# Scheda di lavoro 3: il problema della divisione della posta

14 giugno 2016

Il "problema delle divisione della posta", noto anche come "problema dei punti", ricorre spesso nella letteratura matematica, e ne sono state date varie risoluzioni, non sempre corrette. Il problema in generale recita:

> Due uomini praticano un gioco diviso in round, scommettendo sull'esito finale della partita; i giocatori hanno pari opportunità di vincere ogni round. Determinare la divisione della posta fra i giocatori supponendo che il gioco sia stato interrotto prima che uno dei due avesse raggiunto il punteggio necessario a chiudere la partita.

Indicati con A e B i due giocatori ed n il totale dei punti da ottenere per la vittoria, si supponga quindi che nel momento in cui il gioco viene interrotto i punti ottenuti dai due giocatori siano rispettivamente $a$ e $b$. Il problema richiede di determinare la percentuale della posta che deve essere destinata a ciascun giocatore in funzione di $a$ e $b$.

## Prima comparsa del problema nella letteratura

Questo problema era comparso per la prima volta in un manoscritto anonimo del 1400:

> "Due uomini giuochano a scacchi e fanno [posta] d'un ducato a 3 giuochi, viene caso ch'el primo vince 2 giuochi al 2°, adomando non giocando più, quanto arà ad avere vinto lo primo al 2° del lo ducato" (Firenze, Biblioteca Nazionale, Magliabecchiano Cl. XI, 120, f. 29r).

La soluzione proposta era puramente algebrica e conteneva un banale errore di calcolo.

## Risoluzione secondo Pacioli

Il problema fu riproposto da Luca Pacioli nell'opera a stampa *Summa de aritmetica* (1494):

> "Due giocatori partecipano ad un gioco equo in cui il giocatore che vince per primo 6 turni vince un premio. Si suppone che il gioco vengo inaspettatamente fermato quando il primo giocatore ha vinto un totale di 5 partite e il secondo 3 partite. In che modo dove essere diviso il premio fra i due giocatori?"

In questa versione specifica del problema a=5 e b=3. Nella soluzione la somma sul piatto andava divisa in proporzione ai punti che ogni giocatore aveva già vinto fino a quel momento, ovvero nel rapporto 5:3.

## Risoluzione secondo Tartaglia

La risoluzione di Pacioli fu confutata del XVI secolo da Tartaglia nel *General Trattato di numeri e misure* del 1494. Tartaglia osservò che, nel caso in cui il gioco venisse interrotto con un punteggio di 0 a 1 fra i due giocatori, tutti la vincita sarebbe dovuta essere destinata al giocatore in vantaggio, nonostante il risultato della partita sia ancora del tutto incerto. Il piatto andava diviso in proporzione alla possibilità che i due giocatori avevano di ottenere i punti rimanenti per la vittoria, e non rispetto a quelli che avevano già raggiunto. Questa conclusione è vera, ma nella dimostrazione Tartaglia non giunse al risultato corretto.

## Risoluzione secondo Cardano

Un'opinione simile fu sostenuta da Cardano all'interno del *Practica arithmetice*. Anche in questo caso non fu raggiunta la soluzione corretta, in quanto Cardano fece affidamento alle "progressioni aritmetiche" finite del tipo: n=1+2+3+4+... per definire la soluzione. Nella soluzione di Cardano, usando termini moderni, il rapporto di divisione sarebbe dovuto corrispondere al rapporto fra le "progressioni" di (n-a) e (n-b), ovvero $((n-b)(n-b+1)) : ((n-a)(n-a+1))$. Questo condusse Cardano alla soluzione erronea di 6 a 1 per il giocatore in vantaggio, secondo il testo proposto da Pacioli.

## Risoluzione secondo Fermat

Una soluzione corretta del problema fu proposta da Pierre de Fermat e da Blaise Pascal. Sotto richiesta del Signor Antoine Gombault cavaliere De Méré, persona di buono stato sociale con qualche conoscenza matematica e accanito giocatore, Pascal aveva accettato di dare una soluzione al problema della divisione delle parti, con l'aiuto dell'amico Fermat, col quale intrattenne una fitta corrispondenza a riguardo.

