Numeri congrui e congruenti
dal libro VIII del Pratica d'Arithmetica

L'VIII libro dell'opera di Galigai è composto da 47 punti, divisi tra definizioni e problemi. Mentre i primi 26 sono dedicati alla risoluzione di problemi aritmetici, dal 27 al 47 troviamo esposta la teoria riguardante i numeri congruo-congruenti. Il riferimento a Leonardo Pisano (def. 27) lascia intendere che Galigai abbia ripreso i risultati esposti nel Liber quadratorum.
Il Liber quadratorum di Pisano (1225) è un testo di teoria dei numeri all'interno del quale vengono trattati alcuni problemi nati dalle sfide matematiche presso la corte di Federico II.
Dedicata proprio a Federico II, quest'opera è composta da 20 proposizioni utilizzate da Pisano per rispondere ai quesiti a lui posti dai matematici Giovanni da Palermo e Teodoro, figure della corte federiciana.
I problemi che l'autore si trova a dover risolvere, espressi nel linguaggio simbolico dell'algebra contemporanea, sono i seguenti:

1. Trovare un numero x tale che le quantità x^2+5 e x^2-5 siano dei quadrati;
2. Risolvere l'equazione $x^3+2x^2+10x=20$.

Di nostro interesse è il primo di questi quesiti, il quale affronta la ricerca dei numeri congrui e congruenti. Vediamo come vengono definiti, sfruttando il linguaggio odierno, questi due concetti:

"Un numero C, intero o razionale, si dice ***congruo*** *se esiste un numero quadrato, intero o razionale, tale che aggiuntogli o sottrattogli C si ottiene ancora un quadrato. Un numero C è dunque congruo se e solo se il sistema*

$$x^2+C=y^2$$
$$x^2-C=z^2$$

ammette soluzioni intere o razionali. Se C è un numero congruo, il relativo numero quadrato si dice numero ***congruente****".*

Ritornando al Pratica d'Arithmetica analizziamo come Galigai espone la trattazione di questo argomento.
Dopo aver affrontato la ricerca dei numeri quadrati (def. 27) e la ricerca delle somme di tutti i quadrati compresi tra 1 e 100 (def. 28), tra 4 e 100 (def. 29) e di tutti i quadrati dispari tra 1 e 81 (def 30), vengono date le definizioni di numeri congruenti e congrui e l'algoritmo per determinarli a partire da numeri consecutivi (def. 31-32):
"Numero congruo è quello che è atto a dare e ricevere un altro numero, quale si chiama congruente, e detto congruente è quello che aggiunto al congruo, la somma sia quadrata e [sot]tratto il congruo, il restante sia quadrato, cioè ad ogni 18 *congruo corrisponde un congruente, e detti congruenti molte volte non sono quadrati, ma i congrui sono quadrati".*[12]

Nella definizione Galigai inverte la nomenclatura dei due concetti chiamando "numero congruente" quello che Pisano definisce congruo e "congruo quadrato" il corrispondente numero congruente quadrato.
Il primo numero congruo è 24, ricavato a partire dai due numeri consecutivi 1 e 2, e con rispettivo numero congruente quadrato dato da 25, infatti:

$$25-24=1=1^2$$
$$25+24=49=7^2$$

Il metodo con cui si ricava il numero congruo è il seguente:
I. Somma 1 e 2: 1+2=3;

II. Raddoppia il risultato: $3\cdot2=6$;
III. Moltiplica 1 e 2: $1\cdot2=2$;
IV. Moltiplica i risultati II e III: $6\cdot2=12$;
V. Raddoppia il risultato IV: $12\cdot2=\mathbf{24}$.

Per il suo congruente quadrato:
I. Somma i quadrati di 1 e 2: $1^2+2^2=5$;
II. Eleva al quadrato: $5^2=\mathbf{25}$.

La seconda coppia di numeri congruo-congruente (120-169) si ricava a partire dai numeri 2 e 3; la terza (336-625) da 3 e 4, ecc.
Al lettore è lasciata la verifica dell'algoritmo.

Il caso della ricerca dei numeri congrui e congruenti quadrati generati da numeri non consecutivi, è esposto nella definizione 33. La prima coppia è data dai numeri 1 e 3. Per il numero congruo si procede come segue:
I. Somma 1 e 3: $1+3=4$;
II. Raddoppia: $4\cdot2=8$;
III. Sottrai 3 e 1: $3-1=2$;
IV. Moltiplica i risultati II e III: $8\cdot2=16$;
V. Moltiplica 1 e 3: $1\cdot3=3$;
VI. Moltiplica i risultati IV e V: $16\cdot3=48$;
VII. Raddoppia VI: $48\cdot2=\mathbf{96}$.

Analogamente al caso precedente, per il congruente quadrato:
I. Somma i quadrati di 1 e 3: $1^2+3^2=10$;
II. Eleva al quadrato: $10^2=\mathbf{100}$.

Si vede infatti:

$$100-96=4=2^2$$
$$100+96=196=14^2$$

La seconda coppia è data da 2 e 5.
Al lettore l'applicazione dell'algoritmo per la ricerca dei due numeri.

Oltre a questi due esempi, non vengono forniti da Galigai altri numeri non consecutivi generanti coppie di numeri congruenti-congruo quadrati.
Dal punto 34 al 47 dell'VIII libro troviamo una serie di problemi relativi alla ricerca dei numeri quadrati e dei numeri congruenti quadrati.
Se ne riportano due esempi sfruttando il linguaggio algebrico odierno.

Problema 34
Trova un numero x tale per cui, sommato o sottratto 10, dia come risultato un numero quadrato.
Ossia trovare una soluzione al sistema

$$x+10=a^2$$
$$x-10=b^2$$

Risoluzione: mostriamo l'algoritmo esposto da Galigai
I. Eleva 10 al quadrato: $10^2=100$;
II. Aggiungi 4 al risultato: $100+4=104$;

III. Dividi il nuovo risultato per 4: $104 \div 4 = \mathbf{26}$.

Sostituendo il valore trovato nel sistema si trova che:

$$26+10=36=6^2$$
$$26-10=16=4^2$$

Esercizio: problema 35
Trova un numero x tale per cui, sommato o sottratto 5, dia come risultato un numero quadrato.
Problema 36
Trova un numero $x2$ tale per cui, sommato o sottratto 6, dia come risultato un numero quadrato.
Stavolta si ha il sistema

$$x^2+6=a^2$$
$$x^2-6=b^2$$

Risoluzione: in questo caso occorre ricercare un numero congruo che diviso per 6 risulti quadrato. Il numero in questione è 24, infatti: $24 \div 6=4=2^2$
Consideriamo ora il rispettivo numero congruente quadrato 25 e lo dividiamo per il risultato della precedente divisione.
La quantità ottenuta sarà il valore cercato per x^2, ovvero $x^2=\mathbf{25/4}$

Verificando il sistema, si ha:

$$25/4+6=49/4=(7/2)^2$$
$$25/4-6=1/4=(1/2)^2$$

Esercizio: problema 37
Trova un numero x^2 tale per cui, sommato o sottratto 30, dia come risultato un numero quadrato.