Tartaglia coltivò con maggior tenacia fu quella di avvalersi dell'allora recentemente inventata arte tipografica a caratteri mobili per far conoscere opere scientifiche classiche e anche diversi suoi scritti originali, divenendo uno dei più influenti intellettuali e formatori scientifici rinascimentali.
Le edizioni originali delle opere di Tartaglia (presenti nella Biblioteca di storia della scienza Carlo Viganò, situata nella sede di Brescia dell'Università cattolica del Sacro Cuore) sono reperibili, in riproduzioni digitali effettuate a cura di P. Pizzamiglio, nella Edizione nazionale Mathematica italiana, all'interno del sito Internet del Centro di ri-

[6] che porta ora, per appunto, il nome di "formula di Cardano-Tartaglia"

cerca matematica Ennio De Giorgi della Scuola normale superiore di Pisa all'indirizzo http://mathematica.sns.i t/search.html?search=tartaglia.

La Nova Scientia (1537)	Venezia, tip. Stefano Nicolini da Sabbio, ed. N. Tartaglia È divisa in tre libri e tratta specialmente di balistica esterna; viene generalmente giudicata come la prima opera che tenti una trattazione matematica del moto dei proiettili. Venne riedita a Venezia nel 1550 con una *Gionta* al libro III e ancora, postuma, nel 1558 e nel 1583 e conobbe anche traduzioni in varie lingue europee.
Euclide Megarense (1543)	Venezia, tip. Venturino Ruffinelli, ed. Guglielmo di Montefeltro – Pietro Facolo Prima versione degli *Elementi* di Euclide (sec. IV-III a.C) che sia stata pubblicata, non solo in lingua italiana, ma in una lingua europea moderna. Nell'opera sono interessanti l'introduzione del traduttore, sotto forma di dedicatoria, e i numerosi suoi commenti. Questa si basava sia sulla traduzione latina dall'arabo del Campano, sia sulla traduzione latina dal greco dello Zamberti.
Opera Archimedis (1543)	L'opera si avvale della traduzione latina eseguita da Guglielmo di Moerbeke nel XIII secolo. È la seconda edizione di opere di Archimede, la prima fu fatta da Luca Gaurico nel 1503.
Quesiti et inventioni diverse (1546)	È un'opera cospicua che tratta, in forma dialogica, di problemi spettanti diverse materie: aritmetica, algebra, statica, topografia, artiglieria, fortificazioni, tattica. È divisa in nove libri. L'edizione del 1554 ebbe una notevole *Gionta* al libro VI, sulle fortificazioni. I quesiti che vanno dal I al XVII del Libro nono furono proposti al Tartaglia dal 1521 al 1533 a Verona. I quesiti che vanno dal XVIII al XLII del Libro nono furono proposti al Tartaglia dal 1534 al 1541 a Venezia. eBook
Le risposte a Ludovico Ferrari (1547 – 1548)	Sei opuscoli con cui Tartaglia rispose ai sei *Cartelli* di disfida matematica indirizzatigli dal Ferrari. Contengono numerosi problemi matematici, fra i quali sono notevoli, per esempio, quelli sulla geometria del compasso con apertura fissa.

Travagliata Inventione (1551)

Composta di tre libri con i tre *Ragionamenti* e il *Supplimento.* Gruppo di piccoli scritti contenenti oltre alla “travagliata inventione” - procedimento non nuovo in verità di riportare a galla le navi affondate - una parziale versione italiana con commento del primo libro *De insidentibus aquae* di Archimede, e scritti su argomenti di tecnica (scafandri), di meteorologia (presagi), e di fisica (pesi specifici). È interessante anche la piccola narrazione del soggiorno di Tartaglia a Brescia nel $1548 - 1549$, sia perché vi sono elementi biografici di Niccolò, sia perché rievoca numerosi personaggi bresciani.

Il General Trattato di numeri e misure (1556)

Trattato di aritmetica, geometria e algebra, composto di sei parti. La pubblicazione ebbe inizio nel 1556 e terminò dopo la morte dell’autore nel 1560. Negli argomenti di geometria teorica si possono trovare la geometria del compasso con apertura fissa, la determinazione del volume di un tetraedro di spigoli assegnati e una parziale trattazione del problema di Malfatti. Negli argomenti di geometria pratica vi è invece una prima trattazione dello squadro agrimensorio. Le due parti aritmetiche furono ripubblicate, compendiate e tradotte. Fu il miglior libro, nel suo genere, nei suoi tempi.

3 Il General trattato di numeri et misure

Il *General trattato di numeri et misure* costituisce uno dei più importanti contributi dati alla matematica nel XVI secolo. La prima e la seconda parte del uscirono alle stampe nel 1556. L'anno successivo, la morte impedì al Tartaglia di portare a compimento l'opera; tre anni dopo venivano completate e pubblicate le restanti quattro parti da Curzio Troiano.

Tale opera era stata maturata dal matematico bresciano nel 1548, ma la sua stesura era stata interrotta, come riferisce lo stesso autore, per opera *"dei nostri amici di Milan che m'internirno circa un anno a componer cartelli"*.

Tartaglia presumibilmente accantonò il progetto editoriale di un'*"opera in la pratica di Arithmetica et Geometria et insieme con quella una nuova Algebra"*, preferendo la pubblicazione dei *Quesiti et invenzioni diverse* (1546), nei quali, fra le altre cose, spiegava come Cardano avesse tradito la riservatezza della formula che gli aveva confidato.

Il progetto, secondo quanto Tartaglia racconta nella dedicatoria indirizzata a Riccardo Wentworth della Prima Parte del *Trattato*, di

> *"componere a comun beneficio un general trattato di numeri & misure, si secondo la consideratione naturale, come Mathematica e non solamente nella pratica di Arithmetica, & di Geometria, & delle proportioni & proportionalita [...] ma anchor nella pratica speculativa dell'arte Magna detta in Arabo Algebra & Almucabala, over regola della cosa"*

venne ripreso sebbene le disavventure perché finì per prevalere *"il gran desiderio, che ho sempre havuto di giovar altrui"*.

La struttura generale si articola nel seguente modo

Fogli	740 ossia 1480 pagine
Parti	6 (di queste solo le prime 4 vennero stampate prima della morte dell'autore.)
Pubblicazione	1556 – 1560, Venezia

Il trattato, comparso in buona parte postumo e postdatato dall'editore, si articola dunque in sei parti nelle quali viene rielaborata, ampliata e approfondita la matematica antica e medievale[7].

Nacque dall'idea del Tartaglia di voler scrivere un'opera che trattasse in modo completo di aritmetica mercantile e di algebra in cui rendere noti i propri risultati oltre che emendare gli errori della *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionali-*

[7] Pizzamiglio (2007)

ta di Luca Pacioli ($1445 - 1517$), frate minore di Sansepolcro, pubblicata[8] nel 1494. Non era il solo però a maturare questa idea, infatti, in quegli stessi anni, anche Cardano stava redigendo la *Practica arithmetice* (1539), avendo sempre come scopo quello di rinnovare e riorganizzare i contenuti dell'opera pacioliana.

Il *General Trattato* ha uno spiccato carattere enciclopedico e risente dell'influenza dell'ambiente abachistico; questo si riflette nell'interesse dato alla pratica dell'insegnamento e all'attività di traduzione dei classici matematici dal latino al volgare. Un'attenta analisi è data inoltre all'uso dei vocaboli e alle ambiguità semantiche che derivano dalla mescolanza fra il linguaggio comune e quello matematico.

Se da una parte la scelta della lingua volgare piuttosto del latino, l'influsso dei trattati d'abaco e la riorganizzazione della matematica pratica sono elementi che accomunano il *General Trattato* alla *Summa* pacioliana, al contempo, le differenziano dalla *Practica* di Cardano.

Infatti le scelte editoriali di quest'ultimo, a partire dall'uso della lingua latina, virano verso un'architettura più familiare al lettore moderno e suggeriscono come destinatari un pubblico più colto e geograficamente più ampio e non più il ceto mercantile, ovvero quello che era stato il naturale destinatario della trattatistica d'abaco[9].

In realtà anche Tartaglia nel secondo paragrafo del Libro I esprime un giudizio profondamente negativo nei confronti di Luca Pacioli e della sua opera nonostante nella dedicatoria si limiti a presentare il *General Trattato* come un ampliamento della *Summa.*

Come spiega l'autore nelle pagine introduttive,

> *" [...] tal Trattato sia in piu parti distinto, le quai parti siano in tal modo assettate, & ordinate, che la prima cominci (naturalmente parlando) dalle questioni mercantile (come materie piu basse) le altre poi vadino di mano in mano piu speculativamente ascendendo talmente, che ogni principiante de mediocre ingegno possa per se stesso caminare dalla prima alla ultima di dette parti e ascendere con facilita, dal piede alla sommita del monte della Pratica di queste tai Scientie, over Discipline, con lo aggiutto di quel che il tutto, regge, e governa."*

la *ratio* sulla quale si fonda la suddivisione della matematica pratica nelle sue Parti, si ispira a un criterio di astrazione progressiva. Lo schema espositivo che segue Tartaglia è lo stesso usato da Euclide, avendo cura cioè di presentare i casi secondo un criterio di difficoltà crescente - contrariamente dall'opera pacioliana - e di non risolvere alcun tipo

[8]Pacioli, a sua volta, raccolse l'eredità dal principale modello di trattato d'abaco che fu il *Liber abaci* (1202) di Leonardo Fibonacci. L'opera pacioliana conobbe una notevole fortuna editoriale tanto da diventare un termine di confronto per i successivi matematici intenzionati a pubblicare propri lavori di aritmetica pratica.

[9]L'opera *Practica arithmetice* di Cardano fu uno dei veicoli di diffusione dell'aritmetica pratica italiana in tutta l'Europa.

di problemi usando strumenti algebrici *"avanti la dechiaratione delli primi principij di detta Algebra"*[10].

Intorno al *General trattato*, il lavoro di ricognizione storiografica fu effettuato dal professore Arnaldo Masotti (1902 – 1989)[11], al quale era stato affidato dall'Ateneo di Brescia in vista di un edizione critica del testo originale. Il lavoro ha interessato il recupero di quanto è stato scritto intorno alle singole sei parti da parte di diversi studiosi, dal Cinquecento sino ai tempi moderni[12]; Masotti si è occupato inoltre di indagare gli studi tartagliani, la struttura, le tematiche salienti, i riferimenti cronologici, di persone e terminologici al fine di ottenere una configurazione diacronica e sincronica della grande impresa scientifico-didattica tartagliana.

[10]L'uso di iniziare la trattazione di un capitolo di matematica elencando le nozioni primitive e le relazioni fondamentali che le collegano tra loro, secondo quanto viene poi precisato dagli assiomi che individuano la teoria, è caratteristico di ogni trattazione assiomatica moderna. Da questo punto di vista Euclide si presenta dunque estremamente moderno.

[11]Il lavoro svolto dal prof. Masotti è significativo per aver dato impulso anche alla riedizione critica di alcune delle opere tartagliane ed in generale agli studi tartagliani Masotti (1962 a).

[12]Pizzamiglio (2012)

3.1 Prima parte

eBook - General trattato de' numeri et misure (1)

Figura 2: Frontespizio della Prima Parte (Venezia, 1556) del *General trattato di numeri et misure* di N. Tartaglia


LA PRIMA PARTE DEL GENERAL TRATTATO DI NVMERI, ET MISVRE DI NICOLO TARTAGLIA, NELLAQVALE IN DIECISETTE LIBRI SI DICHIARA TVTTI GLI ATTI OPERATIVI, PRATICHE, ET REGOLE NECESSARIE NON SOLAmente in tutta l'arte negotiaria, & mercantile, ma anchor in ogni altra arte, scientia, ouer disciplina, doue interuenghi il calculo.

MALIGNITA'

NOIAR NON PVO

A' FORTEZZA

Opera donatami dal dott. ing. Carlo Vigano il 21.10.1971. A. Masotti

CON LI SVOI PRIVILEGII.

Fondo Arnaldo Masotti

In Vinegia per Curtio Troiano dei Naui.

M D LVI.

La ***prima parte*** *del / general trattato di nv- / meri, et misvre di Nicolo Tartaglia, / nella qvale in diecisette / libri si dichiara tvtti gli atti operativi, / pratiche, et regole necessarie non sola- / mente in tutta l'arte negotiaria, & mercantile, ma anchor in ogni altra/arte, scientia, ouer disciplina, doue interuenghi il calculo* [Ritratto di "Nicolo Tartalea", con motto *"Le inventioni sono difficili, ma lo aggiungervi è facile"*; impresa editoriale – consistente in un leone o una leonessa che tiene nelle zampe anteriori un drago – contornata dal motto *"Noiar non può malignità a fortezza"*] *Con li svoi privilegii. / In Vinegia per Curtio Troiano de i Nauò. / M D LVI.*

Libri	17
Fogli	284, ossia 568 pagine
Pubblicazione	1556
Contenuto	Trattato di aritmetica necessaria a risolvere problemi di natura mercantile secondo una sequenza che dimostra l'esperienza del Tartaglia di maestro d'abaco.
Dedica	*"Al molto Nobile et Egregio Signor, il Signor Ricardo Ventuorth, Gentil'huomo Inglese, compar, et Maggior suo Honorandiss.."* in data *"Di Venetia alli XXIII di Marzo, MDLVI",* sottoscritta *"Di V.S. compare Nicolo Tartaglia".*

Questa Parte Prima, dunque, risulta dedicata dallo stesso Tartaglia a Richard Wentworth, gentiluomo inglese e già discepolo del matematico bresciano, che in precedenza gli aveva pure dedicato la sua raccolta delle *Opera Archimedis*; mentre, forse per sollecitazione dello stesso Wentworth, il Tartaglia aveva dedicato poi al Re d'Inghilterra Enrico VIII i *Quesiti.*

Nel frontespizio della Parte Prima si legge

> *"Questa mia cosi longa fatica mi è parso de dividere in sei parti distinte, per causa della diversita dei suoi soggetti, delle quali sei parti, questa è la prima [...] nella quale in diciassette libri si dichiara tutti gli altri operativi, pratiche, et regole necessarie, non solamente in tutta l'arte negotiaria et mercantile, ma anchor in ogni altra arte, scientia, over disciplina, dove intervenghi il calculo"*

Tartaglia, dopo essersi occupato della matematica speculativa (geometria e aritmetica) nella sua versione commentata degli *Elementi* di Euclide, opera principe in tal genere di studi, voleva mostrare anche la rilevanza operativa e pratica sia delle due discipline matematiche (cioè l'aritmetica o "arte piccola" e la geometria) sia della cosiddetta "arte magna", *"detta in arabo algebra & almucabala over regola della cosa"* dei latini.

