

Soluzione del problema dei punti

Si può semplificare il problema con un esempio pratico: supponiamo che Aldo e Bruno giochino a testa o croce con una moneta equa scommettendo due somme uguali su chi di loro otterrà il punteggio più alto in una gara con 7 lanci. Supponiamo che a ogni lancio Aldo scelga testa (T) e Bruno scelga croce (C). Ipotizziamo ora che i due debbano abbandonare il gioco dopo 3 lanci, con Aldo che conduce per 2 a 1. Come dovrebbe spartirsi la posta?

L'idea è quella di guardare tutti i possibili esiti con cui il gioco sarebbe potuto terminare se avessero fatto tutti e 7 i lanci. Dato che dopo tre mani Aldo è avanti di due punti a uno, i primi tre lanci devono essersi conclusi con due teste e una croce.

L'approccio di **Fermat** è quello di elencare tutti i modi possibili in cui può terminare la partita e contare poi quante volte vince Aldo e quante Bruno. Riportiamo i modi possibili con cui possono verificarsi i quattro lanci che restano:

TTTT \rightarrow A	CCCC \rightarrow B
TTTC \rightarrow A	CCTT \rightarrow A
TTCT \rightarrow A	CCCT \rightarrow B
TCTT \rightarrow A	CCTC \rightarrow B
CTTT \rightarrow A	CTCC \rightarrow B
TCTC \rightarrow A	CTCT \rightarrow A
TTCC \rightarrow A	CTTC \rightarrow A
TCCC \rightarrow B	TCCT \rightarrow A

Il rapporto è 11 a 5, quindi la posta va divisa secondo la proporzione (11/16 a Aldo e 5/16 a Bruno).

L'approccio di **Pascal** è più generale: Il problema può essere formalizzato considerando $[n : a; b]$ ove a e b sono numeri naturali minori di n e n rappresenta il numero di punti che consentono di vincere la partita; a e b i punti dei due giocatori al momento dell'interruzione della partita.

Si consideri anche $[-a, -b]$ dove a e b sono il numero di partite che restano, rispettivamente, ad Aldo e a Bruno per vincere. In questo esempio $[7 : 2, 1]$ e $[-2, -3]$.

Pascal afferma che nel caso generale in cui a A manchi una partita per vincere e a B ne manchino n ossia $[-1, n]$, la speranza matematica di A è: $\frac{2^n - 1}{2^n}$. Nell'esempio, se si continua con una partita, o esce T e dunque si ha il caso

$[-1, -3]$ con speranza matematica di A data dalla formula $(7/8)$ o esce C e si ha il caso $[-2, -2]$ con speranza matematica di A uguale a quella di B $(1/2)$.

Dunque la speranza matematica finale di A nel caso $[-2, -3]$ è $7/8 + 1/2 = 11/16$ come in precedenza.