Il triangolo di Tartaglia

Il nome di Tartaglia, nonostante i suoi studi riguardo le equazioni di terzo grado, è noto ai più per il Triangolo che porta il suo nome.

La configurazione numerica, intimamente connessa con molte branche della matematica, era però già nota agli indiani e ai cinesi, ma fu presentata da Tartaglia nel suo *General Trattato*, passando alla storia come il "Triangolo di Tartaglia" sebbene nell'opera non ha un nome specifico.

Il parco Pignera, a Crotone, ospitante un museo delle scienze a cielo aperto, celebra il matematico bresciano con un'installazione[1].

Figura 1: Triangolo di Tartaglia, Parco Pignera, Crotone.

[D] Come mostrato in Figura 2, si ritrova la stessa configurazione numerica del Triangolo di Tartaglia nel libro cinese del 1303 *Prezioso Specchio dei Quattro Elementi* di Zhu Shijie (Chu Shih-Chieh, XIII secolo). Nel libro, con una raffigurazione ideografica dei numeri, vengono riportate le potenze di un binomio fino all'ottava potenza[2]. Chu non ne rivendica la paternità, ma fa riferimento a un "vecchio metodo" e ci sono libri cinesi più antichi, del XII secolo, che riportano lo stesso schema.

Omar Khayyàm ($1048-1131$) fu tra i primi a studiare questo triangolo, nella sua applicazione alle potenze di un binomio. Per i francesi scoperta e nome vennero ricollegati a Blaise Pascal ($1623-1662$).

Dunque, sebbene questo risultato era già conosciuto da molto tempo, al Tartaglia va il merito di aver contribuito a divulgarlo a stampa. In Italia si attribuì a Tartaglia la scoperta del triangolo, dal momento che egli stesso aveva dichiarato *"Regola dal presente autor ritrovata"*[3].

Affrontando lo studio dell'approssimazione delle radici $n-$esime di un numero, il matematico bresciano venne indotto a studiare i coefficienti binomiali e, allo scopo di mettere in luce la legge della loro formazione, li dispose in triangolo.

[1] Il giardino di Pitagora propone 17 exhibits dedicati alla matematica pitagorica. Tutte le sculture in acciaio Corten e acciaio Inox sono state realizzate da Cosmic Srl.

[2] Si osservi che lo zero veniva indicato con un piccolo cerchio.

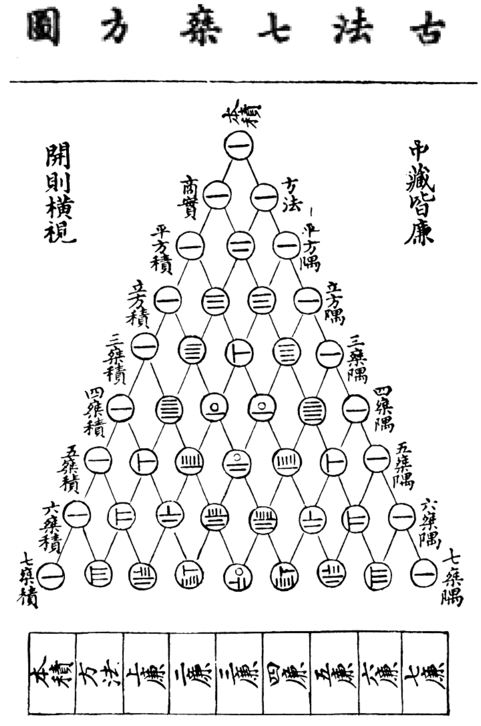
[3] GT2, c. 69^{v}

Lo schema, posto alle carte 69^v e 71^v della Seconda Parte del *General Trattato,* si ottiene dunque dai coefficienti dello sviluppo del binomio $(a+b)^n$, con n intero positivo.

Lungo i lati obliqui sono presenti i nomi delle potenze i quali ne sottolineano l'origine geometrica che poggia sullo sviluppo delle potenze della somma di due segmenti.