La risoluzione proposta da Fermat prevede la determinazione del numero massimo di partite necessarie che sarebbero necessarie a terminare la partita, e fra queste il conteggio dei casi favorevoli a ciascuno dei due giocatori.

Fermat prese in esame il problema in cui al primo giocatore A mancavano due punti alla vittoria, mentre al secondo giocatore B ne mancavano 3. In queste circostanze, risulterebbero necessarie al massimo 4 partite per determinare la fine del gioco, corrispondenti a 16 risultati possibili, e di questi 11 a favore del giocatore A e 5 a favore del giocatore B. Il rapporto fra le poste dovrebbe quindi essere di 11 a 5 a favore del giocatore in vantaggio.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | AAAA | 5 | AAAB | 9 | AABA | 13 | AABB |
| 2 | ABAA | 6 | ABAB | 10 | ABBA | 14 | ABBB |
| 3 | BAAA | 7 | BAAB | 11 | BABA | 15 | BABB |
| 4 | BBAA | 8 | BBAB | 12 | BBBA | 16 | BBBB |

## Risoluzione secondo Pascal

In una lettera del 29 luglio 1654, Pascal scrive a Fermat di aver trovato la soluzione al problema e descrive la seguente dimostrazione:

> [...] Ecco più o meno come faccio per saper il valore di ciascuna delle partite, quando due giocatori giocano, per esempio in tre partite, e ciascuno ha puntato 32 pistole al gioco. Mettiamo che uno ne abbia vinte due e l'altro una; loro giocano ancora una partita la cui sorte è tale che se il primo vincesse, egli avrebbe tutto il danaro che è in gioco, cioè 64 pistole; se vincesse l'altro ci siano due partite contro due partite e, di conseguenza, se vogliono separarsi bisogna che ciascuno ritiri ciascuno quanto ha puntato, a ciascuno 32 pistole. Considerate dunque, Signore, che [nella terza partita] se il primo vince a lui se ne danno 64; se egli perde, gliene toccano 32. Quindi se non vogliono rischiare questa partita e si separano senza giocare, il primo dovrebbe dire: "Sono sicuro di avere 32 pistole, in quanto anche perdendo le ottengo; ma le altre 32 le potrei avere io o le potreste avere voi: il rischio è uguale; dividiamo dunque queste 32 pistole a metà e datemi, oltre a ciò, le mie 32 pistole che mi sono assicurate." Egli avrà, dunque, 48 pistole e l'altro 16. Poniamo ora che il primo abbia vinto due partite ed il secondo nessuna e che inizino a giocare una partita. Lo svolgimento della partita è tale che se il primo vince, ritira tutto il denaro, 64 pistole, se l'altro vince la partita si ritorna al caso precedente, nel quale uno avrà due partite e l'altro una. Ma abbiamo già mostrato che in questo caso a quello delle due parti appartengono 48 pistole: dunque se vogliono non giocare questa partita, il primo dovrebbe dire: "Se vinco, otterrò tutto, 64 pistole, se perdo ritiro comunque 48 pistole, quindi datemi le 48 che prenderei comunque e dividiamoci le altre 16 a metà, perché abbiamo le stesse possibilità di vincere." Otterrà così 56 pistole. Poniamo, infine che il primo abbia una partita e l'altro nessuna. Vedete, Signore, che se iniziano una nuova partita, la sorte sarebbe tale che se il primo vince avrà due partite e, suddividendo in base ai casi precedenti, gli appartengono 56 pistole; se perde siccome sono una partita contro una partita, gli toccano 32 pistole. Dunque dovrebbe dire "Se non

> voleste giocare, dovreste darmi le 32 pistole che comunque mi sono assicurate e dividiamo il resto delle 56 a metà: dalle 56 togliete le 32, ne restano 24, e quindi datemi la metà, 12 e prendete le altre 12.”

