Scheda di lavoro 1: la *regulae de duplicis et de medio*

14 giugno 2016

1 Regula de duplicis (capitolo 51)

Supponiamo di dover determinare due numeri la cui somma dei quadrati sia uguale ad un dato numero e la cui somma, sommata al loro prodotto, sia uguale ad un altro numero dato. Il problema si riduce alla risoluzione di un sistema di secondo grado di due equazioni in due incognite:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a \\ x + y + xy = b \end{cases}$$

La risoluzione del sistema tramite il metodo dalla sostituzione complica di molto i calcoli. Tramite la *regula de duplicis*, invece, viene introdotta un'incognita ausiliaria t pari a $t = x + y$: il sistema diventa quindi nella forma:

$$\begin{cases} t^2 - 2(b - t) = a \\ xy = b - t \end{cases}$$

siccome $x^2 + y^2 = a$, anche $(x + y)^2 - 2xy = a$.
Indicata con t_p la soluzione positiva del problema, ci si può ricondurre alla soluzione del seguente sistema:

$$\begin{cases} xy = b - t_p \\ x + y = t_p \end{cases}$$

che è immediatamente trasposto in un'equazione di secondo grado.

Esercizi da svolgere

Determinare, tramite la *regula de duplicis,* la soluzione dei seguenti sistemi:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x + y + xy = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{340}{441} \\ x + y + xy = \frac{34}{21} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 125 \\ x + y + xy = 35 \end{cases}$$

2 Regula de medio (capitolo 51)

La *regula de medio* è una variazione della *regula de duplici* applicata al sistema

$$\begin{cases} xy = a \\ x^2 + y^2 + x + y = b \end{cases}$$

Questo metodo prevede la sostituzione tramite l'incognita ausiliaria $t = 2(x + y)$. Il procedimento poi è analogo al precedente: dalle relazioni $x + y = \frac{t}{2}$ e $xy = a$ si ricavano i valori di x ed y in funzione del parametro t, pari a $\frac{t}{4} \pm \sqrt{\frac{t^2}{16} - a}$. Sostituendoli poi nella seconda equazione del sistema, dopo brevi calcoli si ottiene:

$$\frac{t^2}{4} + \frac{t}{2} = 2a + b$$

Detta $\frac{t_p}{2}$ la soluzione numerica positiva di tale equazione, il sistema di partenza si riduce a alla forma più semplice:

$$\begin{cases} xy = a \\ x + y = \frac{t_p}{2} \end{cases}$$

Esercizi da svolgere

Risolvere con la *regula de medio* i seguenti sistemi:

$$\begin{cases} xy = 2 \\ x^2 + y^2 + x + y = \frac{83}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 6 \\ x^2 + y^2 + x + y = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 2\sqrt{3} \\ x^2 + y^2 + x + y = 9 + \sqrt{3} \end{cases}$$

3 Esercizio risolto da Cardano per sostituzione

L'applicazione di particolari metodi di sostituzione come quelli appena descritti sono indicativi di una grande abilità nel riconoscimento della giusta sostituzione, in corrispondenza delle diverse richieste dei quesiti. Nei capitoli conclusivi del *Practica arithmetice* Cardano sfrutta questi metodi per risolvere vari problemi. Ad esempio, nel processo risolutivo del problema 93 del capitolo 66, in cui è prevista la soluzione del sistema di due equazioni in due incognite

$$\begin{cases} (x-y)(x^2-y^2) = 10 \\ (x+y)(x^2+y^2) = 20 \end{cases}$$

Cardano sfrutta il metodo della variabile ausiliaria sostituendo ad y il valore 1, ottenendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} (x-1)(x^2-1) = 10 \\ (x+1)(x^2+1) = 20 \end{cases}$$

In altri termini, approfittando dell'omogeneità del sistema, si può ottenere un'unica equazione nella variabile $\frac{x}{y}$ nel seguente modo: siccome 20 è il doppio di 10, dal sistema si ottiene l'equazione

$$(x+1)(x^2+1) = 2(x-1)(x^2-1)$$

$$x^3+1+x^2+x = 2(x^3+1) - 2(x^2+x)$$

$$\frac{x^3+1}{3} = x(x+1)$$

Dividendo per $(x+1)$ si ottiene l'equazione di secondo grado:

$$x^2+1-x = 3x$$

da cui

$$x^2-4x+1 = 0$$

di cui le soluzioni sono:

$$x_1 = 2-\sqrt{3} \quad e \quad x_2 = 2+\sqrt{3}$$

Riferimenti bibliografici

[1] Gavagna V., *Medieval heritage and new perspectives in Cardano's "Practica arithmetice"*, in *Bollettino di storia delle scienze matematiche*, volume XXX, fascicolo 1, 2010.