L'autore, per giustificare ciò, esordisce col recuperare dall'inizio dell'*Almagesto* di Tolomeo la distinzione generale delle scienze tra "speculative" e "operative", ossia tra "teoria" e "pratica". Sempre a questo riguardo, a detta di Aristotele nel Libro Secondo della *Metafisica* – è sempre Tartaglia a farvi riferimento – il fine della scienza speculativa non è nient'altro che la verità, mentre quello della pratica è soltanto l'esecuzione diligente di un'operazione. Tartaglia conclude il discorso valutando che la parte speculativa supera in nobiltà quella operativa, mentre questa supera la precedente di utilità e valore[13].

La Prima Parte, suddivisa in 17 libri, ognuno dei quali diviso in un numero variabile di capitoli, si articola come segue

Libro i	le quattro operazioni fondamentali con i numeri interi
Libro ii	le quattro operazioni fondamentali con pesi, misure e monete
Libri iv-vi	problemi mercantili di compravendita
Libro vii	le quattro operazioni fondamentali con i numeri frazionari
Libri viii-ix	regola del tre e le sue applicazioni
Libro x	la regola del tre inversa
Libri xi-xv	problemi di interesse e sconto, di compagnie, di baratti, di cambi e di leghe
Libri xvi-xvii	regole di falsa posizione e di doppia falsa posizione

Fra le principali fonti usate da Tartaglia nella Prima Parte, si possono citare il *Libro de abacho* di Pietro Borghi e al *Nuovo Lume* di Giovanni Sfortunati, che costituiscono una miniera di problemi di aritmetica pratica. Così come Cardano sottolinea alcuni errori commessi dai suoi predecessori e addirittura riserva l'intero capitolo finale a elencare le sviste più gravi di Pacioli, anche Tartaglia, con dei titoletti a margine, marca gli errori in cui sono incorsi altri matematici prima di lui, soprattutto Pacioli, Borghi, Sfortunati e, naturalmente, Cardano e Ferrari.

In questa Prima Parte si può notare come l'esposizione di Tartaglia, come per Pacioli nella *Summa*, è influenzata dagli anni di esperienza didattica dati dalla lunga pratica d'insegnamento che lo induce a trattare con attenzione le criticità del processo di apprendimento di alcuni argomenti.

Sul calcolo a mente

Al fine di avere padronanza del calcolo mentale rapido, l'autore esorta il lettore ad un prerequisito: la memorizzazione di calcoli elementari come le addizioni e sottrazioni con *"li numeri digiti"* (con numeri a una cifra), le tabelline.

L'autore consiglia poi di "saper a mente" le divisioni con divisore e quoziente a una cifra, con o senza resto, del tipo $m : n = q$ con $m < 90$, $n, q < 10$. Ad esempio *"7 in 24 intra 3 e avanza 3"* significa $24 : 7 = 3$ col resto di 3. Tartaglia suggerisce di imparare tutto l'elenco delle divisioni possibili nel caso di $n = 1, 2, 3$ e una selezione di casi successivi.

[13] Pizzamiglio (2007, pp. 78-80)

> *"Per intendere la pratica, overo la regola di saper cavare, overo estraere la radice quadrata (laquale e la prima di tutte le specie di radici) eglie necessario di sapere a mente le multiplicationi di tutti li numeri digiti dutti in se medesimi [...] insieme con alcune altre, le quai non per necessita si debbono imparare a mente, ma perche fanno l'huomo pronto & presto & massime nel maneggiare delle radici, & altre quantita irrationali [...]"*

Come si legge[14], era inoltre consigliato avere una buona conoscenze delle successioni $\{n^p\}$, con p numero naturale fissato, permetteva di estrarre più velocemente la radice p-sima di un numero.

È da memorizzare inoltre la regola del tre semplice[15]:

> *"tal regola in piu modi, & sotto diverse parole (ma con la medesima sententia) si costuma farla mandar a memoria delli quali modi l'uno dice in questa forma. La regola del tre vol che si multiplichi la cosa, che l'huomo vol saper per quella, che non è a lei simigliante, & il produtto partirlo per l'altre a lei simigliante, & e lo avenimento sara quello che si cerca, cioe il valor di quella cosa, che si vol sapere, & tal valore sara della natura di quella, che non è simigliante."*

Più avanti Tartaglia scrive[16]:

> *"La regola del tre sono tre cose la prima, che si mette debbe esser sempre simile a quella, che sta di drio, & di drio debbe star la cosa, che si vol saper, & multiplicarla contra quella, che sta di mezzo, & quel produtto partirlo per la prima, & sara fatta la ragione, & nota che quello, che venira sara sempre simile alla cosa, che sta di mezzo."*

Tartaglia sottolinea però che *"in memoria non sarà rimasto nulla"* nel caso in cui la memorizzazione passa dal supportare l'apprendimento al sostituire l'effettiva comprensione di una regola. Come esempio propone quello delle operazioni con le frazioni proprie o numeri "rotti"[17]:

> *"Tutti quelli (per quanto ho visto) che fin hora hanno dato regola al summar, sottrar & partir de rotti, la hanno data di sorte, che l'huomo presto la intende, & presto se la scorda, il che non procede da altro salvo che per ignorar la causa di tal sua regola, over di tal suo operare, volendo adunque rimediare a questo inconveniente, bisogna intendere il modo di ridurre duoi, over piu rotti de diverse denominationi, a una medesima denominatione, il qual atto è al contrario del schisare."*

[14] GT1, c. 24^{v}
[15] GT1, c. 127^{r}
[16] GT1, c. 129^{r}
[17] GT1, Libro VII, c. 110^{v}

Ciò che osserva è che, applicando sistematicamente la regola della "moltiplicazione a croce[18]" per sommare due frazioni, che focalizza l'attenzione sul risultato e non sul procedimento, non solo non si giustifica il motivo dal punto di vista matematico, ma è necessario iterare $n-1$ volte per la somma di n frazioni. La memorizzazione duratura ha luogo solo se si calcola il minimo comune multiplo fra i denominatori, si *"accatti"* (riducano) a quello stesso denominatore tutte le frazioni e infine si sommino le frazioni simili così ottenute.

Sui termini di moltiplicazione e divisione

Riguardo le ambiguità semantiche che possono derivare dalla mescolanza fra il linguaggio comune e quello matematico, Tartaglia fa un'analisi approfondita, tanto da dedicare un intero capitolo, al termine *"multiplicare"*, che nell'accezione comune sottintende un significato di accrescimento[19].

Infatti, se moltiplicando numeri naturali il prodotto è coerente col significato comune del termine, invece, il prodotto è minore dei fattori nel caso in cui la moltiplicazione è calcolata fra frazioni proprie. Osserva Tartaglia, molti aritmetici si sono[20]

> *"maravigliati del atto di multiplicar di rotti, perche in quello sempre si vede riuscire al contrario di quello che dinota tal vocabulo, qual non dinota altro che crescere, overo augumentare, & nel detto multiplicare de rotti sempre seguita (come è detto) tutto al contrario, cioe che il produtto è sempre menore di qual si voglia di duoi precedenti."*

L'autore attribuisce la non precisione della parola alla cattiva traduzione latina di Campano da Novara che, negli *Elementi,* non distingue l'operazione di *"multiplicare"* riguardante solo i *"numeri semplici"* (numeri naturali) da quella di *"ducere"* (menare) che si riferisce alle grandezze continue.

Anche nell'operazione della divisione ci sono refusi di autori[21],

> *"antichi, & moderni Pratici non hanno fatto alcuna distintione di nome a questi tre Atti [...] e perche dubito, volendo io star a delucidar, & dispurar della varieta di tai avenimenti, che a molti veneria in fastidio, mene passo con silentio."*

[18]Date due frazioni $\frac{a}{b}$ e $\frac{b}{d}$, la loro somma è data da

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}.$$

Pertanto la frazione risultante ha come numeratore due addendi che si ottengono moltiplicando in croce rispettivamente il numeratore della prima frazione con il denominatore della seconda e il denominatore della prima con il numeratore della seconda.

[19]Basti pensare al celebre versetto biblico *"Crescete e moltiplicatevi"* (Genesi, 1, 28).

[20]GT1, Libro VII, c. 119

[21]GT1, Libro II, c. 27^r

Alcuni autori, infatti, hanno fatto uso del verbo *"partire"*, nonostante questo produca lo stesso problema emerso prima coi numeri rotti: la divisione tra di essi produce un quoziente maggiore del dividendo e del divisore. In realtà i termini usati da Campano per indicare la divisione erano molteplici: *"partire"*, *"misurare"* e *"numerare"*, *"dividere over partire"*; quest'ultimo è riferibile solo ai numeri pari poiché gli unici a poter essere dimezzati. I termini *"misurare"* e *"numerare"* individuano invece quante volte una certa quantità è contenuta in un'altra e si riferiscono rispettivamente alle quantità continue e discrete.

A Tartaglia, oltre ai termini, preme mettere in rilievo le conseguenze che derivano da interpretazioni matematicamente non corrette di problemi concreti. Le divergenze più frequenti sono imputabili all'interpretazione del calcolo dell'interesse composto, la ripartizione degli utili fra i soci di una compagnia e il problema dei baratti. Infatti, colui che stipula un accordo cerca sempre di trarre il massimo profitto ed è basandosi su questo criterio che si possono talvolta risolvere questioni ambigue.

Esempio di patto commerciale

L'autore porta come esempio la tradizionale ripartizione dei guadagni secondo quote proporzionali ai capitali versati, che corrisponde all'applicazione della regola del tre semplice, la quale viene alterata dai soci di una compagnia. Il problema nasce dal fatto che gli accordi sono espressi in forma ambigua[22].

> *"Duoi fanno compagnia, il primo mette ducati 80 & il secondo mette ducati 20 e perche il secondo è molto piu ispertissimo, & pratico in tal mercantia, dacordo determinorno che il primo dovesse tirare del guadagno solamente li 2/3, & il secondo per la sua suficientia dovesse tirar 1/3 del detto guadagno, & fatto l'acordo venne un'altro, & e disse se voleti accettarme in compagnia io mettero ducati 120 & voglio stare alla ratta del guadagno secondo il patto, & convention fatte fra voi, & costor lo accettorno, accade che in fin della compagnia si trovorno un guadagno di ducati 500. se adimanda che toccara per uno del detto guadagno."*

Si legge che, il secondo *"piu ispertissimo"* socio riesce a ottenere la metà del guadagno del primo, pur avendo versato solo un quarto del suo capitale. Nel patto si inserisce un terzo contraente, che dichiara di esigere una quota di guadagno calcolata secondo il patto stabilito fra i primi due soci.

Si mette in luce la difficoltà di individuare le vere relazioni matematiche, infatti, il punto cruciale del problema è stabilire la *ratio* matematica dell'accordo ed è su questa che le interpretazioni divergono.

Se non fosse intervenuto il terzo socio, secondo una ripartizione equa, i due soci avrebbero rispettivamente diritto ai $\frac{4}{5}$ e a $\frac{1}{5}$ del guadagno avendo versato 80 e 20 ducati;

[22] GT1, Libro VII, c. $207^{r} - 208^{r}$

nel caso di un guadagno di 100 ducati, il primo ne dovrebbe trattenere 80 e il secondo 20. Tuttavia, dato che il patto reale stabilisce quote di $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{3}$, il guadagno di 100 ducati si ripartisce in $66\frac{2}{3}$ ducati al primo e $33\frac{1}{3}$ al secondo. Per il primo socio, la differenza fra il "guadagno equo" e quello concordato è appunto di $13\frac{1}{3}$ ducati, ovvero a $\frac{1}{6}$ del legittimo guadagno.

È questa dunque, conclude Tartaglia, la vera *ratio* del patto: tutti i nuovi soci che subentrano nella compagnia devono rinunciare a $\frac{1}{6}$ del proprio legittimo guadagno in favore del socio che ha versato i 20 ducati iniziali. Dunque, nel caso in esame, i 500 ducati devono essere ripartiti in questo modo: $151\frac{17}{33}$ al primo socio, $121\frac{7}{33}$ al secondo e $227\frac{7}{11}$ al terzo, *"cosi sara risolta iustament e tal questione"* (c. 208).

Esempio di interesse composto

Tartaglia dedica un apposito paragrafo al calcolo dell'interesse composto per tempi non interi

> *"Poniamo che'l se habbia da meritare Lire 100 per 6 mesi a ragion del 20 per 100 all'anno a far capo d'anno."*

Ossia, si suppone che uno prenda in prestito 100 lire concordando un interesse composto annuo del 20% e che decida poi di restituire capitale e interesse maturato dopo soli 6 mesi.

Tartaglia risolve dicendo che, se l'interesse è di 20 lire su 100 all'anno, significa calcolare 20%: 12 ossia $\frac{20}{12 \cdot 100}$ lira al mese che è pari a $\frac{20}{12 \cdot 100} \cdot 240 = 4$ denari per lira[23]. Dunque, se l'interesse è di 4 denari per lira al mese, 100 lire in un mese fruttano 400 denari e in 6 mesi fruttano $400 \cdot 6 = 2400$ denari, cioè $2400 : 240 = 10$ lire. Pertanto il creditore dovrebbe ricevere $100 + 10 = 110$ lire.

Tartaglia risolve però un problema a regime semplice[24] ed inoltre non usa criteri strettamente matematici per trovare la soluzione, ma si appella al principio etico secondo cui chi presta dei soldi lo fa per la propria esclusiva convenienza.

Pacioli e Sfortunati contestano la soluzione tartagliana innanzi tutto poiché l'interesse deve essere calcolato in modo composto ed inoltre osservano che il montante restituito dopo sei mesi, anziché dopo un anno, matura meno interesse. Sia l'interesse mensile pari a 4 denari per lira; questo significa che dopo i primi 6 mesi 1 lira, ossia 240 denari, frutta

[23] 1 Lira = 240 denari = 20 soldi

[24] Siano C il capitale, M il montante, i l'interesse e t il tempo. Essendo $M = C + i$, il montante calcolato con regime semplice è pari a $M = C(1 + it)$, mentre con regime composto $M = C(1+i)^t$.

un interesse di 24 denari (ossia 2 soldi), infatti:

$$\begin{aligned} i &= M - C \\ i &= 240 \cdot \left(1 + \frac{20}{100} \cdot \frac{6}{12}\right) - 240 \\ &= 264 - 240 = 24 \end{aligned}$$

Pertanto, poiché il capitale è pari a 20 soldi, il montante M sarà 22, dato cioè dalla somma del capitale e dell'interesse che ammonta a 2 soldi.