Per proseguire la costruzione le dignità (potenze) vengono poste ai lati e crescono secondo una progressione geometrica (censo, cubo, censo censo, primo relato, censo cubo etc.). Si osserva che nella prima cornice disposta lungo i lati obliqui si trova la progressione aritmetica naturale $(1, 2, 3, 4, \dots)$. Queste due caratteristiche consentono di scrivere i primi due e gli ultimi due termini della riga n−esima, supponendo noti gli elementi della riga $(n-1)$−esima.

Figura 2: "Tavola del vecchio metodo dei sette quadrati moltiplicatori", Chu Shih-Chieh (1303)



La disposizione degli n termini della n−esima riga sono spostati di una posizione rispetto agli $n-1$ elementi della riga sovrastante. Grazie a questa disposizione è naturale osservare che a esclusione dei primi due e degli ultimi due, i termini della riga n−esima, che si possono indicare con $a_{n,k}$ (k indica la posizione sulla riga) si ottengono sommando i due termini $a_{n-1,k-1}$ e $a_{n-1,k}$ della riga $n-1$−esima.

						ce.	2	ce.						
					cu.	3		3	cu.					
				ce.ce.	4		6		4	ce.ce.				
			1° rel.	5		10		10		5	1° rel.			
		ce.cu.	6		15		20		15		6	ce.cu.		
	2° rel.	7		21		35		35		21		7	2° rel.	
ce.ce.cu.	8		28		56		70		56		28		8	ce.ce.cu.

Lo schema di Tartaglia è famoso per la sua simmetria e per le relazioni esistenti fra i suoi termini e, con occhi moderni esso si costruisce a partire dall'alto scrivendo un 1 e se ne aggiungono altri due nella riga sottostante, a destra e a sinistra del primo. Per formare le righe successive si aggiungono altri 1 alle estremità e si ricava ciascun numero interno sommando i due numeri immediatamente soprastanti, ossia, detto con i coefficienti binomiali

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Anche nell'*Arithmetica integra* di Stifel[4] si il seguente schema, strettamente correlato al triangolo di Tartaglia

1				
2				
3	3			
4	6			
5	10	10		
6	15	20		
7	21	35	35	
8	28	56	70	
9	36	84	126	126

Si consideri inoltre la formula di Newton utile per calcolare lo sviluppo della potenza n—esima di un binomio

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

essa ha come sviluppo un polinomio omogeneo di grado n nell'insieme delle due variabili a e b il quale, ordinato secondo le potenze decrescenti di a (e crescenti di b o viceversa) ha per coefficienti i coefficienti binomiali ossia i numeri che compongono il triangolo di Tartaglia:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}$$

[4] c. 44^v

Linea del tempo

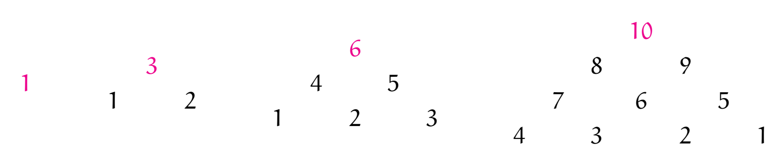
circa 500 a.C.	circa 1070	1303
Testi frammentari in sanscrito che parlano del triangolo di T.	Omar Khayyam scopre il triangolo che in alcuni paesi porta il suo nome	Zhu Shiji definisce il triangolo di T. e dimostra come si sommano alcune successioni

1560	1654	1714
Niccolò Tartaglia pubblica il *General trattato* in cui applica il triangolo di T. a problemi di probabilità	Blaise Pascal pubblica *Le triangle Aritmetique*, un intero libro dedicato al triangolo e alle sue proprietà	Liebniz prende in esame il triangolo armonico

