Scheda di approfondimento 3

Le equazioni di quarto grado

Il primo tipo di equazione analizzato da Bombelli (useremo la notazione moderna per comodità) è $\boldsymbol{x^4 + ax = b}$**,** che può essere scritta nella forma $x^4 = b - ax$. Egli va a cercare la regola che consente di ottenere con certezza che ambedue i membri siano un quadrato, cioè, se sommiamo ad ambo i membri $2cx^2 + c^2$, abbiamo: $x^4 + 2cx^2 + c^2 = b - ax + 2cx^2 + c^2 = (b + c^2) + 2cx^2 - ax$. Il primo membro è certamente un quadrato, cioè $x^4 + 2cx^2 + c^2 = (x^2 + c)^2$; dobbiamo determinare c in modo che lo sia anche il secondo membro. Per Bombelli $(b + c^2) + 2cx^2 - ax$ è un quadrato se vale la relazione $(b + c^2)2c = \frac{a^2}{4}$ cioè $c^3 + bc = \frac{a^2}{8}$, la cui soluzione è ottenuta risolvendo l'equazione di terzo grado come già spiegato precedentemente.

Esempio:
$x^4 + 20x = 21$ (Bombelli precede l'affermarsi dell'algebra simbolica perciò tutti gli esempi che egli porta hanno coefficienti numerici). Tale equazione può essere trasformata nella seguente: $x^4 + 20x - 20x = 21 - 20x$, cioè $x^4 = 21 - 20x$. Se aggiungiamo ad ambo i membri la stessa quantità $2x^2 + 1$ otteniamo un quadrato nel primo membro ma non nel secondo, per cui dobbiamo operare un'altra scelta. Se aggiungiamo $4x^2 + 4$ otteniamo: $x^4 + 4x^2 + 4 = 21 - 20x + 4x^2 + 4 = 25 - 20x + 4x^2$, cioè $(x^2 + 2)^2 = (5 - 2x)^2$, per cui $x^2 + 2 = 5 - 2x$, cioè $x^2 + 2x = 3$, la cui soluzione è $x = 1$.

Bombelli, studiando sempre la stessa equazione $x^4 + 20x = 21$, pone il problema di trasformarla in un'altra nella quale il termine di quarto grado sia uguale alla somma di quello di terzo grado più un numero. Questo problema è equivalente a quello di trovare due numeri il cui prodotto è 21 e tali che soddisfino l'equazione. Se poniamo $xy = 21$, allora $x = \frac{21}{y}$, per cui l'equazione sarà $\frac{21^4}{y^4} + \frac{20 \cdot 21}{y} = 21$, cioè $21^4 + (20 \cdot 21)y^3 = 21y^4$, $21^3 + 20y^3 = y^4$, $9261 + y^3 = y^4$. Così, conoscendo una soluzione della prima equazione si può ottenere la soluzione della seconda.
Generalizzando, se $x^4 + ax = b$, si considera $x = \frac{b}{y}$ e l'equazione diventa $y^4 = ay^3 + b^3$.
Un altro caso interessante analizzato da Bombelli è quello dell'equazione $x^4 + b = ax$, alla quale si può applicare il procedimento risolutivo precedente. Infatti, se abbiamo $x^4 = ax - b$ e vogliamo ottenere il completamento del quadrato, cioè $x^4 + 2cx^2 + c^2 = ax + 2cx^2 + x^2 - b$, deve essere soddisfatta la condizione $(c^2 - b)2c = \frac{a^2}{4}$, cioè $c^3 = bc + \frac{a^2}{8}$; possiamo trovarci davanti al caso irriducibile quando $\left(\frac{a^2}{16}\right)^2 < \left(\frac{b}{3}\right)^3$. Bombelli, quindi, scrive "*questo non è difetto del Capitolo* [cioè non dipende dall'equazione], *ma è difetto della domanda, che verrà a questo agguagliamento, la quale domanda sarà impossibile a solvere se non finitamente*" e lo farà vedere con degli esempi.

Esempio:
Uno degli esempi proposto da Bombelli è quello dell'equazione $x^4 + 6 = \sqrt{320}x$ quindi si ha che $\frac{a^2}{8} = \frac{320}{8} = 40$, per cui $c^3 = 6c + 40$ avente soluzione $c = 4$, $c^2 - b = 16 - 6 = 10$ e $\sqrt{c^2 - b} = \sqrt{10}$. Consideriamo $\sqrt{10} - 2$, essendo $2 = \frac{c}{2}$, e prendiamo la radice quadrata $\sqrt{\sqrt{10} - 2}$; se a questa

quantità aggiungiamo oppure togliamo $\sqrt{2} = \sqrt{\frac{c}{2}}$, otteniamo le due radici dell'equazione data che sono $\sqrt{2} + \sqrt{\sqrt{10} - 2}$ e $\sqrt{2} - \sqrt{\sqrt{10} - 2}$.

Bombelli spiega da dove ha origine ("*nascimnto*") questa regola.
Dall'equazione $x^4 + 6 = \sqrt{320}x$ si passa all'equazione $x^4 = \sqrt{320}x - 6$. Ora si deve trovare un numero c tale che $(c^2 - b)2c = \frac{a^2}{4}$, cioè $(c^2 - 6)2c = \frac{320}{4} = 80$, $c^3 - 6c = 40$. Si ottiene dunque $c^3 = 6c + 40$, la cui soluzione è $c = 4$. Allora $c^2 = 16$, $c^2 - 6 = 16 - 6 = 10$ e $2c = 8$, per cui $10 \times 8 = 80$, quarta parte del quadrato del coefficiente della *x*. "*Ma perché s'intenda meglio*" spiega Bombelli prendiamo la radice quadrata di x^4, che sommiamo al valore di c, ottenendo $\mathrm{x}^2 + 4$ che elevato al quadrato dà $\mathrm{x}^4 + 8\mathrm{x}^2 + 16$. Sottraendo da ciò x^4, otteniamo $8\mathrm{x}^2 + 16$. Questo è il numero da sommare ad ambo i membri dell'equazione per ottenere che siano quadrati: $x^4 + 8x^2 + 16 = 8x^2 + \sqrt{320}x + 10$, la cui radice quadrata è $x^2 + 4 = \sqrt{8}x + \sqrt{10}$, da cui otteniamo $x^2 + 4 - \sqrt{10} = \sqrt{8}x$, le cui radici sono $\sqrt{2} + \sqrt{\sqrt{10} - 2}$ e $\sqrt{2} - \sqrt{\sqrt{10} - 2}$.
In questo modo Bombelli indica la strategia da usare per arrivare alla soluzione dell'equazione di secondo grado, che è soluzione dell'equazione di quarto grado.

I vari metodi elencati da Bombelli alla fine del secondo libro possono essere riassunti in alcuni passi. L'equazione del tipo $x^4 = ax^3 + b$ può essere risolta in più modi:

a. Con la trasformazione inversa diventa $y^4 + ay = \sqrt{b}$;
b. Con la trasformazione a radici reciproche $\left(x = \frac{b}{y}\right)$ diventa $y^4 + ab^2y = b^3$;
c. Con la regola del completamento del quadrato si ottiene che l'equazione sussidiaria $c^3 + bc = \frac{a^2}{8}b$, risolta la quale l'equazione data può essere ridotta ad un'equazione di secondo grado.