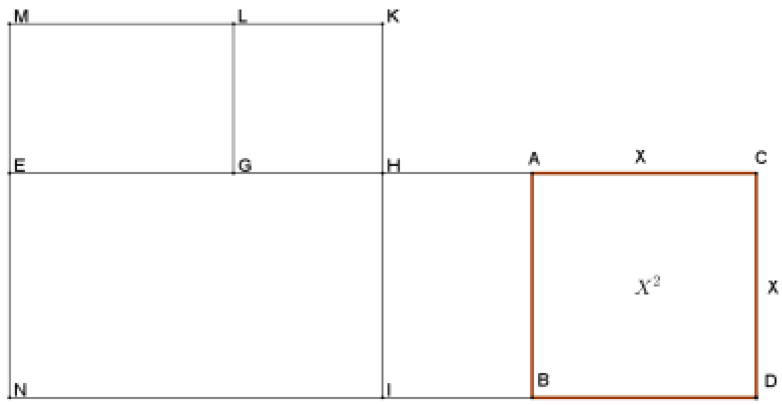
Costruzione geometrica per risolvere equazioni del tipo $x^2 + c = bx$

Consideriamo l'equazione $x^2 + 21 = 10x$, che può essere risolta procedendo nel seguente modo: la metà delle radici è 5, il suo quadrato è 25, da cui si sottrae 21, ottenendo $4 = 2^2$; sottraiamo 2 da 5, che è metà del numero delle radici, per cui $x = 3$. Se, invece, aggiungiamo 5, otteniamo $x = 7$.

Al-Khwārizmī passa poi a considerare questo tipo geometricamente. Consideriamo il quadrato ACDB, il cui lato è l'incognita. Ad esso aggiungiamo il rettangolo EABN di area 21 che ha un lato uguale a quello del quadrato, in modo da formare il rettangolo ECDN, di lato EC lungo 10.



Dividiamo EC a metà nel punto HI, sapendo che EH=HC e HI=CD. Prolunghiamo HI fino a K, in modo che EH=IK e ottenendo il quadrato MKIN. Ma IK=5, per cui MKIN ha area 25.

Il rettangolo EABN da sommare al quadrato deve avere area 21. In tal modo, fino a questo punto, abbiamo dato senso geometrico all'equazione $x^2 + 21 = 10x$, supponendo che sia possibile trovare *x*.

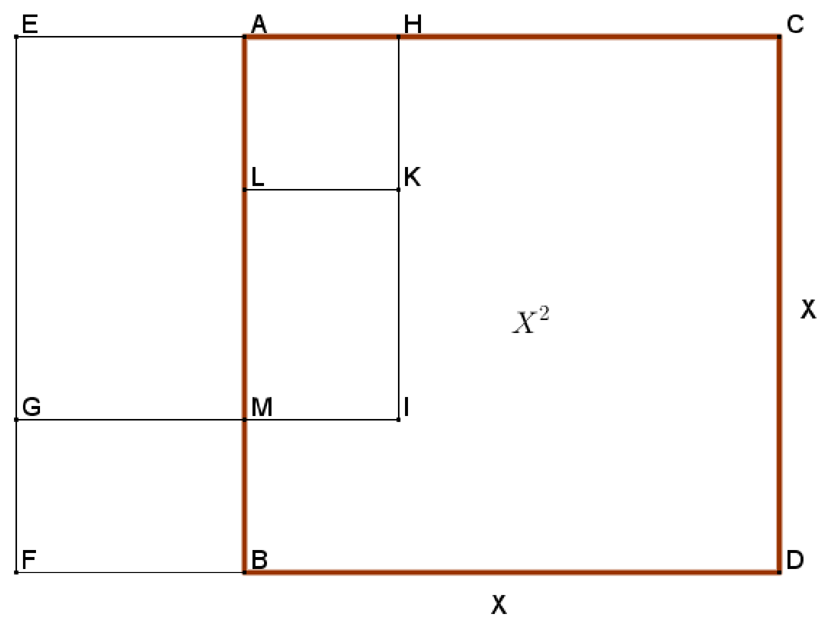
Tagliamo, poi, questo rettangolo con il segmento KI, che è il lato del quadrato MKIN, in modo da ottenere il rettangolo EHIN. Resta da considerare la parte HABI. Ora, su KM, prendiamo KL=KH, per cui IH=ML. Allora MLGE=HAIB.

Quindi EHIN+MLGE=EABN, che ha area 21. Ma MKIN ha area 25. Ora, MKIN-(EHIN+MLGE)=LKHG, la cui area è 25-21=4, da cui GH=HA=2. Poiché HC ha lunghezza 5, che è la metà delle radici, allora x=AC=HC-HA, che ha lunghezza 5-2=3, che è il lato del quadrato

ABCD. Questa radice è dall'espressione $x = \frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$. Al-Khwārizmī ha notato brevemente che CG rappresenta un'altra soluzione che corrisponde al segno + invece che il segno – davanti alla radice nelle espressione di x, ma non ha dimostrato questo con un disegno geometrico.

Abd al-Hamid ibn Wasi ibn Turk al-Jili, un contemporaneo di al-Khwārizmī di quale si conoscono pochissimo, ha scritto un opera dove presenta equazione quadratiche del tipo 1, 4, 5 e 6 e include una spiegazione e dimostrazione della soluzione più dettagliata di quella di al-Khwārizmī[1].

Particolarmente nel questo caso di un'equazione del quinto tipo, ibn Turk ha dato le dimostrazione geometriche per tutti i casi. Come primo esempio lui propone la stesa equazione come al-Khwārizmī, cioè $x^2 + 21 = 10x$. Ma diversamente dal precedente inizia notando che H, il punto medio di EC, può essere sia sul segmento EA, come nella dimostrazione di al-Khwārizmī, sia sul segmento AC. In questo ultimo caso, la soluzione è x=AC=AH+HC, cioè è $x = \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$.



[1] Katz V. J., *A History of Mathematics. An introduction, 3rd edition.* Pearson Education, Inc. 2009, pp. 271-276 [http://deti-bilingual.com/wp-content/uploads/2014/06/3rd-Edition-Victor-J.-Katz-A-History-of-Mathematics-Pearson-2008.pdf].

Al-Khwarizmi e ibn Turk hanno così giustificato geometricamente l'equazione espressa nella forma generale $ax^2 + c = bx$, che possiamo trasformare in $\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$, le cui due soluzioni sono $x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$.