Numeri triangolari

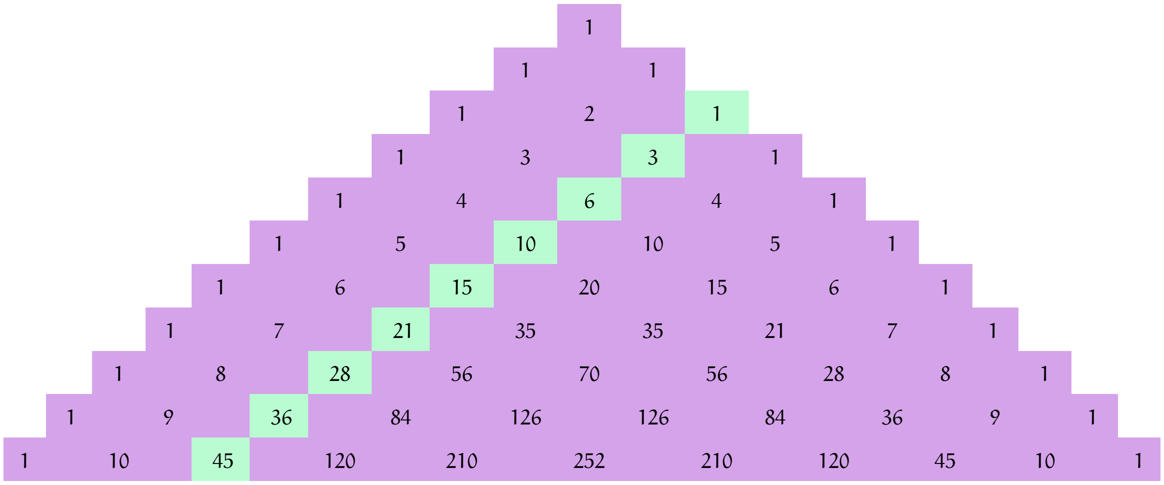
La più evidente proprietà del triangolo di Tartaglia è la sua simmetria assiale. Questa caratteristica consente di parlare semplicemente di "diagonali", perché una diagonale in direzione nord-ovest è uguale a una direzione nord-est. Sotto la diagonale composta interamente da 1 si trova quella costruita dai numeri naturali e poi quella dei numeri triangolari (come in Figura) $1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots$ Nella diagonale sottostante compaiono i numeri tetraedrici $1, 4, 10, 20, 35, 56, \ldots$.

Un numero triangolare è un numero poligonale dato dalla somma di un numero naturale n e di tutti i suoi precedenti; è rappresentabile in forma di triangolo, ovvero, preso un insieme con una cardinalità pari al numero in oggetto, è possibile disporre i suoi elementi su una griglia regolare.



La successione dei numeri naturali è una progressione aritmetica e, indicato con t_n l'n−esimo numero triangolare, si ha che $t_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{1+n}{2} \cdot n = \frac{n^2+n}{2}$.

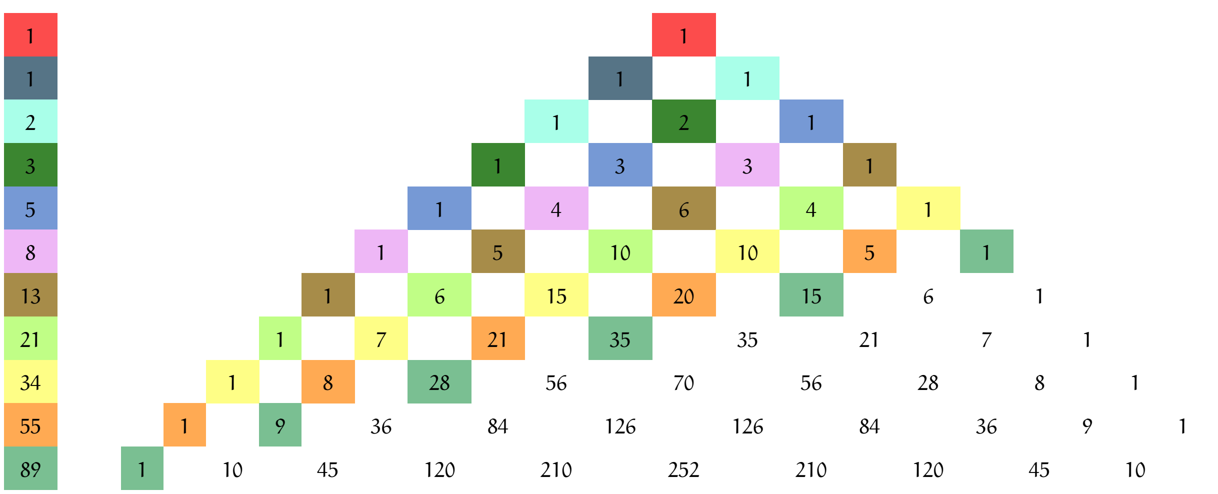
Ad esempio: $t_3 = \frac{3^3+3}{2} = 6$.