La cifra da restituire al creditore dopo un anno ammonta a $M = 240\left(1 + \frac{20}{100} \cdot 1\right) = 288$ denari ossia $M = 100\left(1 + \frac{20}{100} \cdot 1\right) = 120$ lire. Ma, se il creditore ritira il montante 6 mesi prima della scadenza, significa che non potrà usufruire di tutto l'interesse, quindi riceverà di 20 soldi anziché 22 (o, che è lo stesso di 240 anziché 264). A questo punto basta applicare la regola del tre semplice, impostando la proporzione

$$22 : 20 = 120 : x$$

che traduce la seguente domanda: "se invece di 22 soldi ritiro subito la somma accontentandomi di 20 soldi, quanto dovrò accettare invece delle 120 lire pattuite?". Da ciò Pacioli e Sfortunati concludono che il creditore non dovrebbe ricevere 110 lire, bensì $x = 109$ lire 1 soldo e $9\frac{9}{11}$ denari.

Esempio di problema delle parti

Il problema delle parti è ritenuto uno dei problemi che hanno dato significativo impulso alla nascita del moderno calcolo della probabilità. A dispetto della complessità della soluzione, enunciare il problema non è complesso: si suppone che due giocatori di pari abilità disputino una serie di partite di un gioco qualsiasi, con l'accordo che vince chi riesce a raggiungere un numero prefissato di punti. La partita viene però interrotta prima della sua naturale conclusione. In base a quale criterio verrà distribuita la posta in gioco?

Si supponga, osserva Tartaglia, che i due giocatori debbano totalizzare 60 punti per vincere, guadagnando 10 punti per ogni partita vinta; il gioco si interrompe dopo una sola partita, quando un giocatore ha 10 punti e l'altro nessuno.

Se i giocatori A e B hanno totalizzato rispettivamente a e b punti ($a > b$), la posta in gioco è P e T è il punteggio da totalizzare per vincere, il primo ha diritto alla quota $\frac{P}{2} + \frac{a-b}{T} \cdot \frac{P}{2}$ mentre il secondo alla quota $\frac{P}{2} - \frac{a-b}{T} \cdot \frac{P}{2}$.

In questa situazione i giocatori hanno sostanzialmente le stesse possibilità di vittoria, dal momento che sono entrambi molto lontani dal traguardo finale; tale modello è lontano dall'essere soddisfacente poiché rischia di premiare più del dovuto il giocatore in svantaggio.

La soluzione venne chiarita nel 1654, ma il nome del matematico bresciano è indirettamente legato alla soluzione del problema; infatti, nella lettera indirizzata a Fermat il 29 luglio 1654, Pascal calcola le probabilità di vittoria dei singoli giocatori al momento dell'interruzione della partita basandosi su considerazioni di tipo combinatorio che rimandano all'uso del triangolo di Tartaglia.

3.2 Seconda parte

eBook - General trattato de' numeri et misure (2)

Figura 3: Frontespizio della Seconda Parte (Venezia, 1556) del *General trattato di numeri et misure* di N. Tartaglia


LA SECONDA PARTE
DEL GENERAL TRATTATO DI
NVMERI, ET MISVRE DI NICOLO TARTAGLIA,
NELLAQVALE IN VNDICI LIBRI SI NOTIFICA LA
PIV ELLEVATA, ET SPECVLATIVA PARTE DELLA PRATICA
Arithmetica, laqual è tutte le regole, & operationi praticali
delle progressioni, radici, proportioni,
& quantita irrationali.

MALIGNITA'
NOIAR NON PVO
A' FORTEZZA

Con priuilegio della santita di Papa Paolo IIII. Della Illustrissima Signoria di Venetia, & dell'eccellentissimo signor Duca d'Vrbino.

In Vinegia per Curtio Troiano de i Nauò.
M D L V I.
Appresso dell'Auttore.

La ***seconda parte*** *del / general trattato del general trattato di / nvmeri, et misure di Nicolo Tartaglia, / nella quale in vndici libri si notifica la / piv ellevata, et specvlativa parte della pratica / Arithmetica, laqual è tutte le regole, & operationi praticali / delle progressioni, radici, proportioni, / & quantita irrationali* [Ritratto di "Nicolo Tartalea", con motto *"Le inventioni sono difficili, ma lo aggiungervi è facile"*; impresa editoriale – consistente in un leone o una leonessa che tiene nelle zampe anteriori un drago – contornata dal motto *"Noiar non può malignità a fortezza"*] *Con priuilegio della santita di Paolo IIII. Della Illu-/strissima Signoria di Venetia, & dell'eccellen- / tissimo signor Duca d'Vrbino. / In Vinegia per Curtio Troiano de i Nauò. / MDLVI. / Appresso dell'Auttore.*

Libri	11
Fogli	190, ossia 380 pagine
Pubblicazione	1556, Venezia
Contenuto	Descrive il triangolo aritmetico, che porta il nome di Tartaglia, con i coefficienti delle prime dodici potenze di $(a + b)$, cioè fino a cu.ce.ce. (il cubo del quadrato del quadrato); il calcolo di espressioni con radicali; le regole per estrarre radici cubiche, quarte, quinte, ecc.; numeri congrui secondo Fibonacci e Luca Pacioli; numeri perfetti euclidei; numeri irrazionali; teoria delle proporzioni; quadri, tabelle, e molti problemi pratici svolti; correzioni di *"errori della Summa di Pacioli ed errori di Cardano"*
Dedica	*"Al molto Magnifico, et generoso Signor, Signor Conte Antonio L'Andriano, suo Honorandiss.." sottoscritta "Di Venetia alli* III *di Aprile* MDLVI *alli comandi di V.S. Nicolo Tartaglia."*

In questa dedica al Conte A. Landriani merita d'esser notato come il Tartaglia colga l'opportunità di accennare all'interesse del suo illustre interlocutore sia riguardo a Euclide sia per l'arte magna:

> *"Et perché già molti giorni ragionando con la eccellenza di messere Federico Comandino da Urbino peritissimo mathematico, quella mi certificò qualmente vostra signoria molto si dilettava, non solamente della speculativa dottrina di Euclide Megarense, ma anchora della pratica speculativa dell'arte magna."*

Come si può dedurre dalla lettura del lungo titolo sul frontespizio, questa Seconda Parte del è principalmene dedicata a esporre l'aritmetica speculativa[25],

> *"considera le cause le Qualita, le Quantita, & le Proportion de Numeri con una Speculation di mente, & il suo fine, non e altro che la verita."*

[25] GT2, c. 1

senza perdere l'occasione di far riferimento all'opera maggiore di Euclide, da lui stesso pubblicata in lingua italiana. In particolare la trattazione si inserisce nel quadro teorico dei libri aritmetici VII-IX degli *Elementi.*

Le opere a cui Tartaglia fa riferimento in questa parte, non sono solo quelle di Euclide e di Pacioli, ma anche quelle di Boezio e di Giorgio Valla.

La Seconda Parte, suddivisa in 11 libri, si articola come segue

Libro I	classificazione dei numeri secondo Euclide e Boezio, trattazione delle progressioni aritmetiche e geometriche
Libri II-III	esposizione degli algoritmi di estrazione della radice n-esima di un numero
Libro IV	regole dei segni
Libro V	operazioni fra binomi e residui
Libro VI	interpretazione aritmetica del Libro II degli *Elementi*
Libri VII-VIII	proporzioni e corrispondenza fra proporzionalità geometrica e aritmetica
Libro IX	trattazione dei numeri quadrati
Libro X	operazioni fra binomi e residui
Libri XI	interpretazione aritmetica del Libro X degli *Elementi*

In tutta l'opera sono presenti errori del matematico bresciano: l'esemplare sito nella Biblioteca Marciana di Venezia, contrassegnata con il numero 19779, vi sono i fogli con la numerazione da 37 a 42 uguali a quelli del primo libro e diversi da quelli delle copie che si trovano nelle Biblioteche di Padova e di Brescia. In questi ultimi, alle pagine 41 e 42 si trovano notizie autobiografiche relative alla disputa con Cardano e Ferrari. Da ciò si deduce che, l'editore Curzo Troiano dei Navò, dopo il decesso di Tartaglia, avendo ereditato i libri già stampati e temendo che quelle due pagine potessero comprometterne la vendita negli ambienti favorevoli a Cardano, decise di sostituirle.

Curzio Troiano ottene nello stesso anno 1559 il nullaosta alla stampa e i diritti editoriali per venti anni delle parti 3, 4, 5 e 6 in un unico volume e l'imprimatur dell'Inquisitore Frate Felice Peretto di Montaldo[26]. Tuttavia, nella seconda pagina di tali parti, oltre alla riproduzione del privilegio concessogli dalla Repubblica Veneta, vi è un secondo decreto, in latino, con il quale Filippo II, figlio di Carlo V, concede al solo Curzio Troiano i diritti editoriali per venti anni. Nulla di strano sennonché il decreto porta la data del 14 agosto 1556, ossia data in cui Tartaglia era ancora in vita ed ignaro di ciò. Dato che le prime quattro parti erano già state stampate a spese dell'autore, e ciò è testimoniato dal testamento e dall'inventario dei beni i quali affermano che le copie

[26]Venticinque anni più tardi Frate Felice Peretto di Montaldo sarebbe divenuto Papa Sisto V.

stampate facevano parte del patrimonio del Tartaglia, sembra dunque che si sia trattato di una speculazione da parte dell'editore.

Somma dei cubi dei primi n interi

Di seguito è illustrato come calcolare la somma dei cubi dei primi n interi[27]:

> *"Se tu volesti raccogliere tutte le unità di numeri cubi che sono da 1 fin 14. Fa così. Piglia la mità delli termini, viene 7, & questa mità multiplica in sé farà 49, & poi sopra il numero delli termini aggiongegli sopra uno farà 15, & questo anchora multiplica in sé farà 225. Poi multiplica 49, quadrato della mità, fia 225, quadrato più 1 di termini, faranno 11025 per tutta la summa di detti numeri cubi continuati dalla unità, & così seguita in tutti, & mai non falla."*

emerge che Tartaglia non giunse alla conclusione che la somma dei cubi è uguale al quadrato della somma degli interi. Questo complicherà i conti futuri nelle applicazioni.

Sebbene Tartaglia abbia dedicato la Prima Parte alla trattazione delle operazioni aritmetiche, colloca la progressione, penultima *"passione del algorithmo, cioe della pratica di numeri"*, e l'estrazione di radice, ultima *"passione"* in questa Seconda Parte. Infatti, sebbene se si rivela di una certa utilità nella *"general pratica di numeri, & anchora in quella di misure"* l'autore ritiene[28] *"non esser materia molto necessaria a mercanti"*.

Questo non significa che i destinatari della prima e seconda parte sono diversi, anzi, Tartaglia rassicura il lettore, lungo tutta la trattazione, circa l'effettiva utilità delle teorie apparentemente più astratte e lontane dal concreto. Uno degli aspetti più interessanti della parte relativa alle progressioni è la continua commistione fra l'aspetto matematico e quello didattico.

La generalità delle formule che vengono presentate di seguito non derivano da alcuna dimostrazione, ma vengono applicate ad alcuni casi numerici a titolo di verifica.

Somma di progressioni aritmetiche[29]

Tartaglia, per la formulazione della somma di n termini propone una regola generale espressa in forma retorica[30]:

> *"Sempre aggiongi il primo termine (cioe la unita) con l'ultimo, & la mita di tal summa multiplica fia il numero delli termini di quella progressione, & il produtto di tal multiplicatione sara la summa di tutti li detti termini di tal progressione."*

che, in termini moderni,

[27] GT2, c. 7^v

[28] GT2, c. 2^v

[29] GT2, Libro I, c. 3^v

[30] Più precisamente, Tartaglia enuncia questa regola per le progressioni aritmetiche che cominciano con l'unità, ma riconosce in seguito che le altre progressioni aritmetiche *"si summano, over raccoglieno per quella medesima regola"*

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n,$$

avendo indicato con a_1 e a_n il primo e l'ultimo termine e con n il numero dei termini.

Somma di progressioni geometriche[31]

> *"Sempre cava il primo termine da l'ultimo, & il restante sempre partirai per un manco del numero denominante tal progressione, & lo avenimento gionto con l'ultimo termine di tal progression, tal summa sara egual alla summa di tutti li termini di tal progression, essempio nella doppia"*

Indicando con q è la ragione *"numero denominante"* della progressione (la ragione della progressione), si può scrivere la somma delle progressione nel seguente modo

$$S = a_n + \frac{a_n - a_1}{q - 1}.$$

Tartaglia riserva un ampio spazio allo studio delle progressioni, soprattutto geometriche; il motivo è la loro propedeuticità all'apprendimento dei fondamenti dell'algebra. L'unità, l'incognita e le sue potenze (o dignità) – censo, cubo, censo censo, censo cubo, cubo cubo etc. – rappresentano infatti i termini di una progressione geometrica che ha come ragione l'incognita e questo rende possibile leggere in una prospettiva algebrica le proprietà delle progressioni.

Sebbene Tartaglia nota che, a determinate operazioni della progressione naturale, corrispondono particolari operazioni fra i termini della progressione geometrica (proprietà delle potenze), non intuisce la possibilità di compiere un'addizione al posto di una moltiplicazione o una sottrazione al posto di una divisione.

Ritorna inoltre la costante attenzione verso la padronanza e la rapidità del calcolo mentale riemerge quando l'autore suggerisce di memorizzare alcuni casi particolari. Ad esempio, la ragione è pari a $q = \frac{3}{2}$ si deve[32]

> *"cavare il treppio del primo termine [...] del quadruplo de l'ultimo termine"*

quindi la somma vale $S = 3a_n - 2a_1$.

Problema dell'inseguimento

Tartaglia usa tali problemi per esprimere il fine applicativo delle progressioni.

> *"Poniamo che la sfera terrena habbia di rivolutione 20.400 miglia, & che sopra l'equinottio da un ponto, & in un ponto si mova duoi ponti mobili, il primo va verso oriente il primo giorno un miglio, il secondo 2, il terzo 3 etc. Il secondo va verso occidente, il primo giorno un miglio, il secondo 8, il terzo 27. Adimando in quanti giorni si trovaranno li due movimenti in un sol ponto."*

[31] GT2, Libro I, c. 5^v

[32] GT2, Libro I, c. 6^v

Si suppone di avere due o più personaggi che si muovono secondo una tabella di marcia quotidiana i cui termini costituiscono una progressione o una particolare successione; si chiede di determinare dopo quanti giorni i viaggiatori si incontrano.

Se l'incognita è un numero naturale, non ci sono particolari ostacoli nella risoluzione dei problemi, che si riducono al calcolo della somma di un certo numero di elementi di una progressione e a qualche manipolazione algebrica. I problemi sorgono però non appena si abbia a che fare con numeri non interi.

