Scheda di approfondimento 1

Le equazioni di terzo grado

- Il primo tipo di equazione studiato è $\boldsymbol{x^3 + px = q.}$

Per risolverla bisogna trovare due numeri u e v tali che $x = u - v$. Da questa equazione si arriva al sistema:

$$\begin{cases} uv = \dfrac{p}{3} \\ u^3 - v^3 = q \end{cases}$$

da cui si ottiene $u^3v^3 = \frac{p^3}{27}$. Si considerano u^3e $-v^3$ come soluzioni dell'equazioni di secondo grado (la "risolvente") $z^2 = qz + \frac{p^3}{27}$, quindi $u^3 = \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ e $-v^3 = \frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$. Così si ottiene:

$$u = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}};\quad -v = \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

e, quindi, la soluzione dell'equazione di terzo grado

$$x = u - v = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Come per tutti i tipi di equazioni precedenti, anche per questo tipo, Bombelli presenta le *transmutationi*: l'equazione $x^3 + px = q$ si può trasformare nell'equazione $y^3 = py^2 + q^2$, se si pone $xy = q$ e, quindi, sostituendo al posto di x, $\frac{q}{y}$. Questo tipo di trasformazione porta a dire che le due equazioni sono "a radici reciproche".

Esempio

Bombelli fa l'esempio dell'equazione $x^3 + 6x = 20$, la cui ricerca di soluzione è presentata seguendo il ragionamento appena visto in forma generale. La soluzione di questa equazione è: $x = \sqrt[3]{\sqrt{100+8} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{100+8} - 10} = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$.

- Il secondo tipo di equazione studiato è $\boldsymbol{x^3 = px + q}$.

Se si pone $x = u + v$ si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} uv = \frac{p}{3} \\ u^3 + v^3 = q \end{cases} \text{cioè} \begin{cases} u^3v^3 = \frac{p^3}{27} \\ u^3 + v^3 = q \end{cases};$$

u^3e v^3 sono radici dell'equazione (la "risolvente") $z^2 + \frac{p^3}{27} = qz$, il cui discriminante $\Delta = \frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}$ può essere maggiore, minore o uguale a zero. Si hanno dunque tre casi:

1. $\Delta > 0$ allora l'equazione ha una radice che è:

$$x = u + v = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}.$$

2. $\Delta = 0$ allora una radice è $x_1 = 2\sqrt[3]{\frac{q}{2}}$ e le altre due sono coincidenti, $x_2 = x_3 = -\sqrt[3]{\frac{q}{2}}$. Quando Bombelli tratta questo caso considera solo la prima soluzione. Vediamo un esempio trattato nell'opera.

$$x^3 = 2x + 2$$

come soluzione Bombelli considera solo

$$x = \sqrt[3]{1+\sqrt{1-1}} + \sqrt[3]{1-\sqrt{1-1}} = \sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{1} = 1 + 1 = 2$$

3. $\Delta < 0$ è il caso irriducibile che Bombelli affronta in due modi differenti:

- Il primo modo fa uso di un artificio già usato da Cardano, che pure s'era imbattuto nel caso irriducibile, e aveva notato che alcune equazioni di terzo grado si possono ridurre ad equazioni di secondo grado aggiungendo ad entrambi i membri un termine a^3, tale che entrambi i membri risultino essere divisibili per $x - a$ o per $x + a$; cioè un numero tale che $a = \frac{a^3+q}{p}$.
- Con il secondo metodo Bombelli ha dato un grosso contributo alla teoria delle equazioni facendo vedere come la formula risolutiva di Scipione Dal Ferro fornisca radici reali nonostante siano implicati i numeri immaginari (*i più e i meno*). Infatti i tre valori di u e v sono rispettivamente complessi e coniugati e dunque le tre radici dell'equazione di partenza sono reali in quanto somma di numeri complessi e coniugati. (vedere scheda approfondimento 2).

- Per quanto riguarda le equazioni del tipo $\boldsymbol{x^3 + q = px}$ Bombelli afferma che ha radici contrarie rispetto a quelle delle equazioni del tipo $x^3 = px + q$.