I numeri di Fibonacci

Sommando i numeri del triangolo lungo le linee che lo attraversano, ma che non sono né righe, né vere e proprie diagonali, si trova la successione $1, 2, 5, 13, 34, \ldots$ in cui ciascun numero si ottiene sottraendo dal triplo di quello che lo precede il numero ancora precedente. Ad esempio: $34 = 3 \cdot 13 - 5$. Procedendo con lo stesso meccanismo, si trova che il numero successivo è $89 = 3 \cdot 34 - 13$. In tale procedimento non sono state considerate le "false diagonali" alternative che cominciano con $1, 1 + 2 = 3$, ma queste danno la successione $1, 3, 8, 21, 55, \ldots$ i cui numeri vengono prodotti con la stessa regola. Si è quindi in grado di creare il numero successivo della sequenza, cioè $144 = 3 \cdot 55 - 21$. Se si uniscono, intervallandole, le due successioni di "false diagonali" si ottengono i numeri di Fibonacci:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$$



I numeri di Catalan

I numeri di Catalan soddisfano la relazione

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Per mezzo dei coefficienti binomiali, si prova che questi numeri sono collegati al triangolo di Tartaglia. Considerando i numeri evidenziati, essi possono essere divisi per $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$ ottenendo così una nuova successione di numeri: $1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, \ldots$ che rappresentano appunto i numeri di Catalan.

1
1 1
1 **2** 1
1 3 3 1
1 4 **6** 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 **20** 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 **70** 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 **252** 210 120 45 10 1

0.1 Dal triangolo di Tartaglia e il triangolo di Sierpinski

Il Triangolo di Tartaglia nasconde molte configurazioni interessanti; per identificarle è sufficiente evidenziare ogni numero e tutti i suoi multipli con lo stesso colore. Nelle pagine seguenti sono riportati alcuni esempi con multipli di 2, 3 e 4.

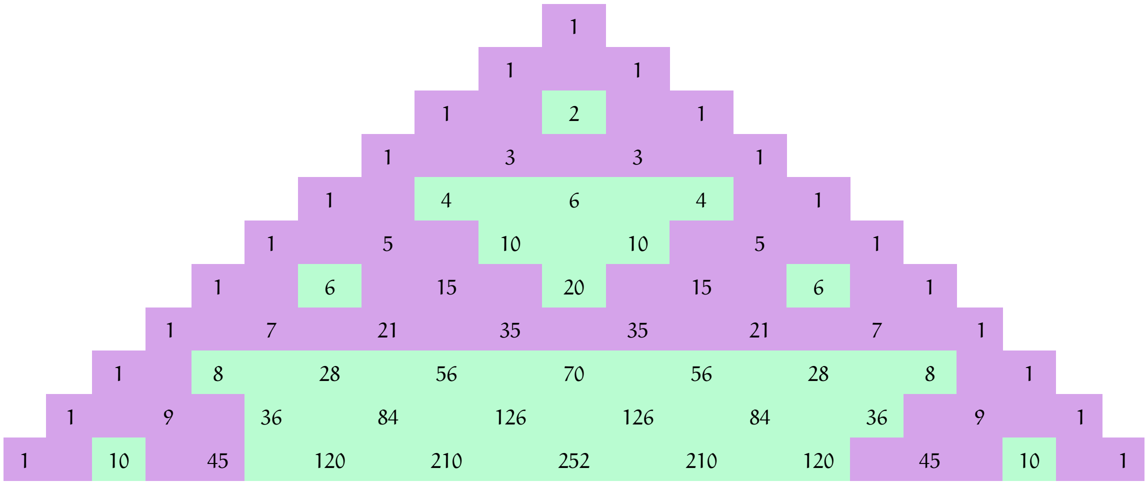
La costruzione, caricata in rete, con il software GeoGebra, permette una visualizzazione più immediata ed interattiva. Il risultato è una una successione di triangoli autosomiglianti, secondo una struttura che è proprio quella dei frattali[5].

Per poter individuare questo genere di strutture occorre utilizzare un triangolo sufficientemente ampio, in modo che la disposizione ed il reiterarsi delle forme risultino più facilmente visibili.