Tartaglia critica la soluzione proposta da Pacioli il quale risolve per via algebrica commettendo due errori: il primo è stato quello di accettare come soluzione un numero irrazionale, il secondo, a monte, nasce dall'assunzione di considerare l'incognita un numero naturale.

Le critiche mosse da Tartaglia e la soluzione alternativa proposta nel *General Trattato* sono concordi con quelle espresse da Cardano[33] ma, presumibilmente per i vecchi rancori, il matematico milanese non viene mai citato.

Estrazione della radice n–esima

Tartaglia dedica all'estrazione delle radici ben 50 carte[34] e, per ogni ordine $n = 2, \ldots, 10$ analizza il caso dell'estrazione di radice dei numeri naturali (distinguendo l'approssimazione per difetto dall'approssimazione per eccesso) e dei razionali positivi e dà, nel caso della radice quadrata e cubica, anche un'interpretazione geometrica dell'algoritmo usato. Inoltre, presenta una regola generale per estrarre la radice di ordine n da un numero N.

L'applicazione dell'algoritmo di estrazione come pure la comprensione delle dimostrazioni, richiedono una buona padronanza di matematica oltre che una certa abilità di calcolo, infatti, nei quesiti sottoposti a Cardano e Ferrari, si ritrovano le questioni legate all'estrazione di radici cubiche.

L'algoritmo di estrazione fa uso del triangolo aritmetico ed è plausibile ipotizzare che Tartaglia si sia ispirato in questo all'*Arithmetica integra*[35] di Stifel[36].

[33] La soluzione proposta da Cardano si fonda su una sorta di interpolazione: dopo 16 giorni i due viaggiatori A e B hanno percorso 18 632 miglia, mentre il 17° giorno hanno coperto 23 562 miglia; devono quindi necessariamente incontrarsi fra il 16° e il 17° giorno, esattamente il giorno $16\frac{1768}{4930}$.

[34] cc. 23^v-73^v

[35] *Arithmetica Integra. Authore Michaele Stifelio. Cum praefatione Philippo Melanctonii*, Norimbergae apud Iohan. Petreium. Anno Christi MDXLIIII.

[36] L'estrazione della radice n–esima di un numero N, per Stifel, si fonda sulla possibilità di trovare due interi positivi a e b tali che $N = (10a + b)^n$. Pertanto,

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{N} &= 10a + b_1 \\ &= 10a + \frac{N - 10^n\, a^n}{\binom{n}{1} 10^{n-1}\, a^{n-1}} \end{aligned}$$

In generale, per calcolare la radice n−esima di un numero N si devono trovare due numeri a e b tali che $N = (a+b)^n$ dove a è la radice intera che meglio approssima $\sqrt[n]{N}$ e dunque il problema di riduce a dover dare una stima di b. La chiave di questo algoritmo di estrazione risiede nello sviluppo della potenza n−esima della somma di due segmenti, e il triangolo aritmetico con i suoi coefficienti binomiali, permette di agevolare i conti.

L'approssimazione proposta da Tartaglia, con un simbolismo moderno, è la seguente

$$\sqrt[n]{N} \quad = \quad a + \frac{N - a^n}{\sum_{k=1}^{n-1} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^k}.$$

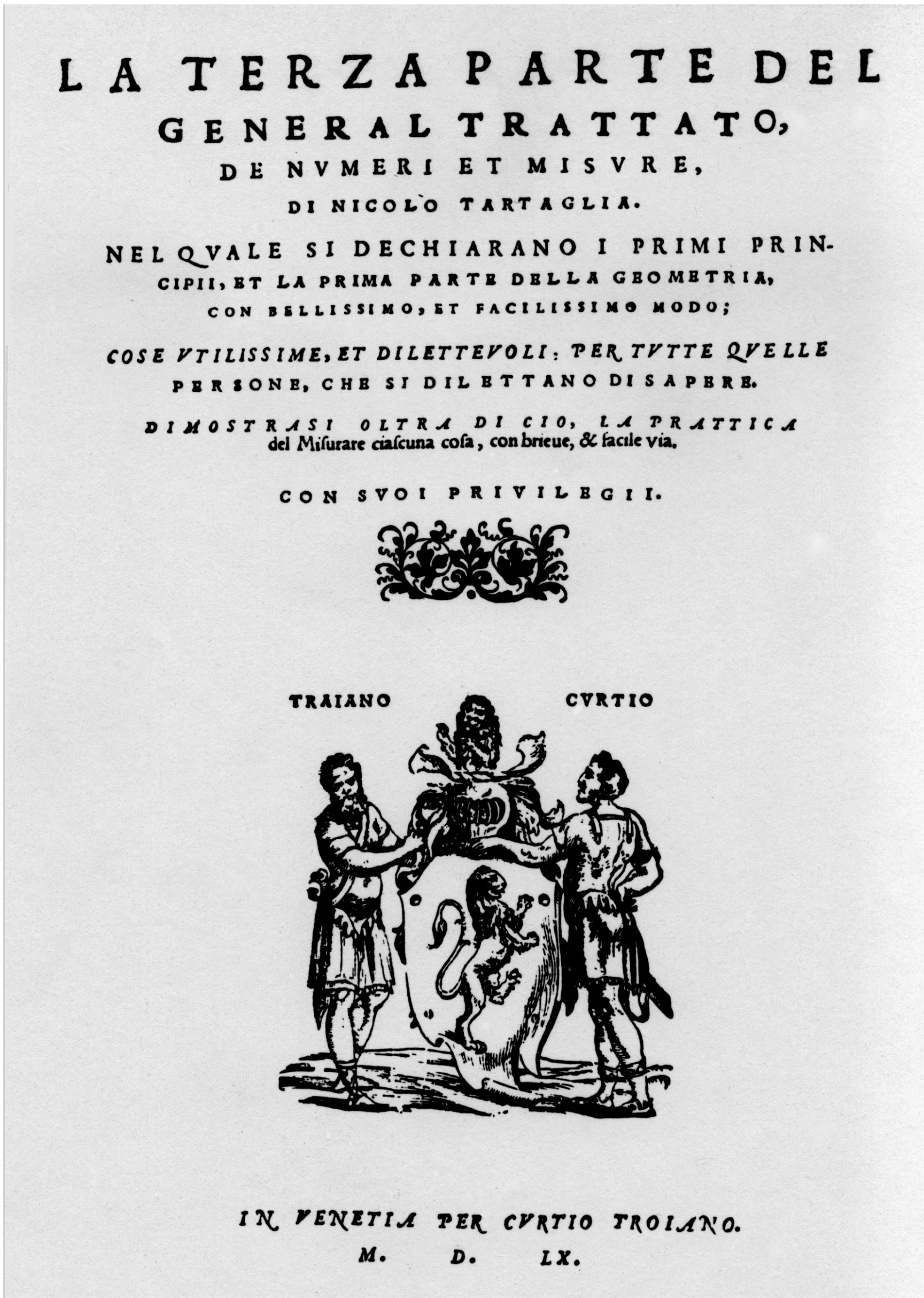
dove il numero a è la radice che meglio approssima (per difetto) N, mentre b è la migliore approssimazione data da $b_1 = \dfrac{N - 10^n\, a^n}{\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} 10^{n-1}\, a^{n-1}}$.

Per capire di quale grado sia l'approssimazione di $\sqrt[n]{N}$, è necessario sviluppare il binomio $(10a + b_1)^n$ e dunque usare i coefficienti binomiali.

3.3 Terza parte

eBook - General trattato de' numeri et misure (3)

Figura 4: Frontespizio della Terza Parte (Venezia, 1560) del *General trattato di numeri et misure* di N. Tartaglia



LA TERZA PARTE DEL
GENERAL TRATTATO,
DE NVMERI ET MISVRE,
DI NICOLÒ TARTAGLIA.

NEL QVALE SI DECHIARANO I PRIMI PRINCIPII, ET LA PRIMA PARTE DELLA GEOMETRIA, CON BELLISSIMO, ET FACILISSIMO MODO;

COSE VTILISSIME, ET DILETTEVOLI: PER TVTTE QVELLE PERSONE, CHE SI DILETTANO DI SAPERE.

DIMOSTRASI OLTRA DI CIO, LA PRATTICA del Misurare ciascuna cosa, con brieue, & facile via.

CON SVOI PRIVILEGII.

TRAIANO CVRTIO

IN VENETIA PER CVRTIO TROIANO.
M. D. LX.

La **terza parte** *del / general trattato, / de nvmeri et misvre, / di Nicolo Tartaglia. / Nel qvale si dechiarano i primi prin- / cipii, et la prima parte della geometria, / con bellissimo, et facilissimo modo; / Cose vtilissime, et dilettevoli, per tvtte qvelle / persone, che si dilettano disapere. / Dimostrasi oltra di cio, la prattica / del Misurare ciascuna cosa, con brieue, & facile via. / Con suoi privilegii* [Simbolo floreale. Scritta: "*Traiano Cvrtio*". Impresa editoriale con leone o leonessa rampante raffigurato/a su un cartiglio a scudo, sormonato da un elmo (sopra il quale si trova un altro leone) sostenuto da due guerrieri] *In Venetia per Cvrtio Troiano / M.D.L.(X).*

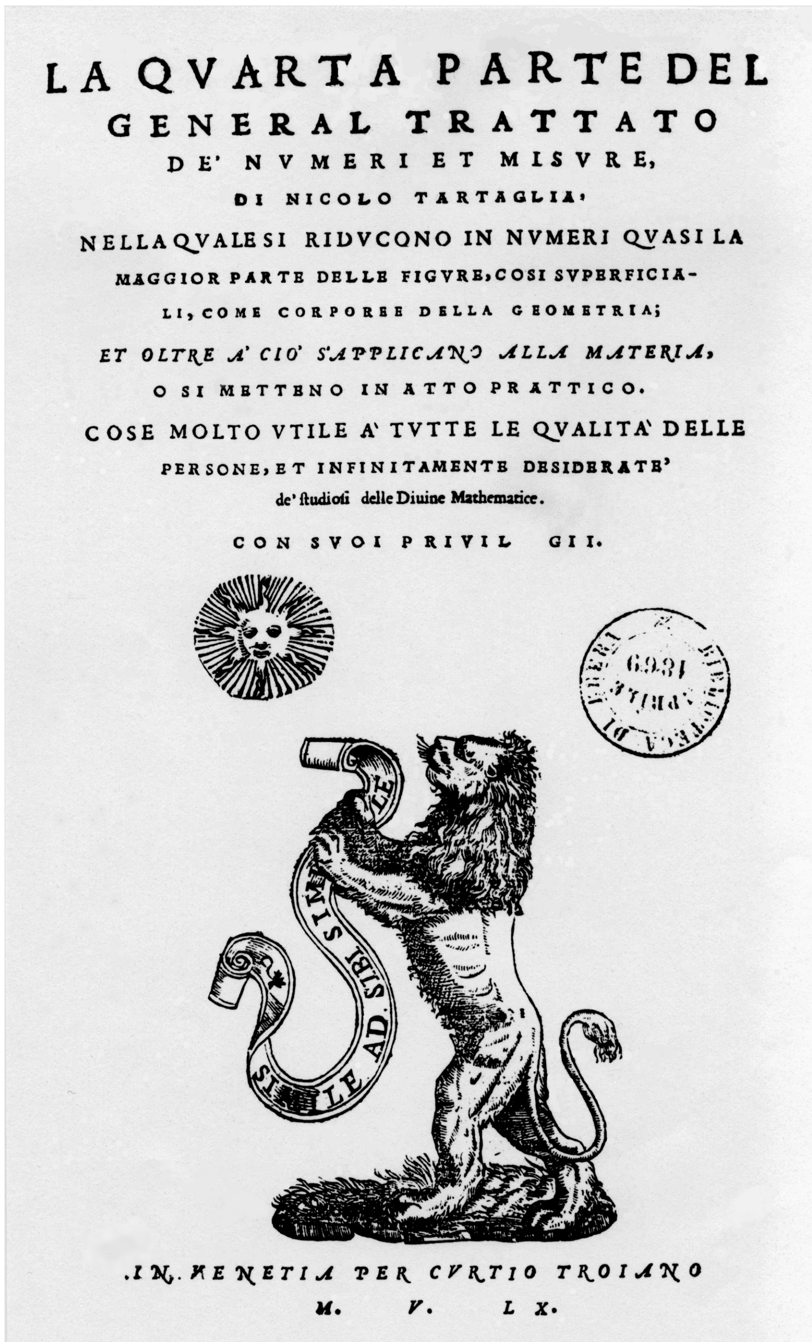
Libri	5
Fogli	56, ossia 112 pagine
Pubblicazione	1560, Venezia
Contenuto	Esposizione di geometria pratica con molte figure e contiene la rassegna dei sistemi di misure in uso nelle principali città italiane.
Dedica	*"Al Magnifico Messer Daniel D'Anna Patrone, et Signor mio sempre Osservandissimo.."*

Nella seconda ristampa, la prefazione è di Curzio Troiano e porta la data del "I *di Genaro* MDLX".

3.4 Quarta parte

eBook - General trattato de' numeri et misure (4)

Figura 5: Frontespizio della Quarta Parte (Venezia, 1560) del *General trattato di numeri et misure* di N. Tartaglia



LA QVARTA PARTE DEL
GENERAL TRATTATO
DE' NVMERI ET MISVRE,
DI NICOLO TARTAGLIA.
NELLA QVALE SI RIDVCONO IN NVMERI QVASI LA
MAGGIOR PARTE DELLE FIGVRE, COSI SVPERFICIA-
LI, COME CORPOREE DELLA GEOMETRIA;
ET OLTRE A' CIO' S'APPLICANO ALLA MATERIA,
O SI METTENO IN ATTO PRATTICO.
COSE MOLTO VTILE A' TVTTE LE QVALITA' DELLE
PERSONE, ET INFINITAMENTE DESIDERATE'
de' studiosi delle Diuine Mathematice.
CON SVOI PRIVILEGII.

IN VENETIA PER CVRTIO TROIANO
M. D. LX.

