Metodo di completamento del quadrato nella risoluzione di equazioni del tipo $x^2 + bx = c$

Consideriamo l'equazione $x^2 + 10x = 39$.

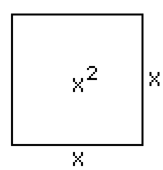
Per procedere verso la soluzione, dividiamo a metà il numero delle radici ottenendo 5; di questo prendiamo il quadrato, 25, che aggiungiamo ad entrambi i membri dell'equazione ottenendo:

$$x^2 + 10x + 25 = 39 + 25$$

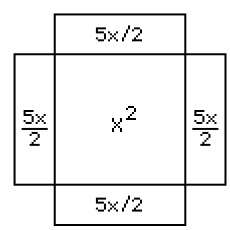
$$cio\text{è} \quad (x+5)^2 = 64$$

$$da\ cui\ \ x + 5 = 8, \quad e\ quindi \quad x = 3.$$

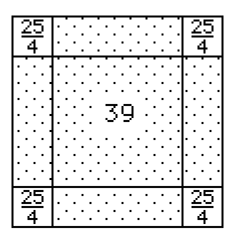
Questa equazione può essere espressa nella forma generale $ax^2 + bx = c$, per cui, procedendo al completamento del quadrato, si ha: $x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = c + \left(\frac{b}{2}\right)^2$, cioè $\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = c + \left(\frac{b}{2}\right)^2$ da cui si ottiene $x + \frac{b}{2} = \sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$ e quindi $x = \sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}$.



1



2



3

Per ottenere gli stessi risultati per la via geometrica al-Khwārizmī inizia con un quadrato di lato x, che quindi rappresenta x^2 (Figura 1). Al quadrato dobbiamo aggiungere 10x e ciò è fatto disegnando sui lati del quadrato 4 rettangoli, ognuno di altezza $\frac{10}{4}$ e lunghezza x (Figura 2).

La figura 2 ha area $x^2 + 10x$, che è uguale a 39. Ora completiamo il quadrato aggiungendo i quattro piccoli quadratini, ognuno di area $\frac{5}{2} \times \frac{5}{2} = \frac{25}{4}$.

Da qui, il quadrato mostrato in Figura 3 ha area $4 \times \frac{25}{4} + 39 = 64$. Il lato del quadrato ottenuto è quindi 8. Ma il lato è di lunghezza $\frac{5}{2} + x + \frac{5}{2}$, allora $x + 5 = 8$, e risulta quindi $x = 3$.