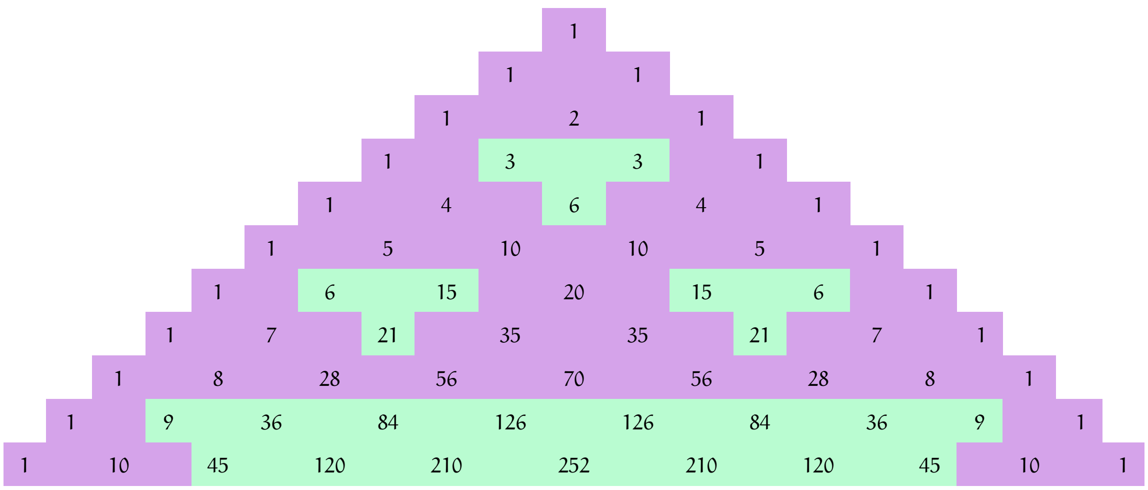
Il triangolo di Sierpinski è una rappresentazione del triangolo di Tartaglia modulo 2, ossia calcolato in $\mathbb{Z}_2$. Si può verificare che il numero di punti dell'n-esimo triangolo centrale è dato dalla formula dei numeri perfetti $2^{n-1}(2^n - 1)$.

[5] Il termine frattale fu introdotto da Benoît Mandelbrot nel 1975: questo nome deriva dal latino fractus (rotto, spezzato), così come il termine frazione; le figure frattali infatti sono considerate in ambito matematico come enti di dimensione frazionaria.