La ***quarta parte*** *del / general trattato, / de nvmeri et misvre, / di Nicolo Tartaglia; / nella qvale si ridvcono in nvmeri qvasi la / maggior parte delle figvre, così svperficia- / li, come corporee della geometria; / et oltre a ciò s'applicano alla materia, / o si metteno in atto prattico. / Cose molto vtile à tutte le qualità delle / persone, et infinitamente desiderate, / dè studiosi delle Diuine Mathematice. / Con svoi privilegii* [Impresa editoriale con leone o leonessa rampante rivolto / a verso il Sole e che tiene negli artigli un nastro con la scritta *"Simile a sibi simile"*] *In Venetia per Curtio Troiano / M. V. LX.*

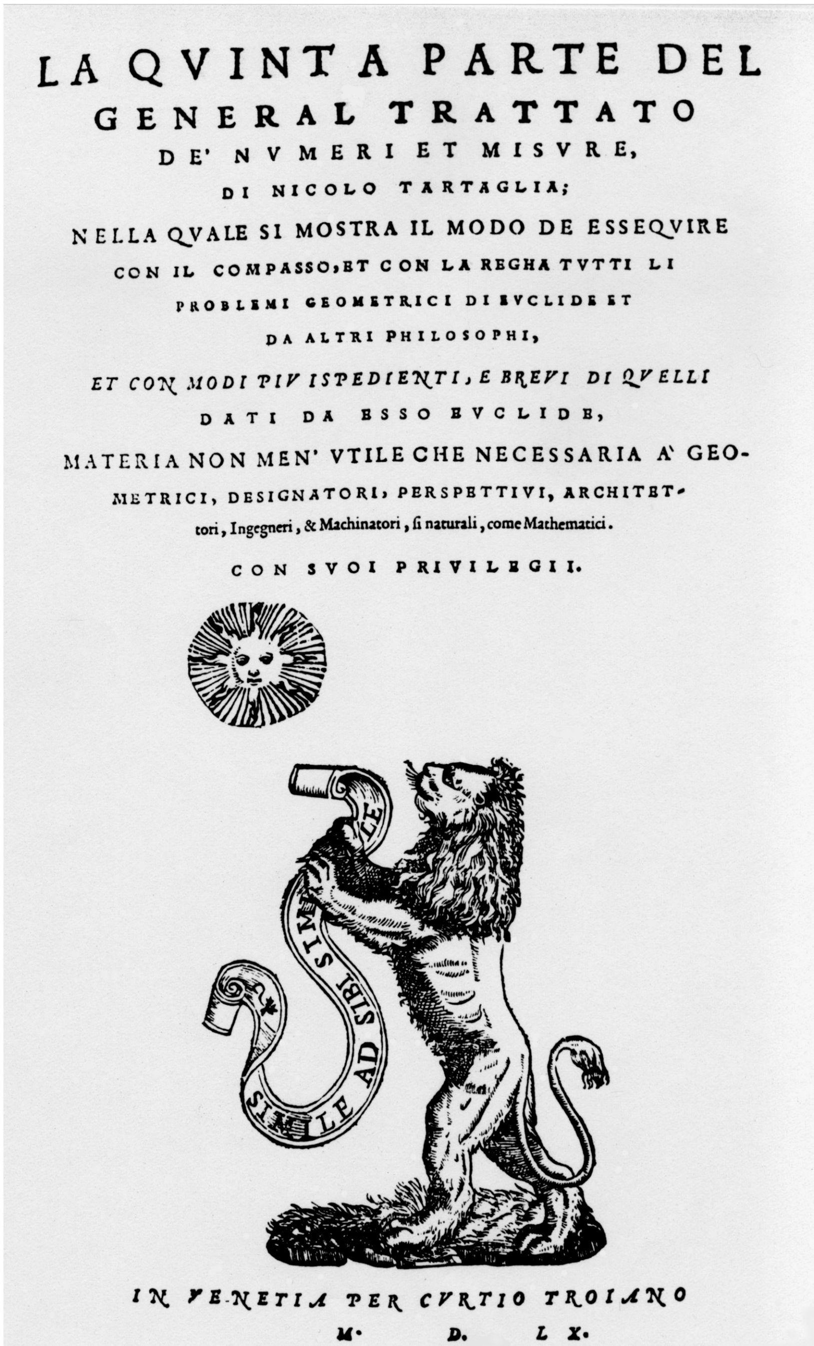
Libri	3
Fogli	68, ossia 136 pagine
Pubblicazione	1560, Venezia
Contenuto	Trattato di geometria teorica, e presenta: il problema della costruzione dell'ettagono regolare, propostogli da Ferrari durante la disfida; il contenuto dei libri di Archimede "*Sulla sfera e sul cilindro*"; geometria piana e solida; lunule di Ippocrate; viene dimostrata l'impossibilità della quadratura del cerchio attraverso le lunule. L'autore dichiara impossibile costruire qualsiasi poligono regolare con l'uso del solo compasso, si interessa della duplicazione del cubo, studia il settore circolare, il segmento circolare e i poliedri regolari.
Dedica	*"Al molto illustre e valoroso Signore, il Conte Camillo Martinengo, Signore et Padron, mio sempre osservandissimo"*

Nell'inventario dei beni di Tartaglia questa quarta parte è citata "in folio" cioè stampata, ma non rilegata. Mentre il libro termina con la dicitura *"...in Vinagia per Comin da Tridino MDLVI."*, la fine del frontespizio mostra la data 1560; pertanto questa parte venne divulgata dopo la morte di Tartaglia.

3.5 Quinta parte

eBook - General trattato de' numeri et misure (5)

Figura 6: Frontespizio della Quinta Parte (Venezia, 1560) del *General trattato di numeri et misure* di N. Tartaglia



LA QVINTA PARTE DEL
GENERAL TRATTATO
DE' NVMERI ET MISVRE,
DI NICOLO TARTAGLIA;
NELLA QVALE SI MOSTRA IL MODO DE ESSEQVIRE
CON IL COMPASSO, ET CON LA REGHA TVTTI LI
PROBLEMI GEOMETRICI DI EVCLIDE ET
DA ALTRI PHILOSOPHI,
ET CON MODI PIV ISPEDIENTI, E BREVI DI QVELLI
DATI DA ESSO EVCLIDE,
MATERIA NON MEN' VTILE CHE NECESSARIA A' GEO-
METRICI, DESIGNATORI, PERSPETTIVI, ARCHITET-
tori, Ingegneri, & Machinatori, si naturali, come Mathematici.
CON SVOI PRIVILEGII.

IN VENETIA PER CVRTIO TROIANO
M. D. LX.

La ***quinta parte*** *del / general trattato, / de nvmeri et misvre, / di Nicolo Tartaglia; / nella qvale si mostra il modo de esseqvire / con il compasso, et con la regha tvtti li / problemi geometrici di Evclide et / da altri philosophi, / et con modi piv ispedienti, e brevi di qvelli / dati da esso Evclide, / materia non men'vtile che necessaria à geo- / metrici, designatori, perspettivi, architet- / tori, Ingegneri, & Machinatori, si naturali, come Mathematici. / Con svoi privilegii* [Impresa editoriale con leone o leonessa rampante rivolto / a verso il Sole e che tiene negli artigli un nastro con la scritta *"Simile a sibi simile"*] *In Venetia per Curtio Troiano/M. V. LX.*

Libri	3
Fogli	94, ossia 188 pagine
Pubblicazione	1560, Venezia
Contenuto	Si mostra il modo di eseguire con riga e compasso tutti i problemi geometrici posti da Euclide ed altri, con metodi più brevi. Della disputa con Ferrari e Cardano vi sono descritti alcuni momenti polemici e viene nuovamente riportato il problema della costruzione dell'ettagono regolare. Viene introdotta la tecnica geometrica del compasso ad apertura fissa, con cui si risolvono i problemi posti dal Ferrari nel terzo cartello, ed anche problemi di Euclide, compresa la costruzione del pentagono regolare.
Dedica	Firmata da Curzio Troiano, recita *"Al Illustrissimo Signore, il Signor Sforza Pallavicino, Marchese di Corte Maggiore, di Borgo Sandonino, di Fiorenzuola, Conte e Barone, et Governatore Generale del Serenissimo Domio Veneto [...] a voi la dedico, et dono, accioche ella sotto la protettione del nome vostro passi per ogni luogo secura da morsi de malefici."*

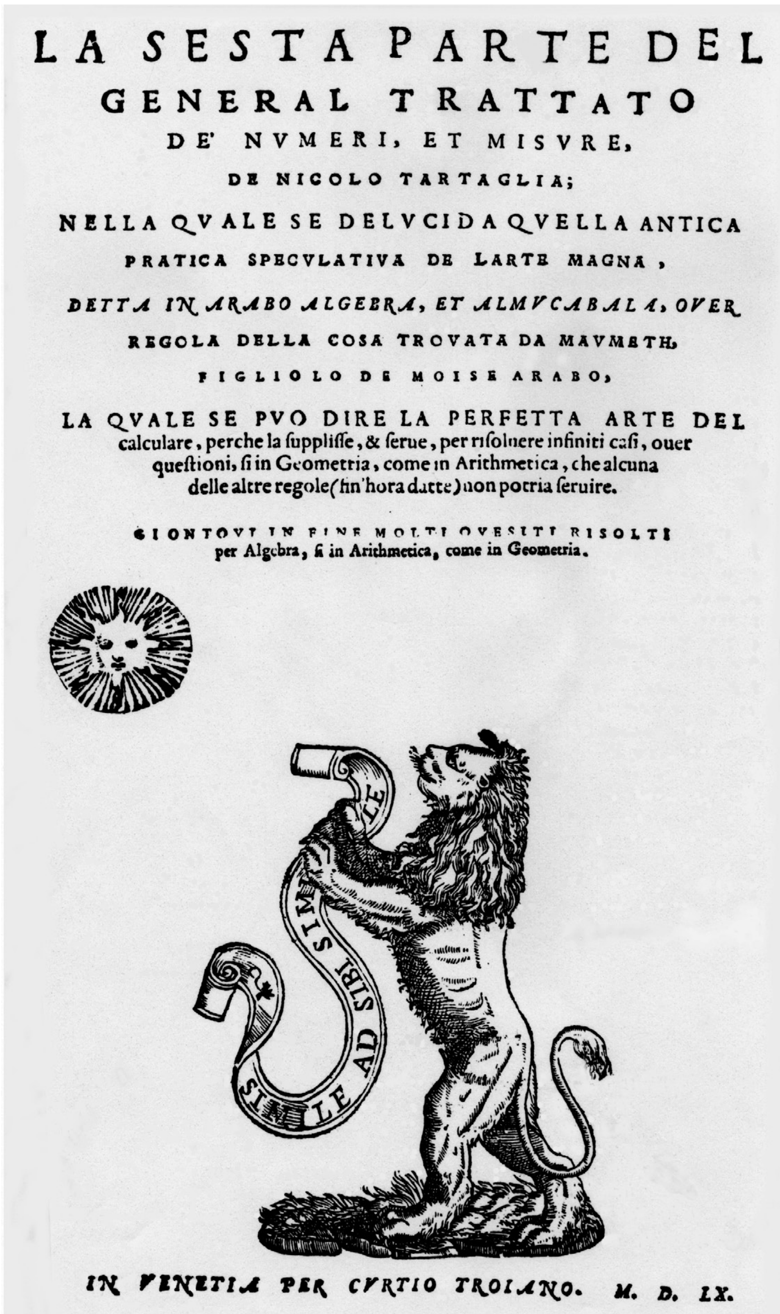
Il frontespizio raffigura solo lo stemma dell'editore e non più il ritratto di Tartaglia, inoltre annuncia il contenuto di tale parte.

Il rancore che Tartaglia prova per Cardano è testimoniato da moltissime frasi che denotano la mancata fede che il milanese aveva nei suoi confronti.

3.6 Sesta parte

eBook - General trattato de' numeri et misure (6)

Figura 7: Frontespizio della Sesta Parte (Venezia, 1560) del *General trattato di numeri et misure* di N. Tartaglia



LA SESTA PARTE DEL
GENERAL TRATTATO
DE' NVMERI, ET MISVRE,
DE NICOLO TARTAGLIA;
NELLA QVALE SE DELVCIDA QVELLA ANTICA
PRATICA SPECVLATIVA DE LARTE MAGNA,
DETTA IN ARABO ALGEBRA, ET ALMVCABALA, OVER
REGOLA DELLA COSA TROVATA DA MAVMETH,
FIGLIOLO DE MOISE ARABO,
LA QVALE SE PVO DIRE LA PERFETTA ARTE DEL
calculare, perche la ſuppliſſe, & ſerue, per riſolnere infiniti caſi, ouer
queſtioni, ſi in Geometria, come in Arithmetica, che alcuna
delle altre regole (fin'hora datte) non potria ſeruire.

GIONTOVI IN FINE MOLTI QVESITI RISOLTI
per Algebra, ſi in Arithmetica, come in Geometria.

IN VENETIA PER CVRTIO TROIANO. M. D. LX.

La ***sesta parte*** *del / general trattato, / de nvmeri et misvre, / di Nicolo Tartaglia; / nella qvale se delvcida qvella antica / pratica specvlativa de larte magna, / detta in arabo algebra, et almvcabala, over / regola della cosa trovata da Mavmeth, / figliolo de Moise arabo, / la qvale se pvo dire la perfetta arte del / calculare, perche la supplisse, & serue, per risoluere infiniti casi, ouer / questioni, si in Geometria, come in Arithmetica, che alcuna / delle altre regole (fin'hora datte) non potria seruire. / Giontovi in fine molti qvesiti risolti/ per Algebra, si in Arithmetica, come in Geometria* [Impresa editoriale con leone o leonessa rampante rivolto/a verso il Sole e che tiene negli artigli un nastro con la scritta *"Simile a sibi simile"*] *In Venetia per Curtio Troiano. M.D.LX.*

Fogli	48, ossia 96 pagine
Pubblicazione	1560, Venezia
	1578, Parigi ed Anversa, in francese, con il titolo *L'Arithmetique de Nicola Tartaglia, grand mathematicien et prince de praticien.*
	1615, Parigi, seconda edizione.
Dedica	Nicolò la dedica all'algebra e scrive *"La sesta parte [..] nella quale si delucida quella antica pratica speculativa de l'Arte Magna, detta in arabo Algebra, et Almucabala, over Regola della cosa trovata da Maumeth, figliolo di Moise Arabo. Laquale se può dire la perfetta arte del calculare, perche la supplisse et serve, per risolvere infiniti casi, over questioni, si in Geometria come in Arithmetica, che alcuna delle altre regole (fin'hora dette) non potria servir."*

Questa Sesta parte era appunto quella che doveva contenere l'algebra ed in particolare la tanto discussa e contrastata regola generale per la ricerca delle soluzioni delle equazioni di terzo grado; tale parte, non solo non era ancora terminata, ma si trovava per molti versi in uno stato preliminare sotto forma di note o abbozzi. L'editore Curzio Troiano, raccolse gli appunti del matematico bresciano e li fece sistemare da un matematico, ed in seguito, dedicandola al governatore di Verona, la pubblicò.

