Analisi del *"capitolo di cubo e cose uguale a numero"*

Si analizzano di seguito i primi nove versi riguardanti l'equazione $x^3 + px = q$

Quando che 'l cubo con le cose appresso
se agguaglia à qualche numero discreto
trovan dui altri differenti in esso.
Da poi terrai questo per consueto
che 'l loro produtto sempre sia eguale
al terzo cubo delle cose neto,
el residuo poi suo generale
delli lor lati cubi ben sotratti
varra la tua cosa principale.

"Quando hai l'equazione $x^3+px = q$, devi trovare due numeri (incogniti) la cui differenza sia uguale al termine noto (q)[1] e il loro prodotto al cuo della terza parte del numero (p) delle cose. Trovati questi numeri, l'incognita cercata sarà uguale alla differenza (al maggiore dei due bisogna sottrarre il minore) delle loro radici cubiche".

In altre parole, per risolvere l'equazione $x^3 + px = q$ si cercano due numeri u e v, tali che:

$$\begin{cases} u - v = q \\ uv = \left(\dfrac{p}{3}\right)^3 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema, si ottiene dunque che

$$u = \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} + \frac{q}{2}; \qquad v = \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} - \frac{q}{2}.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v} \\ &= \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} - \frac{q}{2}}. \end{aligned}$$

Cardano, quando parla della formula avuta da Tartaglia si lamentava di averla avuta *"tolta la dimostrazione"*; fu costretto così a ricercare da sé la dimostrazione basandosi su questo modo operativo. Molti storici asseriscono, però, che assieme alla formula risolutiva, il matematico bresciano abbia dato anche la dimostrazione della stessa. Infatti, poiché la soluzione che si cerca risulta essere la differenza delle radici cubiche di due numeri, essa è della forma $x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$. Sostituendo tale espressione nell'incognita dell'equazione cubica $x^3 + px = q$ si ha che

[1] *"discreto"* scrive Tartaglia intendendo con ciò che è intero come si legge in GT1 c. 114^v.

$$\begin{aligned}\left(\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{v}\right)^3+p\left(\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{v}\right) &= q\\ u-v-3\sqrt[3]{uv}\left(\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{v}\right)+p\left(\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{v}\right) &= q\\ u-v-\left(3\sqrt[3]{uv}-p\right)\left(\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{v}\right) &= q.\end{aligned}$$

Poiché la regola di Tartaglia vuole che $u-v=q$, è sufficiente porre uguale a zero il coefficiente di $\left(\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{v}\right)$

$$\begin{aligned}3\sqrt[3]{uv}-p &= 0\\ \sqrt[3]{uv} &= \frac{p}{3}\\ uv &= \left(\frac{p}{3}\right)^3.\end{aligned}$$

Oppure, sempre partendo dai versi di Tartaglia in cui si dice che $uv=\left(\frac{p}{3}\right)^3$, andando a sosituire a $\left(3\sqrt[3]{uv}-p\right)$ si ha $3\sqrt[3]{\left(\frac{p}{3}\right)^3}-p$ e dunque $p-p=0$.

Dalle due condizioni date da Tartaglia è possibile determinare u e v e quindi la formula risolutiva dell'equazione data. In ogni caso, la sostituzione può fornire una verifica del procedimento indicato da Tartaglia poichè con $u-v=q$ e $uv=\left(\frac{p}{3}\right)^3$ si verifica l'uguaglianza.

Alcuni storici hanno obiettato che questa ricostruzione della dimostrazione della formula risolutiva è frutto della conoscenza già acquisita della stessa, basata inoltre su un simbolismo ancora non raggiunto a quei tempi. Inoltre, nonostante i passi in avanti che erano stati compiuti in algebra, i suoi procedimenti non venivano considerati soddisfacenti a meno che non fossero supportati da una costruzione geometrica. A tal proposito H. G. Zeuthen scriveva[2]

> *"Nell'epoca in questione in cui l'algebra esatta e generale dipendeva ancora più dalla geometria che dal calcolo, la geometria possedeva i migliori mezzi per superare molte difficoltà che oggi si superano con il calcolo algebrico, specialmente se si trattava di questioni molto generali."*

Una tale ipotesi potrebbe essere considerata avvalorata dalla incapacità di Cardano e Ferrari di trarre dalle indicazioni di Tartaglia un procedimento dimostrativo del tutto algebrico.

Non è difficile estendere il ragionamento anche per i due casi successivi. Si può però far osservare che si ottiene il "caso irrisolubile" se $\left(\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3\right)<0$.

[2]Il brano è citato in francese da E. Bortolotti a pag. 153 dell'*Algebra nella scuola matematica bolognese del secolo* XVI. Periodico di matematiche, 1925, pp. 147 – 192.