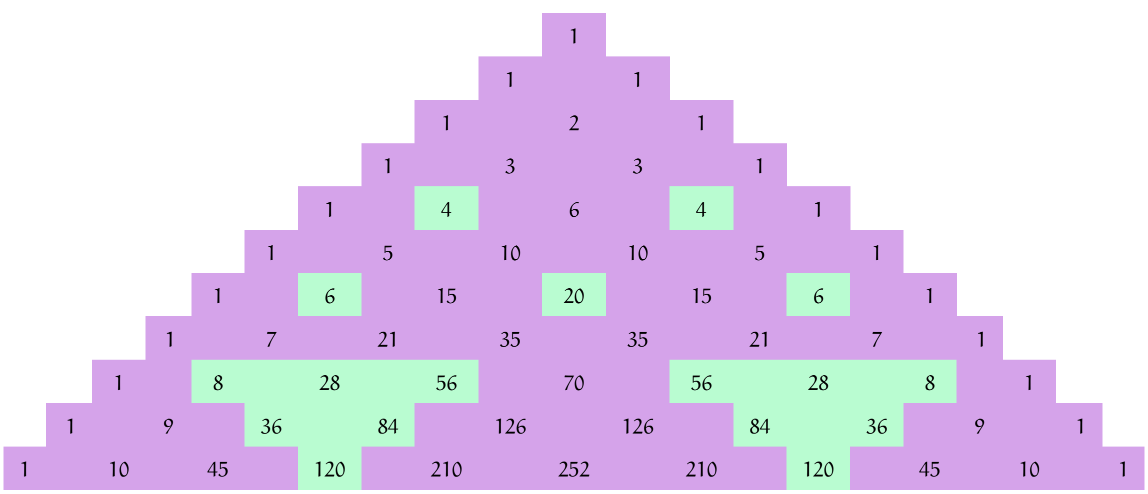
Numeri pari



Numeri multipli di 3



Numeri multipli di 4



0.2 Il triangolo di Pascal

Uno studio importante riguardo il triangolo in esame, fu svolto da Blaise Pascal, nel 1654, che portò a ribattezzare il celebre triangolo con il nome di "Triangolo di Pascal". Pascal, infatti, dedicò un intero libro, *Le Triangle Aritmétique*, alle proprietà del triangolo, in particolare nel campo del calcolo combinatorio. Egli, infatti, intuì che le diverse combinazioni possibili di un dato insieme di oggetti sono in relazione ai numeri del triangolo.

Potenze di 2

La somma dei termini di ogni riga è la successione delle potenze del 2.

Inoltre, la somma dei termini di ogni riga è il doppio della somma dei termini della riga precedente e la somma dei termini di ogni riga, diminuita di 1, è uguale alla somma dei termini di tutte le righe che lo precedono.

Ad esempio, la somma dei termini della sesta riga è 32:

$$1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32 = 2^5.$$

La somma di tutti i termini delle righe precedenti è $32 - 1$, infatti:

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31.$$

1											$1 = 2^0$
1	1										$2 = 2^1$
1	2	1									$4 = 2^2$
1	3	3	1								$8 = 2^3$
1	4	6	4	1							$16 = 2^4$
1	5	10	10	5	1						$32 = 2^5$
1	6	15	20	15	6	1					$64 = 2^6$
1	7	21	35	35	21	7	1				$128 = 2^7$
1	8	28	56	70	56	28	8	1			$256 = 2^8$
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1		$512 = 2^9$
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	$1024 = 2^{10}$

Potenze di 11

Scrivendo per esteso le potenze del numero 11 si ottiene il triangolo di Tartaglia. Dalla quinta riga, a prima vista, potrebbe sembrare che le righe successive non siano più collegabili con le potenze successive di 11, ma, con un'analisi più attenta, si può notare che questo è dovuto alla presenza di numeri con più cifre. Dunque, considerando ogni numero composto da unità e decine, si riesce ad ottenere la potenza di 11 relativa ad ogni riga con l'aiuto di un riporto.

Ad esempio, se si prende in considerazione la settima riga, iniziando da destra, si addizionano le decine di ogni numero con le unità del numero precedente aggiungendo gli eventuali riporti.

$$01 \quad 06 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 06 \quad 01$$

Quindi: 1, $0+6=6$, $0+5=5$, $1+0=1$, $2+5=7$, $1+6=7$, $0+1=1$

Pertanto, scrivendo da destra si ottiene la settima potenza di 11, ossia $11^7 = 1771561$.

1											$1 = 11^0$
1	1										$11 = 11^1$
1	2	1									$121 = 11^2$
1	3	3	1								$1331 = 11^3$
1	4	6	4	1							$14641 = 11^4$
1	5	10	10	5	1						$161051 = 11^5$
1	6	15	20	15	6	1					$1771561 = 11^6$
1	7	21	35	35	21	7	1				$19487171 = 11^7$
1	8	28	56	70	56	28	8	1			$214358881 = 11^8$
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1		$2357947691 = 11^9$
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	$25937424601 = 11^{10}$

La carica dei 101

1								$1 = 101^0$
1	1							$101 = 101^1$
1	2	1						$10201 = 101^2$
1	3	3	1					$1030301 = 101^3$
1	4	6	4	1				$104060401 = 101^4$
1	5	10	10	5	1			$10510100501 = 101^5$
1	6	15	20	15	6	1		$1061520150601 = 101^6$
1	7	21	35	35	21	7	1	$107213535210701 = 101^7$

Somme magiche

Ogni termine del triangolo è uguale alla somma di tutti i termini che lo precedono, nella colonna alla sua sinistra.

1										
1	1									
1	2	1								
1	3	3	1							
1	4	6	4	1						
1	5	10	10	5	1					
1	6	15	20	15	6	1				
1	7	21	35	35	21	7	1			
1	8	28	56	70	56	28	8	1		
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1