Nella dedica al governatore di Verona Girolamo Martinengo, lo stampatore scrive:

> *...essendo per compire l'ultima parte, nella quale amplissimamente si trattava dell'Algebra, parte speculativissima & d'infinita inventione della Matematica, fù con infinito danno di tutti quei, che delle buone lettere si dilettano dalla morte rapito; ma di tanto ella ci fù pietosa, & la fortuna favorevole, che non cel t olse prima, ch'egli havesse in diversi fragmenti, & in molti memoriali scritta, tutta intorno a tal parte l'intentione sua, tanto, che non li restava a far altro se non quello, che egli haveva in molte carte scritto, & con ragionamento interrotto, raccogliere in un volume, & con continuato discorso, fatica ch'ogni mediocre intendente delle Matematiche, poteva condurla a fine. Là onde havendo io gia stampate tutti l'altri suoi volumi, & conoscendo l'utile, che questa parte può apportare al mondo, mi pareva essermi trasmutato nella crudeltà, se non faceva ancora stampare tal parte; onde fattola a un dotto Matematico mettere in continuato discorso, l'ho fatta finalmente stampare.*

Purtroppo è assente la parte moderna dell'algebra, cioè principalmente della teoria delle equazioni di terzo grado, infatti, questa parte termina con le equazioni di secondo grado e con problemi che a esse si riconducono.

Poiché è pressoché improbabile che tra le carte di Tartaglia non vi siano stati problemi ed equazioni risolte di terzo grado, ciò che si suppone è che l'editore avesse timore di rinnovare l'antica polemica, rischiando di provocare un danno a sé nella vendita di questo libro.

In generale, però, non si può concludere che l'assenza della parte moderna non sia stata una scelta deliberata di Tartaglia.

La struttura del contenuto è espresso in forma tradizionale come fu fatto per le opere d'abaco, senza novità teoriche importanti.

Le dimostrazioni degli algoritmi risolutivi rimandano alle trattazioni di Fibonacci e Pacioli; la sola differenza è che mentre quest'ultimo riprende letteralmente le dimostrazioni di Fibonacci, utilizzando anche gli stessi numeri, Tartaglia pur rimanendo fedele allo schema tradizionale varia i dati numerici degli esempi.

Emerge una rinuncia alla complessità delle equazioni di grado superiore al secondo, a fronte di un'algebra tradizionale che pone dei problemi complessi esclusivamente per quanto riguarda la loro messa in equazione.

Nei cinquantasei *"Casi over quesiti posti per meglio instruire et ammaestrare et ancora far pratica cerca l'operare in l'arte di Algebra"* che chiudono l'opera vi è qualche originale trattazione nelle applicazioni. Le materie sono le stesse di quelle trattate nelle opere d'abaco e di algebra: interessi, compagnie, baratti, con una parte finale di problemi geometrici.

Particolarmente complessi sono problemi trattati che non vengono presentati a difficoltà crescente e sembrerebbero non essere destinati ad un lettore principiante intento ad impratichirsi delle tecniche fino a padroneggiarle completamente[37].

[37] Giusti (2007)

Figura 8: Indice della Sesta Parte del *General trattato*

L'indice riporta una divisione in tre parti:

i. La regola di Algebra, ove si contengono tutti i capitoli;

ii. Documenti utilissimi & necessarii;

iii. Quesiti risolti per l'Algebra.

La prima parte, che occupa le prime 10 carte, si può dividere a sua volta in due sezioni.

La prima sezione è dedicata all'introduzione dell'incognita (la cosa), delle sue potenze, della formazione di polinomi (in particolare binomi e trinomi) e delle operazioni con questi.

Cap. I *Della qualità & proprietà de la regola di Algebra.*

1. Della numeratione, over denominatione, over representatione delle diverse spetie de quantità, considerati in Algebra, quale chiamamo dignità.

2. Che cosa siano, over se intendano le dette dignità in Algebra.

3. Del sumar le dette dignità.

4. Del sottrar un numero di una dignità del numero di unaltra.

5. Del multiplicare delle predette dignità l'una fia l'altra.

6. Del partire delle dignità maggiori per le minori.

7. Del partire delle dignità menori per le maggiori.

8. Del modo di saper cavar, over representare la R a ogni numero de dignità secondo la specie.

9. Del sumar, sottrar, multiplicar, & partir de binomi & residui, over recisi di dignità Algebratice.

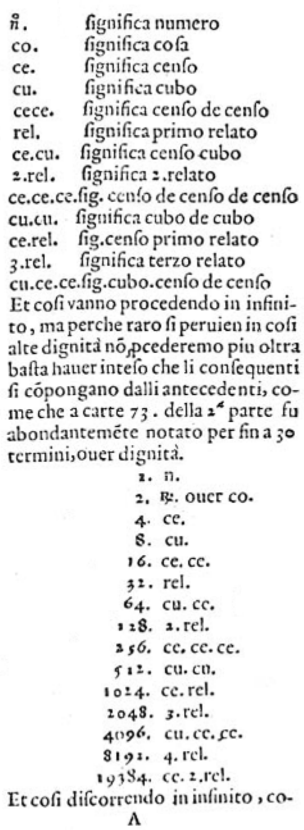
10. Del summar de binomi, & residui di dignità Algebratice.

11. Del sottrar de binomi & trinomi, & residui di dignità Algebratice.

12. Del multiplicare de binomi & trinomi, & residui di dignità Algebratice.

13. Del partir de binomi, over residui per binomi, over residui de dignità Algebratice, & ancora per numero simplice.

Figura 9: Estratto dalla prima pagina della Sesta Parte del *General trattato*


ñ. ſignifica numero
co. ſignifica coſa
ce. ſignifica cenſo
cu. ſignifica cubo
cece. ſignifica cenſo de cenſo
rel. ſignifica primo relato
ce.cu. ſignifica cenſo cubo
2.rel. ſignifica 2.relato
ce.ce.ce.fig. cenſo de cenſo de cenſo
cu.cu. ſignifica cubo de cubo
ce.rel. fig.cenſo primo relato
3.rel. ſignifica terzo relato
cu.ce.ce.fig.cubo.cenſo de cenſo
Et coſi vanno procedendo in infinito, ma perche raro ſi peruien in coſi alte dignità nõ pcederemo piu oltra baſta hauer inteſo che li conſequenti ſi cõpongano dalli antecedenti, come che a carte 73. della 2ª parte fu abondantemẽte notato per fin a 30 termini, ouer dignità.

1. n.
2. R. ouer co.
4. ce.
8. cu.
16. ce. ce.
32. rel.
64. cu. ce.
128. 2. rel.
256. ce. ce. ce.
512. cu. cu.
1024. ce. rel.
2048. 3. rel.
4096. cu. ce. ce.
8192. 4. rel.
16384. ce. 2. rel.

Et coſi diſcorrendo in infinito, co-
A

La seconda sezione tratta dei sei capitoli (tre semplici e tre composti) dell'algebra, con le loro dimostrazioni e con alcuni esempi che ne illustrano i relativi algoritmi risolutivi.

Cap. II *Delli numeri, & dignità che sono necessarii nella computatione, della antica & commune Algebra.*

1. Qual sia il principal fondamento della regola di Algebra.

2. La regola del primo capitolo simplice.

3. Essempio operativo al detto primo capitolo simplice.

4. Regola del secondo capitolo simplice.

5. Essempio operativo al secondo capitolo simplice.

6. Un altro essempio al secondo capitolo simplice.

7. La regola del terzo capitolo simplice.

8. Essempio operativo al detto terzo capitolo simplice.

9. Communi sententie da notare per le equationi composite, & altre.

10. Regola del primo capitolo composito.

11. Essempio operativo al detto primo capitolo composito.

12. Regola del secondo capitolo composito.
13. Essempio operativo al detto secondo capitolo composito.
14. Regola del terzo capitolo composito.
15. Essempio operativo al detto terzo capitolo composito.
16. La demostratione geometrica adutta sopra le regole di tre capitoli compositi.
17. Quando il censo & cose, sono eguali al numero.
18. Seconda dimostratione, cioè quando le cose e numeri sono eguali al censo.
19. Terza dimostratione; cioè quando le cose sono eguali al censo & numero.
20. De censi di censi eguali a numero.
21. Essempio operativo al detto capitolo de ce. ce. eguali a numero.
22. De censi di censi & censi, eguali a numero.
23. Essempio operativo al detto capitolo de ce. ce. & ce. eguali a numero.
24. De censi & numero, eguali a censi de censi.
25. Essempio operativo al detto capitolo de ce. & numero eguali a ce. ce.

Per quanto concerne la seconda parte vi sono i *Documenti utilissimi & necessarii* suddivisi in

1. *Della positione de gli casi over quesiti.*
2. *Del levare gli superflui, & ristorare li diminuti delle equationi.*
3. *Del levare le radici de gli estremi delle equationi.*
4. *Dello investigare se delli estremi delle equationi, si possono pigliare le loro radici.*
5. *Del levare gli rotti delle equationi.*
6. *Del degradare over schisare delle equationi.*
7. *Della osservantia de alcuni capitoli irregolari.*

I primi sei paragrafi della prima parte introducono le operazioni aritmetiche con le potenze. Tartaglia considera potenze successive fino al nono relato[38], formando una tavola in cui a ogni denominazione di potenza è associato il segno (cioè l'esponente) corrispondente, a cominciare da 0 per il numero.

L'algebra delle potenze è presente quando dice che[39]:

> *" [...] bisogna haver in memoria i segni di dette dignità, & anchora le specie della dignità corrispondente a ciascun numero, cioè se la summa del segno delli cubi (qual è* 3*) con il segno delli ce. cu (qual è* 6*) fa* 9*, non havendo in memoria che'l detto* 9 *è il segno di cubi de cubi, non sapressimo che a multiplicar cubi fia censi cubi, facesse cubi de cubi, e però bisogna in ciò advertire."*

[38] cioè fino all'esponente 29
[39]GT6, c. 2^r.

La stessa cosa è avvalorata per le divisioni delle potenze[40]:

> *"Anchora per satisfarti in tutto te voglio dar una regola per la quale da te medesimo potrai saper la specie delle dignità, che ti doveran venire nelli advenimenti in ogni partitione di queste dignità, la qual regola è il converso di quella, che ti dei nella* 11ª *sopra del multiplicare di queste dignità, cioè alla dignità, che si ha da partire, bisogna segnarla del suo numero ordinario detto sopra la detta* 11ª *di questo, & similmente segnar anchora il partitore [...] E però sottrando il segno del partitore (essendo menore) & il restante sarà il segno del advenimento di tal partire. Essempi gratia volendo partire primi relati per censi, per trovar la dignità del advenimento, cava il segno di censi (che è* 2*) dal segno di primi relati (che è* 5*) restarà* 3 *& perché* 3 *è il segno di cubi, diremo che a partire primi relati per censi ne vien cubi"*

Il metodo si arresta quando la potenza del divisore è maggiore di quella del dividendo:

> *"Ma quando che per sorte tu non potesti cavare il segno del numero ordinario delle dignità del partitore, dal segno del numero ordinario delle dignità che haverai da partire saria segno evidente, che le dignità del partitore sariano maggiore delle dignità, che haverai da partire, e però tal partimento (come di sopra è stato detto) non si potria far realmente secondo le precedenti, anci in tal caso bisogna rispondere in forma di rotto."*

Si ottiene una frazione dividendo sia una potenza minore per una maggiore, sia un numero minore per uno maggiore. Però, mentre la divisione di 4 per 6 dà la frazione $\frac{4}{6}$, la divisione di 4 ce. per 6 cu. dà $\frac{4\,\text{ce.}}{6\,\text{cu.}}$; Tartaglia non solo non semplifica i censi al numeratore con i cubi al denominatore, ma nemmeno riduce la frazione $\frac{4}{6}$ a $\frac{2}{3}$.

Similmente avviene nell'estrazione di radice: estraendo la radice dei censi vengono cose, ad esempio la radice di 4 censi è 2 cose. Analogamente danno cose la radice cubica dei cubi e la radice quarta dei censi di censi. Tartaglia però opera questa semplificazione solo quando i coefficienti hanno radici razionali, mentre lascia inalterate le radici irrazionali. Pertanto, la radice di 3 censi è R̷ (3 ce.)[41]:

> *"Bisogna sapere quando che il numero di censi sarà quadrato tai censi haveranno radice discreta, la qual radice sarà cose.... Ma quando che il numero di censi non sarà quadrato, tai censi non haveranno R̷ discreta, ma sorda. Essempi gratia la R̷ de 3 ce. non si può cavare, ma se representarà in questa forma: R̷ 3 ce."*

Perciò, nel caso in cui si abbia a che fare con un'equazione in cui sono presenti radici di questo tipo, occorrerà eliminarle preliminarmente isolandole a un membro ed elevando al quadrato:

[40] GT6, c. 3ᵛ
[41] GT6, c. 13ʳ

> *"Poneremo caso, che havessimo 5 ce. più 8 più R 20 cen., eguali a 100 .... Or discompagna, over lieva da esta radice, le quantità che sono in sua compagnia, cioè 5 ce. più 8, levandole però ancora medemamente dall'altro estrema, cioè da gli 100, & resterà detta R 20 ce. eguali a 92 men 5 ce. Hor multiplicaremo etti residuali estremi in sé medesimi, & haveremo poi 20 ce. eguali a 8464 più 25 ce. ce. men 920 ce. "*

ossia:

$$\begin{aligned} 5\,\text{ce.} + 8 + \sqrt{20\,\text{ce.}} &= 100 \\ \sqrt{20\,\text{ce.}} &= 100 - 8 - 5\,\text{ce.} \\ \left(\sqrt{20\,\text{ce.}}\right)^2 &= (92 - 5\,\text{ce.})^2 \\ 20\,\text{ce.} &= 8464 + 25\,\text{ce.}\,\text{ce.} - 920\,\text{ce.} \end{aligned}$$

L'accettazione di coefficienti irrazionali avrebbe consentito di risolvere il problema, invece, con questo procedimento il grado dell'equazione risultante aumenta, e può condurre a volte *"alla impossibilità di trare in luce esse equatione, perché non havemo capitolo di regolare tante diverse quantità"*. Gli unici radicali che vengono accettati sono quelli contenuti nel termine noto dell'equazione[42]; in questo caso si procederebbe senza eliminare preventivamente questi ultimi elevando al quadrato.

