I numeri della successione di Fibonacci e alcune loro proprietà

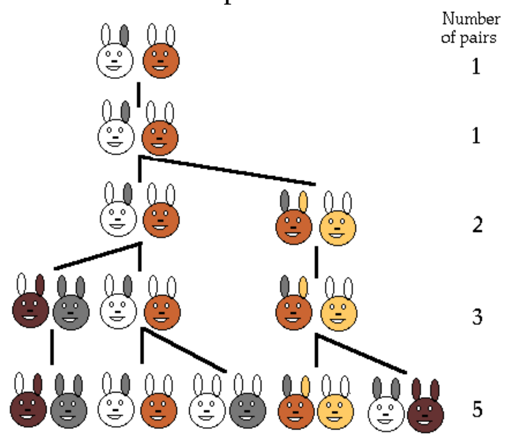
La successione di Fibonacci

La straordinaria padronanza della teoria dei numeri dimostrata da Fibonacci gli permise di risolvere alcuni tra i più complessi problemi matematici dell'epoca. Il più famoso è sicuramente quello tratto dal dodicesimo capitolo del *Liber abaci*:

"Un uomo mise una coppia di conigli in un luogo circondato da tutti i lati da un muro. Quante coppie di conigli possono essere prodotte dalla coppia iniziale in un anno supponendo che ogni mese ogni coppia produca una nuova coppia in grado di riprodursi a sua volta dal secondo mese?"

Per risolvere il problema basta un po' di buon senso. Si inizia con una coppia. Dopo il primo mese, la prima coppia dà origine a un'altra coppia, per cui ne abbiamo due. Dopo il secondo mese, la coppia matura produce un'altra coppia giovane, mentre la precedente coppia diventa matura. Le coppie sono quindi tre. Dopo il terzo mese, ciascuna delle due coppie mature genera un'altra coppia, mentre la coppia giovane diventa matura, cosicché le coppie sono cinque. Trascorso il quarto mese, ciascuna delle tre coppie mature genera una coppia, mentre le due coppie giovani diventano mature, portando il totale a otto coppie. Dopo il quinto mese, otteniamo una coppia giovane da ciascuna delle cinque coppie adulte, mentre tre coppie diventano mature, per un totale di tredici.

A questo punto è ormai chiaro come sia possibile calcolare, mese dopo mese, il numero di coppie mature, coppie giovani e coppie complessive. Supponiamo di esaminare solo il numero di coppie adulte, un mese dopo l'altro. Tale numero risulta composto dal numero di coppie adulte nel mese precedente, più il numero di coppie giovani diventate adulte dal medesimo mese precedente. Ma questo numero di coppie giovani in effetti è uguale al numero di coppie adulte nel mese ancora precedente. Perciò, in ogni mese a partire dal terzo, il numero di coppie adulte è semplicemente uguale alla somma del numero delle coppie adulte nei due mesi precedenti.



Il numero di coppie adulte formerà quindi la successione: 1, 1, 2, 3, 5, 8, …

La successione 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, … in cui ciascun termine (a partire dal terzo) è uguale alla somma dei due termini precedenti è stata appunto chiamata, nel XIX scolo, successione di Fibonacci. Le successioni numeriche in cui la relazione tra termini successivi si può esprimere con un'espressione matematica si chiamano ricorsive, e quella di Fibonacci fu la prima di questo tipo conosciuta in Europa. La proprietà generale di ogni elemento della sequenza di essere uguale alla somma dei due precedenti si esprime in modo sintetico con la scrittura $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ in cui F_n sta a indicare l'ennesimo termine della successione.

Consideriamo i rapporti degli elementi contigui:

1/1 = 1.000000000000000
2/1 = 2.000000000000000
3/2 = 1.500000000000000
5/3 = 1.666666666666667
8/5 = 1.600000000000000
13/8 = 1.625000000000000
21/13 = 1.615384615384615
34/21 = 1.619047619047619
55/34 = 1.617647058823529
89/55 = 1.618181818181818

Procedendo lungo la successione di Fibonacci, il rapporto tra un termine e il suo precedente oscilla intorno a un numero, al quale si avvicina sempre di più; questo numero è il rapporto aureo, *Φ*, che si approssima 1,618 alle prime tre cifre decimali.

In linguaggio matematico scriviamo che:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\Phi$$

A metà del XIX secolo, il matematico francese Binet riscoprì una formula, probabilmente già nota a Eulero nel XVIII secolo. La formula permette di calcolare qualunque numero di Fibonacci, purché sia noto il suo posto nella successione. La formula di Binet si basa interamente sul rapporto aureo:

$$Fn=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Si nota come il primo termine all'interno della parentesi quadra sia il rapporto aureo elevato all'ennesima potenza, Φ^n, mentre il secondo corrisponde a $\left(-\frac{1}{\Phi}\right)^n$.

