Scheda di lavoro 2: la *regula de modo*

14 giugno 2016

La *regula de modo* viene utilizzata per la risoluzione di problemi riconducibile alla determinazione delle soluzioni di un sistema lineare.

Se ne ha un esempio di applicazione nel problema 24 del capitolo 51, in cui è richiesto di determinare il prezzo di due tessuti, uno nero ed uno verde, sapendo i costi della somma di determinate quantità di entrambe. Indicati con x ed y rispettivamente il prezzo del panno verde e quello del panno nero, il problema corrisponde alla determinazione delle soluzioni del sistema lineare, con due equazioni in due incognite:

$$\begin{cases} 7x + 3y = 72 \\ 2x + 4y = 52 \end{cases}$$

Cardano comincia risolvendo il sistema con il metodo di sostituzione, per poi introdurre un nuovo metodo di manipolazione dei coefficienti delle equazioni.

Come prima cosa ricava dalla prima equazione il prezzo dei tre panni neri, ovvero la quantità $3y$, da cui ricava quello di un singolo panno nero, ovvero y.

$$3y = 72 - 7x \implies y = 24 - \left(2 + \frac{1}{3}\right) x$$

Cardano prosegue sostituendo la quantità ottenuta nella seconda equazione e risolvendo l'equazione risultante in x:

$$4 \times \left(24 - \left(2 + \frac{1}{3}\right) x\right) = 96 - \left(9 + \frac{1}{3}\right) x$$

$$\left(9 + \frac{1}{3}\right) x - 2x = 96 - 52$$

$$\left(7 + \frac{1}{3}\right) x = 44$$

Da qui è facile ricavare i prezzi dei due panni:

$$x = 6 \quad y = 10$$

Cardano procede poi analizzando le variazioni che le operazioni richeieste dal processo di sostituzione inducono sui coefficienti dell'equazione. Considerando i coefficienti delle equazioni, si ottiene:

$$\begin{array}{ccc} 7 & 3 & 72 \\ 2 & 4 & 52 \end{array}$$

Per la prima operazione di divisione per ricavare y dalla prima equazione, Cardano osserva la variazione del coefficiente della x e del termine noto:

$$\begin{array}{cc} 7 & 72 \\ 3 & 3 \\ \hline 2+\frac{1}{3} & 24 \end{array}$$

Segue la moltiplicazione per 4 (che nello schema iniziale corrisponde al 3) in cui variano il coefficiente della x e il termine noto appena ottenuti:

$$\begin{array}{cc} 2+\frac{1}{3} & 24 \\ 4 & 4 \\ \hline 9+\frac{1}{3} & 96 \end{array}$$

Infine con l'operazione di sottrazione si applicano variazioni anche ai coefficienti della x, non ancora utilizzati:

$$\begin{array}{cc} 9+\frac{1}{3} & 96 \\ 2 & 52 \\ \hline 7+\frac{1}{3} & 44 \end{array}$$

Da qui rimane solo da dividere 44 per $7+\frac{1}{3}$ per ottenere il valore dell'incognita x.

Questa procedura proposta da Cardano permette di risolvere un sistema lineare di due equazioni in due incognite con un metodo automatico, riassumibile nella seguente tabella:

panni verdi	panni neri	prezzo	
7	3	72	
2	4	52	
7		72	$\div$
3		3	
$2+\frac{1}{3}$		24	$\times$
4		4	
$9+\frac{1}{3}$		96	$-$
2		52	
$7+\frac{1}{3}$		44	

Esercizi da svolgere

Provare a risolvere con la *regula de modo* il seguente sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 13 \\ 4x + y = 14 \end{cases}$$

Riferimenti bibliografici

[1] Gavagna V., *Medieval heritage and new perspectives in Cardano's "Practica arithmetice"*, in *Bollettino di storia delle scienze matematiche*, volume XXX, fascicolo 1, 2010.