L'irruzione dei metodi proiettivi in geometria

La rottura con la geometria classica ereditata dal mondo antico.

Alla luce degli sviluppi della geometria superiore nel XIX secolo, del passaggio dalla geometria alle geometrie nel quadro generale delineato da Felix Klein nel suo famoso *Programma d'Erlangen*, l'opera di Desargues fu anticipatrice di una rivoluzione che si compì in ambito geometrico.

L'opera di geometria proiettiva di Desargues è *Brouillon Projet d'une Atteinte aux Evenemens des rencontres du Cone avec un Plan* pubblicata nel 1639.
Essa scomparve fino al 1847 quando fu ritrovata la copia manoscritta tratta da Philippe de La Hire. Nel 1864, essa fu inserita nel volume che raccoglieva le opere di Desargues, pubblicato da N. G. Poudra. Nel 1950 fu ritrovato un esemplare dell'edizione del 1639 e nel 1951 R. Taton la ripubblicò.

Sebbene il *Brouillon Projet* fu scritto nello spirito degli *Elementi* di Euclide, Desargues introdusse radicali innovazioni, come la nozione di punti e rette all'infinito, e nuovi concetti come quelli di polo e polare rispetto ad una conica. Nel *Brouillon Projet* si trova una teoria delle coniche del tutto nuova per l'epoca.

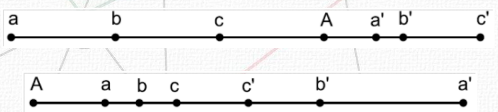
Alcuni risultati di Desargues.

Involuzione di sei punti su una punteggiata

Presa una retta e un punto *A* su di essa, si stacchino, partendo da *A*, dei segmenti *Aa*, *Aa'*; *Ab*, *Ab'*; *Ac*, *Ac'* in modo tale che i rettangoli costruiti sulle tre coppie di segmenti siano uguali tra loro, cioè

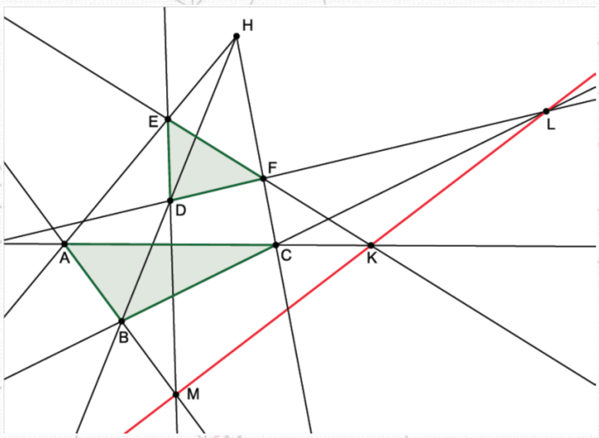
$$Aa \cdot Aa' = Ab \cdot Ab' = Ac \cdot Ac'$$

Allora si dirà che le coppie *a*, *a'*; *b*, *b'*; *c*, *c'* sono in *involuzione*.
L'involuzione è una proprietà invariante per proiezione e sezione.



Teorema dei triangoli omologici

Se due triangoli ABC e DEF nello spazio o nello stesso piano sono tali che le tre rette AE, BD, CF, che congiungono due a due i vertici di questi due triangoli, passano per uno stesso punto H, allora i punti di incontro delle coppie di lati corrispondenti M, K, L giacciono sulla stessa retta.



Le coniche secondo Desargues

Desargues scoprì nuove proprietà delle coniche che oggi chiamiamo *proiettive*.
Le sezioni coniche, sono le intersezioni del cono o del cilindro con un piano generico. Se il piano passa per il vertice del cono e inoltre

- Se nessuna generatrice è parallela al piano, l'intersezione si riduce ad un punto;
- Se una sola generatrice è parallela al piano, l'intersezione è una retta. Il piano è quindi tangente al cono;
- Se due rette generatrici sono parallele al piano, l'intersezione consiste nelle stesse due generatrici.

Se il piano secante non passa per il vertice del cono e inoltre:

- Se nessuna generatrice è parallela al piano secante, l'intersezione è una curva che a distanza finita rientra e ripassa su se stessa, è l'ellisse;
- Se una sola delle generatrici è parallela al piano secante, l'intersezione è una curva che rientra e ripassa su se stessa a distanza infinita, è la parabola;
- Se due generatrici sono parallele al piano secante, l'intersezione è una curva che è divisa all'infinito in due metà simili, è l'iperbole.

Uno dei risultati importanti del *Brouillon Projet* è il seguente teorema:
in un quadrilatero inscritto in una conica, una retta non passante per nessuno dei vertici, interseca la conica e le tre coppie di lati opposti del quadrilatero completo, in coppie di punti che appartengono a un'involuzione.
Il risultato generale è ottenuto sfruttando l'invarianza dell'involuzione per proiezione e sezione.