In questa lettera appare evidente che Pascal non fa ricorso alla teoria della probabilità, ma ragiona sfruttando la logica e il buon senso. La tecnica proposta da Pascal era applicabile ai casi con numeri diversi di partite da giocare o con più di due contendenti. Nonostante ciò, essa non si presenta come un metodo generale, e dalla corrispondenza fra Pascal e Fermat non risultò nessuna formula per la risoluzione del “problema delle parti”.

Pascal propose una soluzione generale in un manoscritto del 1653, in cui risolveva mediante l’uso del “triangolo aritmetico”, già utilizzato da Tartaglia, Cardano e Stiefel in altri lavori. Il manoscritto fu pubblicato nel 1665 dopo la morte di Pascal con il titolo *Traité du triangle arithmétique,* aprendo la strada verso lo sviluppo della moderna teoria della probabilità.

Secondo questo metodo, nel problema problema da Fermat i casi in cui vincerebbe il giocatore A prevedono che A vinca 2, 3 o 4 turni: su 16 risultati possibili delle 4 partite, 6 preveno 2 turni vinti da A, 4 prevedono 3 turni vinti e 1 sola ne prevede 4. In totale, ci sono 11 casi favorevoli al giocatore A e per differenza 5 a favore di B, in coerenza con il risultato di Fermat.

Questi risultati sono gli stessi che si possono leggere nel “triangolo di Tartaglia”.

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| potenza 0 | | | | | | | 1 | | | | | | |
| potenza 1 | | | | | | 1 | | 1 | | | | | |
| potenza 2 | | | | | 1 | | 2 | | 1 | | | | |
| potenza 3 | | | | 1 | | 3 | | 3 | | 1 | | | |
| potenza 4 | | | 1 | | 4 | | 6 | | 4 | | 1 | | |
| potenza 5 | | 1 | | 5 | | 10 | | 10 | | 5 | | 1 | |
| ... | ... | | ... | | ... | | ... | | ... | | ... | | ... |

Per le 4 partite da valutare, si guardi la riga relativa allo sviluppo delle quarte potenze: i numeri che vi compaiono, ovvero 6, 4 e 1, sono rispettivamente i casi favorevoli alla vittoria di A in 2 turni, 3 turni e 4 turni.

In generale, se al momento dell’interruzione del gioco ai giocatori A e B mancano ($n$-$a$)=s punti e *($n$-$b$)=$t$* punti rispettivamente per la vittoria:

- si osserva la riga del triangolo di Tartaglia relativa alla potenza di grado (s+t)
- si sommano i primi t termini della riga: indichiamo la somma con S(t)
- si sommano tutti gli elementi della riga: indichiamo tale somma con S(riga)

Allora al giocatore A, a cui mancano s punti per vincere, spetta $\frac{S(t)}{S(riga)}$ della posta e al giocatore B spetta $\frac{S(riga)-S(t)}{S(riga)}$ della posta.

### Altre soluzioni

Altre soluzioni al "problema della divisione della posta" si trovano nel *Tractatus de ratiociniis in ludo aleae* di Huygens (1657), in cui sono ripresi alcuni problemi tratti dalla corrispondenza fra Pascal e Fermat, e negli scritti di Bernoulli, Montmort e Laplace.

Una versione del problema in cui si suppone che i giocatori abbiano probabilità diverse di vittoria fu risolto anni dopo da de Moivre in *De mensura sortis, seu de probabilitate eventuum in ludis a casu fortuito pendentibus* del 1711 e nella *Doctrine of chances* del 1718, nonostante in questo caso l'approccio fosse formalmente algebrico.

## Riferimenti bibliografici

[1] Marchini C., *Appunti di matematiche complementari AA. 2010-2011*
*http://old.unipr.it/arpa/urdidmat/MC10_11/MC10_11Cap02.pdf*