Negli scritti non si fa cenno a soluzioni delle equazioni di quarto grado, al di fuori di quelle biquadratiche. Il solo accenno è sostanzialmente negativo: *"sin'hora non si ha regola del capitolo de ce.ce., cu. e ce., eguali a numero"* [43]. Per le equazioni del tipo $ax^4 + bx^3 + cx^2 = n$, Tartaglia esamina se il primo membro è un quadrato perfetto[44]

> *"Consideraremo che la radice di uno trinomio non può essere altro che uno binomio, & questo perché a multiplicare el binomio in sé medesimo gli interviene gli quadrati de ambedue le parti over termini di quelle, & il doppio della superficie dell'una in l'altra di esse parti over termini, come Euclide afferma nella quarta del secondo, li quali quadrati & doppio di superficie dell'una in l'altra parte, sempre vengono a esser un trinomio, videlicet quando essi quadrati non sono comunicanti. Adunque se ditto nostro trinomio haverà due de gli numeri dinotanti, le dignità algebraice di quello che sian numeri quadrati, & ancor che esse dignità dinotate per ditti numeri quadrati habbino radice quadra, perché di altra sorte non intendiamo per hora, determinaremo che di quello si possi havere la sua radice; ma se non haverà dui numeri quadrati & ancora le dignità dinotate per essi numeri, radici, non credo che di quello sia possibile haverne altrimenti ditta sua radice"*

Ciò significa che al fine di estrarre la radice del primo membro è necessario che a e c, rispettivamente coefficienti di x^4e x^2, siano dei quadrati. Tartaglia non tratta della

[42]dello stesso filone di pensiero era pure al-Kwārizmī.
[43]GT6, c. 13^{v}
[44]GT6, c. $13^{v} - 14^{r}$

condizione da assegnare al coefficiente b di x^3 ossia che deve soddisfare $b = 2\sqrt{ac}$; questo a causa della limitazione a coefficienti razionali.

Alla semplicità della struttura algebrica, limitata alle sole equazioni di secondo grado, fa riscontro la complessità della formalizzazione del problema, che occupa la maggior parte della soluzione; nelle pagine seguenti si riporteranno due esempi di applicazioni.

Problema 2[45]

> *"Poniamo che la circonferentia del circulo equinotiale della sfera terrena sia 29.412 miglia, & che da uno medesimo punto della circonferentia del circulo equinotiale della celeste sfera del firmamento, in uno medesimo punto, si partano dui punti mobili, & che uno vada verso oriente il primo giorno, tanto che quel spacio del camino che'l fa, viene a occupare uno miglio della circonferentia del circulo equinotiale della sfera terrena, il secondo 2, il terzo 3, & così ogni giorno sempre crescendo uno. L'altro vada verso occidente il primo giorno tanto che il camino che'l fa, viene a occupare uno miglio della circonferentia del circulo equinotiale della sfera terrena, il secondo 8, il terzo 27, il quarto 64, & così ogni giorno procedendo ordinatamente, secondo l'ordine de gli numeri cubi. Si dimanda in quanti giorni questi due punti si congiungeranno in uno medesimo punto."*

Il problema è risolto da Tartaglia ponendo che i punti si incontrino in una cosa x di giorni, e calcolando il cammino dei due punti secondo le regole enunciate nella seconda parte: il primo percorrerà $(x+1)\frac{x}{2}$ miglia e il secondo $(x^2+2x+1)\frac{x^2}{4}$ miglia. E dunque[46]:

$$\begin{aligned}
(x+1)\frac{x}{2} + (x^2+2x+1)\frac{x^2}{4} &= 29\,412 \\
\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{4} &= 29\,412 \\
\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{2} + \frac{3x^2}{4} + \frac{x}{2} &= 29\,412 \\
x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x &= 117\,648
\end{aligned}$$

Ma, poiché il Tartaglia ignora la relazione tra la somma dei primi n interi e quella dei loro cubi[47], è costretto a risolvere un'equazione di quarto grado; affinché il primo membro diventi il quadrato di un trinomio, egli osserva che basta aggiungere 1; un'osservazione questa non immediata per un principiante.

[45] GT6, c. 16^v
[46] GT6, c. $16^v - 17^r$
[47] Si veda il brano riportato nella Seconda Parte del GT.

Problema 5[48]

> *"Uno compra uno credito de ducati 1000 per duc. 600, quali duc. 600 detto compratore gli esborsa attualmente subito concluso il mercato, & poi a da riscotere detto credito in anni dieci, videlicet duc. 100 in fine di ciascuno di essi dieci anni. Se dimanda quanto guadagna per cento a l'anno detto comprator del suo capitale."*

L'esempio proposto tratta del problema del rimborso di un prestito a rate con interesse semplice (anche se non esplicitato dall'autore).

La complessità della questione deriva essenzialmente dalla sua ambiguità, non essendo chiaro come i rimborsi annuali di 100 ducati debbano essere divisi tra capitale e interessi; in altre parole in che proporzione essi debbano dividersi tra pagamento degli interessi e rimborso di capitale. Tartaglia è cosciente dell'ambiguità del problema, e comincia a discutere le varie possibilità introducendo un tempo "virtuale" nel quale il creditore acquista il suo guadagno, ma nessuno dei due risultati è corretto.

Nel primo caso preso in esame, di 600 ducati, il creditore ne guadagnerebbero 400 in 10 anni, dunque 40 all'anno per un interesse del $6\frac{2}{3}\%$. Questa possibilità è da escludere perché calcolata per difetto, dato che i 1000 ducati non sono riscossi tutti alla fine dei 10 anni, ma a rate di 100 all'anno.

Nel secondo caso preso in esame, il creditore ne guadagnerebbero 400 in 6 anni con un interesse dell'$11\frac{1}{9}\%$. Questa possibilità contiene due errori: da una parte non si tiene conto che alla fine dei 6 anni non tutto il credito è stato riscosso, e dall'altra non si prende in considerazione il fatto che come in precedenza i pagamenti avvengono a rate annuali, cominciando prima dello scadere del sesto anno. Per giungere alla soluzione, Tartaglia postula una compensazione di questi due fattori.

Il guadagno che si trae dal rimborso anticipato dei 100 ducati della fine del primo anno fino allo scadere del tempo virtuale di prestito deve essere uguale alla perdita registrata a causa del ritardato rimborso degli ultimi 100 ducati, dalla scadenza virtuale alla fine del decimo anno. Lo stesso deve avvenire per il secondo e il penultimo rimborso, per il terzo e il terzultimo, e così via. A questo punto l'equazione è stabilita, e si può passare alla sua soluzione[49]:

> *"Essendo una co. men 1 eguale a 10 men 1 co., come chiaramente per le ragion addutte a da essere, aggiongendo a ciascuno de gli estremi quello che ciascun di loro si trova havere di meno, secondo gli ordini, si troverà la co. valer* $5\frac{1}{2}$ *, & tanti sono gli anni nei quali veramente detto comprator con detti suoi duc. 600 de capitale guadagna li sopradetti duc. 400."*

Una volta trovati gli anni virtuali, il calcolo dell'interesse è immediato attraverso l'algebra:

[48] GT6, c. 18ᵛ
[49] GT6, c. 19ʳ

"Volendosi vedere quanto guadagna per cento all'anno, poni da capo che guadagni 1 co. de duc. per cento all'anno; adunque de duc. 600 de capitale guadagnerà 6 co. de duc. in un sol'anno, & in anni $5\frac{1}{2}$ *ne guadagnerà 33 co. E perché in detto tempo guadagna ancora duc. 400, come si ha detto, 33 co. saranno eguale a duc. 400, & eseguendo il capitolo si troverà la co. valer* $12\frac{4}{33}$ *, e duc.* $12\frac{4}{33}$ *se dirà che detto comprator guadagna per cento all'anno a semplice merito."*

4 Le equazioni di terzo e quarto grado

4.1 Cronologia della scoperta delle equazioni di terzo e quarto grado

$1505 - 1515$	Scoperta della risoluzione delle equazioni di terzo grado del tipo $x^3 + px = q$; $x^3 = px + q$; $x^3 + q = px$ ad opera di Scipione Dal Ferro.
1530	Tartaglia afferma di aver trovato la soluzione generale delle equazioni: $x^3 + ax^2 = b$; $x^3 + a = bx^2$
12 **febbraio** 1535	Tartaglia trova la soluzione del "capitolo" $x^3 + px = q$ dopo la sfida di Anton Maria Fiore.
13 **febbraio** 1535	Tartaglia trova la soluzione del "capitolo" $x^3 = px + q$ dopo la sfida di Anton Maria Fiore.
25 **marzo** 1539	Tartaglia confida in versi a Cardano le sue tre regole per la risoluzione delle equazioni $x^3 + px = q$; $x^3 = px + q$; $x^3 + q = px$.
4 **agosto** 1539	Tartaglia riceve una lettera da Cardano nella quale quest'ultimo, per la terza volta, chiede spiegazioni sulla circostanza nota oggi come "caso irriducibile". Tartaglia però non risponde a tono.
1540	Ferrari risolve le equazioni di quarto grado.
1542	Cardano e Ferrari trovano a Bologna, presso Annibale Della Nave, la soluzione del suocero di questi, Scipione Dal Ferro.
1545	Cardano pubblica a Norimberga la sua *Ars Magna* con la risoluzione delle equazioni di terzo e quarto grado
1546	Tartaglia pubblica *Quesiti et Inventioni diverse* in Venezia a sue spese a dimostrazione dell'urgenza dell'autore che vuol chiarire la parte avuta nella scoperta e denunciare Cardano di spergiuro e di scarsa conoscenza matematica.
10 **febbraio** 1547	Ferrari lancia a Tartaglia il suo primo cartello di sfida.
24 **luglio** 1548	Tartaglia risponde all'ultimo cartello di sfida di Ferrari
10 **agosto** 1548	Sfida tra Tartaglia e Ferrari a Milano
1572	Rafael Bombelli pubblica a Bologna l'Algebra scritta da lui attorno al 1550, nella quale si supera il "caso irriducibile" con un sistematico uso dei numeri complessi. Bombelli amplia inoltre lo studio delle equazioni di quarto grado.

4.2 Le equazioni di terzo grado

Il primo vero progresso dell'algebra dopo un sonno che durava da secoli nacque da una disputa intorno alle formule risolutive per le equazioni di terzo grado.

La soluzione di quel tipo di equazioni era stata fino allora ritenuta impossibile, per cui, sapere che esse invece risultavano risolubili, stimolò talmente Tartaglia che fu in grado di trovare lui stesso quelle soluzioni. Il risultato ottenuto, che gli consentì comunque di prevalere sullo sfidante Antonio Maria Fiore, dimostratosi all'atto pratico incapace di utilizzare le formule apprese dal suo antico maestro, era peraltro di per sé talmente importante che il Tartaglia volle annotare persino le date di quel felice ritrovamento: erano il 12 e il 13 febbraio del 1534, secondo lo stile di datazione veneta, o del 1535, nel resto d'Italia.

[D] Per rivendicare la paternità delle equazioni di terzo grado, Tartaglia si trovò coinvolto in una polemica con un altro celebre matematico dell'epoca, Girolamo Cardano: *"una controversia piuttosto complicata e gretta è comunque certo che nessuno dei due protagonisti fu il primo a fare la scoperta"*[50].

Secondo questa tradizione, Tartaglia e Cardano furono vividi attori - insieme a Scipione Dal Ferro, Ludovico Ferrari e ad altri - della polemica più feroce che la storia della matematica ricordi.

Fabio Toscano ricostruisce questo episodio di acerba rivalità e di progresso scientifico: tra Brescia, Venezia, Bologna e Milano, tra successi intellettuali e povertà, giuramenti e tradimenti, astuzie e ingenuità, la storia della più grande contesa matematica dell'epoca[51].

Nel marzo del 1539, a fronte delle ripetute richieste di Cardano di metterlo al corrente della formula risolutiva dell'equazione di terzo grado, Tartaglia scriveva al milanese di non voler divulgare il risultato perché desideroso di pubblicarlo a proprio nome, avendo *"designato di componere un'opera di pratica & insieme con quella, una nuova Algebra"* non appena conclusa la traduzione in volgare degli *Elementi* di Euclide.

A dispetto dei suoi dinieghi però, Tartaglia aveva finito per comunicare a Cardano, in forma criptata, l'algoritmo risolutivo dell'equazione di terzo grado, o meglio dei capitoli di cubo e cose uguale a numero, di cubo uguale a cose e numero e di cubo e numero uguale a cose, cioè di tutte le equazioni di terzo grado prive del termine quadratico.

Di seguito si riportano i versi del *Quesito* XXXIV f. 120v:

[50] BOYER - Storia della matematica
[51] Toscano (2009)

Quando che 'l cubo con le cose appresso
se agguaglia à qualche numero discreto $x^3 + px = q$
trovan dui altri differenti in esso.
Da poi terrai questo per consueto
che 'l loro produtto sempre sia eguale
al terzo cubo delle cose neto,
el residuo poi suo generale
delli lor lati cubi ben sotratti
varra la tua cosa principale.
In el secondo de codesti atti
quando che 'l cubo restasse lui solo $x^3 = px + q$
tu osserverai quant'altri contratti,
Del numero farai due tal part'àl volo
che l'una in l'altra si produca schietto
el terzo cubo delle cose in stolo
Dalla qual poi, per commun precetto
torrai li lati cubi insieme gionti
et cotal somma sara il tuo concetto.
El terzo poi de questi nostri conti $x^3 + q = px$
se solve col secondo se ben guardi
che per natura son quasi congionti.
Questi trovai, et non con passi tardi
nel mille cinquecentè, quatro e trenta
con fondamenti ben saldi e gagliardi
Nella città dal mare intorno centa.

Nel 1545 Cardano diede alle stampe a Norimberga l'*Ars Magna*, nella quale veniva resa pubblica la formula risolutiva dell'equazione cubica.

Cardano riconobbe di aver ricevuto la dimostrazione della regola direttamente da Tartaglia, osservando però che era già stata trovata in precedenza da Scipione del Ferro, presumibilmente attorno al 1515, morto senza divulgarla. Cardano precisava inoltre che Tartaglia era arrivato alla soluzione del problema perché sollecitato da una sfida matematica lanciata da Anton Maria Fiore, discepolo di Del Ferro, come scrive nell'*Ars Magna*:

> *Scipio Ferreus Bononiensis ab hinc triginta fermé capitulum hoc invenit, tradidit verò Anthonio Mariae Florido Veneto, qui cum in certamen cum Nicolao Tartalea Brixellense aliquando venisset, occasionem dedit, ut Nicolaus invenerit & ipse, qui cum nobis rogantibus tradidisset, suppressa demonstratione, freti hoc auxilio, demonstrationem quaesivimus, eamque in modos, quod difficillimum fuit, redacta sic subiiciemus.*

Di fatto, però, privò Tartaglia della possibilità di pubblicare personalmente il primo vero risultato rinascimentale non attribuibile alla matematica classica. Non mancò la replica di Tartaglia con la pubblicazione nel 1546 di *Quesiti et invenzioni diverse* nei quali accusava Cardano di plagio.