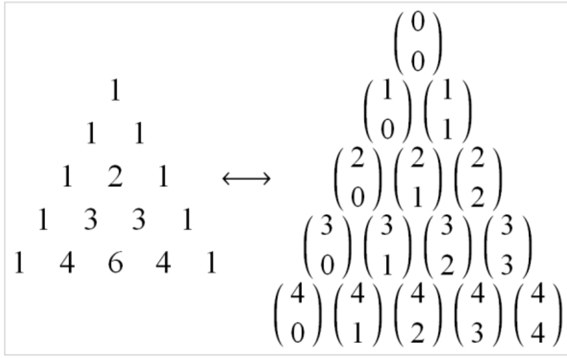
La formula può essere pertanto riscritta come

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\Phi^n-\left(\frac{1}{\Phi}\right)^n\right]=\frac{\Phi^n-(-\Phi)^{-n}}{\sqrt{5}}$$

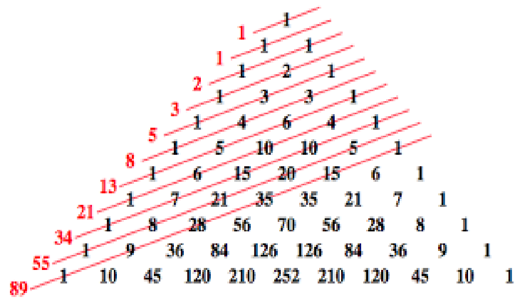
Alcune curiosità sui numeri di Fibonacci:

1. Il triangolo di Tartaglia

Il triangolo di Tartaglia è una disposizione triangolare dei coefficienti binomiali, cioè dei coefficienti che compaiono nello sviluppo del binomio $(a+b)^n$, con $n \in \mathbb{N}$:

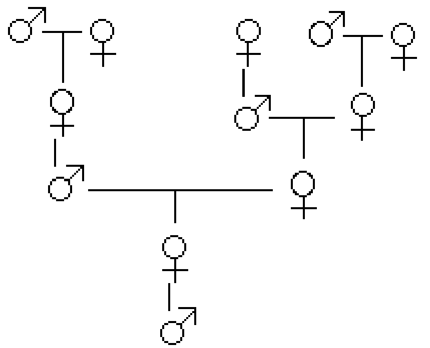


All'interno del triangolo di Tartaglia si può riconoscere la successione dei numeri di Fibonacci disposta lungo particolari diagonali :



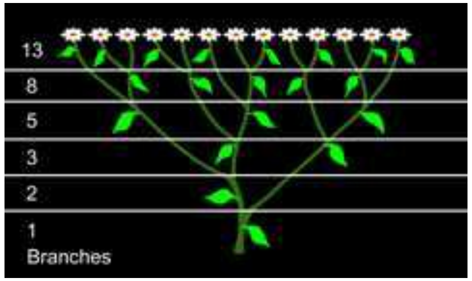
2. In natura e in genetica

In un alveare vivono tre tipi di api : il maschio (il fuco), che non lavora, le femmine (le operaie) che svolgono tutto il lavoro e l'ape regina che si occupa di produrre le uova da cui nasceranno le altre api. Un maschio nasce da un uovo non fecondato, cioè ha soltanto la madre, le femmine invece nascono da uova fecondate, quindi hanno la madre (l'ape regina) e il padre (uno dei fuchi).

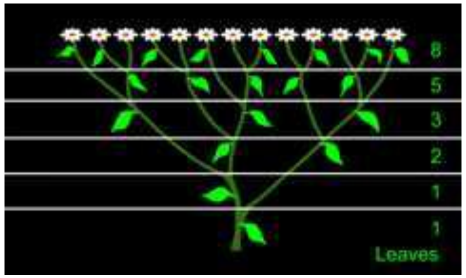


In figura il maschio è rappresentato con la freccia mentre le femmine con il simbolo più. Procedendo dal basso verso l'alto notiamo che un fuco ha solo una madre, che a sua volta ha due genitori, che a loro volta hanno insieme 3 genitori(due la madre e uno il padre), che a loro volta hanno 5 genitori e così via. Sommando per livelli otteniamo proprio la successione: 1,1,2,3,5....

La ramificazione di alcune specie di piante, come ad esempio il biancospino, rispetta proprio la successione di Fibonacci, non solo per il numero di rami presenti ad ogni fase di crescita della pianta ma anche per il numero delle foglie che la pianta stessa fa germogliare ad ogni livello. Sapendo che ogni ramo impiega un mese prima di potersi
biforcare, otteniamo :



Rami



Foglie

Ogni seme contenuto in un bocciolo di girasole appartiene a una spirale levogira e destrogira. E' interessante notare che, senza eccezione, il numero di spirali sono tutti dei numeri vicini alla sequenza di Fibonacci. Sulla testa di un tipico girasole, per esempio, il numero delle spirali rientra molto spesso nelle combinazioni 21/34, 34/55, 55/89. Il più grande girasole che si sia mai conosciuto aveva 144 spirali che si irradiano ripide in senso orario; 89 che si muovono in senso antiorario e 55 che si muovono in senso orario ma meno ripido. Questo principio vale anche per le margherite, le pigne , il cavolo, l'ananas ecc… Dividendo questi numeri tra di loro, si ottiene sempre 1.618, conosciuto come « Phi » ovvero il rapporto aureo.