Scheda di approfondimento 2

Dimostrazione geometrica dell'esistenza di almeno una radice reale nelle equazioni di terzo grado.

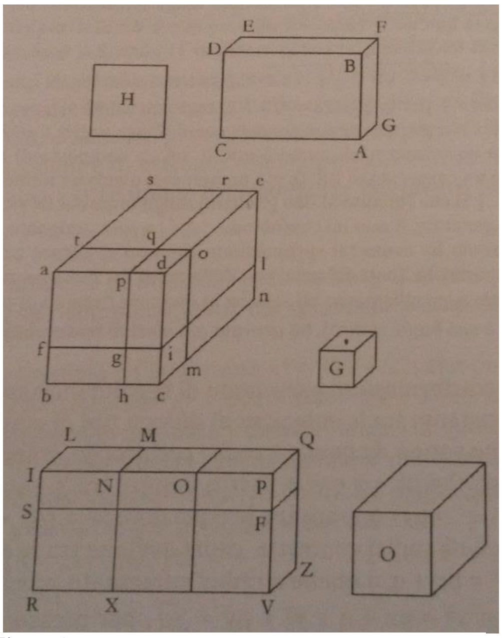

Figura 1

Dimostrazione tridimensionale nel caso dell'equazione

$$x^3 = 6x + 20.$$

Il cubo *abce* sia uguale alla somma del parallelepipedo *ABCE*, di lato $AC = ab = x$ e di volume $6x$ e del corpo H, il cui volume è 20 (Fig.1). Successivamente vengono fatti dei tagli sul cubo *abce* (perpendicolarmente alla superficie) prima lungo la superficie *fil*, poi lungo la superficie *hpr* in modo che $hc = bf$, quindi lungo la superficie *mot* in modo che $cm = hc$. Così il cubo è diviso in 8 pezzi: due sono i cubi *him* e *sq*, mentre gli altri sei sono parallelepipedi, la cui somma forma il parallelepipedo *LPR*, in cui $IR = ab$, $IN = bh$. Supponendo che le superfici *AB* e *IPL* siano uguali, allora il parallelepipedo *IVQ* è uguale al parallelepipedo *ADE*. Per cui necessariamente la somma dei cubi *sq* ed *mih*, cioè la somma di O e di G, è uguale al cubo H di volume 20, il lato del cubo *sq* è uguale ad *IN*, che è la terza parte di *IP*. Tutta la superficie *LP* è 6 perché tutto il parallelepipedo *IVQ* è $6x$ ed *IR* è x. Poiché la superficie *LP* è 6, allora la superficie *LN* è 2 ed *IL* è uguale al lato del cubo *mih*. Ora bisogna solo trovare due numeri il cui prodotto è 2 e tali che la somma dei loro cubi sia 20.

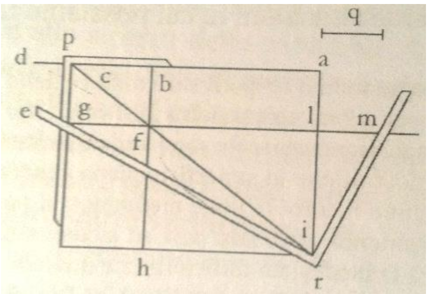

Figura 2

Dimostrazione piana nel caso dell'equazione

$$x^3 = 6x + 4$$

che rientra nel caso irriducibile. Viene tracciato il segmento *me*, prendendo $ml = q = 1$, ed $lf = 6$. Su lf è costruito il parallelogramma *labf* di area 4. Viene prolungato *ab* fino a *d* e *al* fino ad *r* in modo che uno di bracci tocchi l'estremità *m* (Fig.2). Questo squadro si alzi e si abbassi, in modo da tracciare un segmento dal vertice del suo angolo ad *f*. prolunghiamo questo segmento fino ad intersecare *bd* in un punto, in cui mettiamo l'angolo di un secondo squadro con un braccio su *da* e l'altro in modo da intersecare il braccio del primo squadro su un punto del segmento *lf*. Allora il segmento che va da *l* all'angolo dello squadro è l'incognita dell'equazione.

Supponiamo di alzare ed abbassare il primo squadro in modo che i bracci dei due squadri s'intersechino in *g*, poiché $li = x$ ed $lm = 1$, allora $lg = x^2$, essendo $lm \times lg = li^2$. Per cui l'area del parallelogramma *ilg* è pari a $il \times lg = x \times x^2 = x^3$, mentre l'area del parallelogramma *ilf* è $il \times il = 6x$ e l'area del parallelogramma *hfg* è uguale all'area del parallelogramma *alf*, cioè 4. Poiché $ilg = ilf + hfg = 6x + 4$, allora $x^3 = 6x + 4$. Poiché $il = \sqrt{3} + 1$, allora $lg = 4 + \sqrt{12}$ ed $fg = lg - lf = 4 + \sqrt{12} - 6 = \sqrt{12} - 2$. Per cui l'area del parallelogramma *ilg* è $\sqrt{108} + 10$, mentre quella di *ilf* è $\sqrt{108} + 6$.