4.3 I radicali cubici del tipo $\sqrt[3]{\sqrt{a} \pm b}$

I radicali del tipo $\sqrt[3]{\sqrt{a} \pm b}$ sono coinvolti nella risoluzione delle equazioni di terzo grado. Tartaglia nel *Quesito* XL, f. 124, riporta la lettera di Cardano del 1540 nella quale quest'ultimo si lamenta che *"quel diavolo de messer Zuanne Colle"*, pur non essendo un brillante matematico, si dice capace di risolvere in generale quei particolari radicali cubici, mostrandogli i risultati:

$$\sqrt[3]{\sqrt{108}+10} = \sqrt{3}+1 \qquad \text{e} \qquad \sqrt[3]{\sqrt{108}-10} = \sqrt{3}-1.$$

Cardano chiese aiuto a Tartaglia perché, anche non ammettendolo apertamente, non era in grado di trovare la regola. Pur riferendosi ad un caso particolare, Tartaglia mostra implicitamente un caso generale.

Il matematico bresciano afferma che dalla $\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}$ è possibile ottenere il risultato cercato $\sqrt{3}+1$ sia a partire da $\sqrt{108}$ sia dal 10. Elevando i due membri dell'equazione al cubo si ottiene il sistema

$$\begin{cases} 10 = y^3 + 3xy \\ 108 = \left(x + 3y^2\right)^2 x \end{cases}$$

Infatti, nel caso generale, elevando i due membri dell'equazione $\sqrt[3]{\sqrt{a} \pm b} = \sqrt{x} + y$ si ottiene

$$\sqrt{a} \pm b = \left(x + 3y^2\right)\sqrt{x} \pm \left(y^3 + 3xy\right),$$

e pertanto è possibile ricavare il sistema

$$\begin{cases} a = y^3 + 3xy \\ b = \left(x + 3y^2\right)^2 x \end{cases}$$

Tornando al caso particolare, dice Tartaglia, bisogna riuscire a decomporre il 10 nella somma di un cubo con un opportuno numero divisibile per 3. Provando con $y = 2$ non si ottiene poi un numero multiplo di 3, l'unica possibilità è scegliere $y = 1$ da cui si ottiene $x = 3$. Poiché questi due valori verificano anche la seconda equazione del sistema, si ottiene effettivamente la soluzione.

Cardano, poiché sapeva che la differenza dei due radicali cubici

$$\sqrt{3}+1-\left(\sqrt{3}-1\right) = 2$$

era proprio la soluzione dell'equazione $x^3 + 6x = 20$, scrisse *"so che le il vero questo"*.

5 Il triangolo di Tartaglia

Il nome di Tartaglia, nonostante i suoi studi riguardo le equazioni di terzo grado, è noto ai più per il Triangolo che porta il suo nome. La configurazione numerica, intimamente connessa con molte branche della matematica, era però già nota agli indiani e ai cinesi, ma fu presentata da Tartaglia nel suo *General Trattato*, passando alla storia come il "Triangolo di Tartaglia" sebbene nell'opera non ha un nome specifico.

Figura 10: Triangolo di Tartaglia, Parco Pignera, Crotone.

Il parco Pignera, a Crotone, ospitante un museo delle scienze a cielo aperto, celebra il matematico bresciano con un'installazione[52].

[D] Come mostrato in Figura 11, si ritrova la stessa configurazione numerica del Triangolo di Tartaglia nel libro cinese del 1303 *Prezioso Specchio dei Quattro Elementi* di Zhu Shijie (Chu Shih-Chieh, XIII secolo). Nel libro, con una raffigurazione ideografica dei numeri, vengono riportate le potenze di un binomio fino all'ottava potenza[53]. Chu non ne rivendica la paternità, ma fa riferimento a un "vecchio metodo" e ci sono libri cinesi più antichi, del XII secolo, che riportano lo stesso schema.

Omar Khayyàm ($1048-1131$) fu tra i primi a studiare questo triangolo, nella sua applicazione alle potenze di un binomio. Per i francesi scoperta e nome vennero ricollegati a Blaise Pascal ($1623-1662$). Dunque, sebbene questo risultato era già conosciuto da molto tempo, al Tartaglia va il merito di aver contribuito a divulgarlo a stampa. In Italia si attribuì a Tartaglia la scoperta del triangolo, dal momento che egli stesso aveva dichiarato *"Regola dal presente autor ritrovata"*[54].

Affrontando lo studio dell'approssimazione delle radici $n-$esime di un numero, il matematico bresciano venne indotto a studiare i coefficienti binomiali e, allo scopo di mettere in luce la legge della loro formazione, li dispose in triangolo.

Lo schema, posto alle carte 69^v e 71^v della Seconda Parte del *General Trattato,* si ottiene dunque dai coefficienti dello sviluppo del binomio $(a+b)^n$, con n intero positivo.

[52]Il giardino di Pitagora propone 17 exhibits dedicati alla matematica pitagorica. Tutte le sculture in acciaio Corten e acciaio Inox sono state realizzate da Cosmic Srl.

[53]Si osservi che lo zero veniva indicato con un piccolo cerchio.

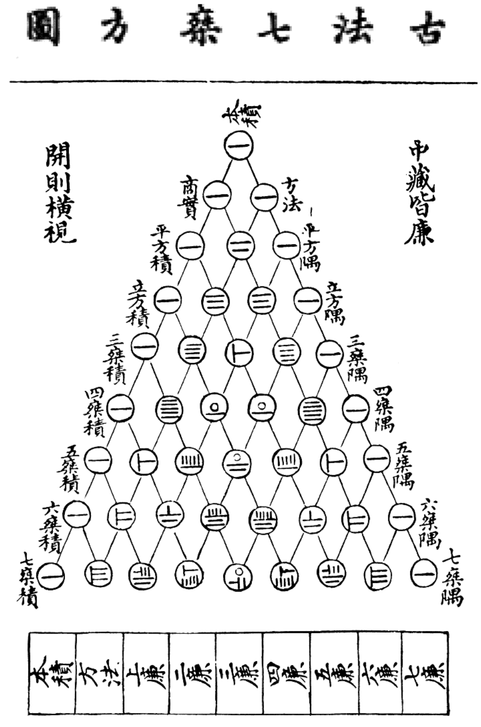
[54]GT2, c. 69^v

Lungo i lati obliqui sono presenti i nomi delle potenze i quali ne sottolineano l'origine geometrica che poggia sullo sviluppo delle potenze della somma di due segmenti.

Per proseguire la costruzione le dignità (potenze) vengono poste ai lati e crescono secondo una progressione geometrica (censo, cubo, censo censo, primo relato, censo cubo etc.). Si osserva che nella prima cornice disposta lungo i lati obliqui si trova la progressione aritmetica naturale $(1, 2, 3, 4, \ldots)$. Queste due caratteristiche consentono di scrivere i primi due e gli ultimi due termini della riga $n-$esima, supponendo noti gli elementi della riga $(n-1)-$esima.

La disposizione degli n termini della $n-$esima riga sono spostati di una posizione rispetto agli $n-1$ elementi della riga sovrastante. Grazie a questa disposizione è naturale osservare che a esclusione dei primi due e degli ultimi due, i termini della riga $n-$esima, che si possono indicare con $a_{n,k}$ (k indica la posizione sulla riga) si ottengono sommando i due termini $a_{n-1,k-1}$ e $a_{n-1,k}$ della riga $n-1-$esima.

Figura 11: "Tavola del vecchio metodo dei sette quadrati moltiplicatori", Chu Shih-Chieh (1303)



ce. 2 ce.

cu. 3 3 cu.

ce.ce. 4 6 4 ce.ce.

1° rel. 5 10 10 5 1° rel.

ce.cu. 6 15 20 15 6 ce.cu.

2° rel. 7 21 35 35 21 7 2° rel.

ce.ce.cu. 8 28 56 70 56 28 8 ce.ce.cu.

Lo schema di Tartaglia è famoso per la sua simmetria e per le relazioni esistenti fra i suoi termini e, con occhi moderni esso si costruisce a partire dall'alto scrivendo un 1 e se ne aggiungono altri due nella riga sottostante, a destra e a sinistra del primo. Per formare le righe successive si aggiungono altri 1 alle estremità e si ricava ciascun numero interno sommando i due numeri immediatamente soprastanti, ossia, detto con i coefficienti binomiali

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix}.$$

Anche nell'*Arithmetica integra* di Stifel[55] si il seguente schema, strettamente correlato al triangolo di Tartaglia

1				
2				
3	3			
4	6			
5	10	10		
6	15	20		
7	21	35	35	
8	28	56	70	
9	36	84	126	126

Si consideri inoltre la formula di Newton utile per calcolare lo sviluppo della potenza n—esima di un binomio

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^{n-k} b^k,$$

essa ha come sviluppo un polinomio omogeneo di grado n nell'insieme delle due variabili a e b il quale, ordinato secondo le potenze decrescenti di a (e crescenti di b o viceversa) ha per coefficienti i coefficienti binomiali ossia i numeri che compongono il triangolo di Tartaglia:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}$$

[55] c. 44^v

6 Glossario

agguagliare	confrontare due membri di un'equazione
arte maggiore	algebra
avenimento	quoziente di una divisione
capitolo	tipo di equazione o, semplicemente equazione
cavare	sottrarre
censo	la seconda potenza dell'incognita
cosa	incognita
discreto	intero
lato	radice quadrata
numero rotto	frazione propria
numero denominante	ragione della progressione
numero digito	numero ad una cifra
partire	dividere
potenza	quadrato dell'incognita
R̷	radice
residuo	binomio formato dalla differenza di due monomi
valuta	incognita
via	moltiplicare per

Riferimenti Sitografici

[A] Museo Galileo

http://catalogo.museogalileo.it/biografia/NiccoloTartaglia.html

http://www.imss.fi.it/milleanni/cronologia/biografie/tartagl.html
http://bibdig.museogalileo.it/Teca/Viewer?an=979932
http://www.imss.fi.it/milleanni/cronologia/biografie/cardano.html
http://mostre.museogalileo.it/archimede/oggetto

[B] Edizione Nazionale Mathematica Italiana
http://mathematica.sns.it/autori/1323/

[C] Wikipedia
https://it.wikipedia.org/wiki/Niccol%C3%B2_Tartaglia

[D] Polymath - PoliTo
http://areeweb.polito.it/didattica/polymath/htmlS/argoment/

[E] http://www.ateneo.brescia.it/supplementi-ai-commentari-dellateneo/

[F] http://www.treccani.it/enciclopedia/niccolo-tartaglia

[G] Le proprietà del triangolo vengono raccontate in maniera divertente in
- Il mago dei numeri di Hans M. Enzensberger, pp. 123 – 142, Einaudi, 1997

Riferimenti bibliografici

[Crilly, 2009] Tony Crilly, *Cinquanta grandi idee di matematica*, Editore Dedalo, pp. 52 – 55.
https://books.google.it/books?id=4HSLDts2APUC&lpg=P

[Gabrieli, 1997] Giovanni Battista Gabrieli , *Nicolò Tartaglia. Una vita travagliata al servizio della matematica*, Brescia, Biblioteca Queriniana.

[Gavagna, 2007] Veronica Gavagna, *L'insegnamento dell'aritmetica nel "General trattato" di N. Tartaglia* in (Pizzamiglio, 2007), pp. 101 – 138.

[Giusti, 2007] Enrico Giusti, *L'insegnamento dell'algebra nel "General trattato" di N. Tartaglia* in (Pizzamiglio, 2007), pp. 155 – 180.

[Guedj, 2000] Denis Guedj, *Il teorema del pappagallo*, Longanesi & C., Milano.

[Maracchia, 2009] Silvio Maracchia, *Storia dell'algebra,* Liguori Editore.

[Masotti, 1962 a] Arnaldo Masotti (a cura di), *Quarto centenario della morte di Niccolò Tartaglia. Atti del convegno di storia delle matematiche, 30-31 maggio 1959*, Brescia, La Nuova Cartografica.
http://www.ateneo.brescia.it/controlpanel/uploads/supplementi-ai-commentari/S-1960a%20%20AttiTartaglia.pdf

[Masotti, 1962 b] Arnaldo Masotti, *Studi su Niccolò Tartaglia* estratto dagli *Atti del Convegno di Storia delle Matematiche in onore di Niccolò Tartaglia, Ateneo di Brescia, 1959*, Milano.

[Ferrari - Tartaglia, 1974] Lodovico Ferrari e Niccolò Tartaglia, *Cartelli di sfida matematica.* Riproduzione in facsimile delle edizioni originali 1547 – 1548 edita con parti introduttorie da Arnaldo Masotti, Brescia, La Nuova Cartografica.
http://www.ateneo.brescia.it/controlpanel/uploads/supplementi-ai-commentari/S-1974d%20TartagliaCartelliSfida.pdf

[Pizzamiglio, 2007] Pierluigi Pizzamiglio (a cura di), *Atti della giornata di studio in memoria di Nicolò Tartaglia nel 450° anniversario della sua morte, 13 dicembre 1557-2007*, Ateneo di Brescia, Brescia.
http://www.ateneo.brescia.it/controlpanel/uploads/supplementi-ai-commentari/S-2007%20AttiTartaglia.pdf

[Pizzamiglio, 2007] Pierluigi Pizzamiglio, *Lettura del "General trattato" di N. Tartaglia da parte di Arnaldo Masotti* in (Pizzamiglio, 2007), pp. 37 – 100.

[Pizzamiglio, 2012] Pierluigi Pizzamiglio, *Nicolò Tartaglia nella storia con antologia degli scritti*, Brescia, EDUCatt.
https://books.google.it/books?isbn=8867801333

[Pizzamiglio, 2004] Pierluigi Pizzamiglio, *Niccolò Tartaglia*, "Nuova Secondaria" (Editrice La Scuola - Brescia), n. 7 (15 marzo 2004), pp. $37-49$.
http://www.fidae.it/AreaLibera/AreeTematiche/didattiche/matematica/P.Pizzamiglio

[Tartaglia, 1959] Niccolò Tartaglia, *Quesiti et inventioni diverse*, riproduzione in facsimile dell'edizione del 1554 edita con parti introduttorie da A. Masotti, Brescia, Ateneo di Brescia (Supplemento ai "Commentari dell'Ateneo per il 1959") pp. LXXXV e tavv. 9 f.t., cc. 128.
http://www.ateneo.brescia.it/controlpanel/uploads/supplementi-ai-commentari/S-1959d%20TartagliaQuesiti.pdf

[Toscano, 2009] Fabio Toscano, *La formula segreta. Tartaglia, Cardano e il duello matematico che infiammò l'Italia del Rinascimento*, Sironi Editore.