La lettera di Pascal a Fermat

Monsier,

Nell'ultima lettera non sono riuscito a dirvi tutto quello che penso riguardo alle partite con più giocatori; e, allo stesso tempo, ho una certa riluttanza a farlo, per paura che questa ammirevole armonia che abbiamo raggiunto e che mi è tanto cara possa venir meno, dato che temo che su questo argomento potremmo avere opinioni differenti. Vorrei ora esporvi per intero il mio ragionamento, aspettandomi che facciate il favore di correggermi se sono in errore o di sottoscrivere le mie affermazioni se sono corrette. Vi chiedo questo in tutta sincerità e buona fede, dato che non sono certo che sarete d'accordo con me.

Quando ci sono soltanto due giocatori, il vostro metodo basato sulle combinazioni funziona perfettamente; ma quando ce ne sono tre, credo di aver trovato una dimostrazione che indica scorretto il procedere in qualunque altro modo diverso dal mio. Il metodo che vi ho mostrato e di cui mi sono servito universalmente, invece, è applicabile a tutte le condizioni immaginabili in ogni sorta di partita, al posto di quello delle combinazioni (che io non uso se non in casi particolari, quando risulta più breve di quello generale), che è valido soltanto in qualche singolo caso e non in altri.
Sono sicuro di poter riuscire a spiegarmi, ma ciò richiederà qualche parola da parte mia e un po' di pazienza da parte vostra.

Ecco il modo in cui procedere quando ci sono due giocatori. Se, in una partita di più mani, due giocatori si ritrovano in una situazione tale che, per vincere la posta, al primo di loro mancano due punti e al secondo tre, voi dite che occorre vedere dopo quante mani l'esito del gioco verrà definitivamente deciso.

Per convenienza possiamo supporre che ciò accadrà dopo quattro mani, cosa da cui concludete che è necessario vedere in quanti modi questi quattro punti possono essere distribuiti fra i due giocatori, calcolare quante combinazioni portano alla vincita del primo e quante a quella del secondo e, quindi, dividere la posta in accordo con questa proporzione. Se non fossi già stato a conoscenza di questo ragionamento, sarei riuscito a malapena a intenderlo; ma anche voi l'avete scritto nella vostra esposizione. Quindi, per vedere in quanti modi i quattro punti possono essere distribuiti fra due giocatori, dobbiamo immaginare che essi giochino con un dado a due facce (dato che ci sono soltanto due giocatori), come se gareggiassero a testa o croce, e che lancino quattro di questi dadi (dato che devono giocare ancora quattro mani). Ora, dobbiamo vedere in quanti modi differenti questi dadi possono fermarsi. È una cosa facile da calcolare. Ce ne possono essere sedici, ossia quattro alla seconda o, in altri termini, al quadrato. Adesso supponiamo che una delle *facce sia contrassegnata con una a (l'esito favorevole al primo giocatore) e l'altra con una b (favorevole al secondo). Dunque, i quattro dadi possono fermarsi in una di queste sedici combinazioni:*

a	a	a	a	a	a	a	a	b	b	b	b	b	b	b	b
a	a	a	a	b	b	b	b	a	a	a	a	b	b	b	b
a	a	b	b	a	a	b	b	a	a	b	b	a	a	b	b
a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	2	1	2	2	2

E, poiché al primo giocatore mancano due punti, tutte le combinazioni che contengono almeno due a - ce ne sono complessivamente 11 - lo portano alla vittoria; e dato che al secondo giocatore mancano tre punti, tutte le combinazioni che contengono tre b - ce ne sono complessivamente 5 - lo fanno vincere. Pertanto, essi dovranno spartirsi la somma in un rapporto di 11 a 5.
Ecco il vostro metodo nel caso in cui ci siano due giocatori. Dopodiché voi dite che, qualora i giocatori siano in maggior numero, la spartizione potrà essere fatta senza difficoltà procedendo in questo medesimo modo.

A questo punto, monsieur, vi devo dire che questa spartizione per due giocatori, basata sulle combinazioni, è molto giusta e valida; se però i giocatori sono più di due, essa non è sempre corretta, e vi spiegherò il motivo di tale differenza.

Ho esposto il vostro metodo ad altri gentiluomini come noi, uno dei quali, monsieur de Roberval, mi ha mosso la seguente obiezione.
È sbagliato basare il metodo di spartizione sulla supposizione che i giocatori debbano per forza disputare quattro mani, dato che vediamo che, quando a uno di loro mancano due punti e all'altro tre, non c'è necessità che giochino tutte e quattro le mani. Può accadere che ne giochino soltanto due o tre, o che forse arrivino veramente a quattro Egli non vede il motivo per cui si debba avere la pretesa di fare una spartizione equa basandosi sul presupposto che si giochi per quattro mani, in vista del fatto che il termine naturale del gioco prevede che si smetta di lanciare il dado dopo che uno dei partecipanti ha vinto; e ritiene che, anche ammettendo che questo presupposto non sia falso, esso andrebbe perlomeno dimostrato. Di conseguenza, egli sospetta che abbiamo commesso un paralogismo.

Io gli ho risposto che il mio ragionamento non è basato tanto su questo metodo delle combinazioni che, in verità, in tale occasione è fuori luogo, quanto piuttosto sul mio metodo universale, dal quale non sfugge nulla e che

porta con sé la dimostrazione. Questo metodo giunge alla stessa precisa divisione che si ottiene con quello delle combinazioni. Inoltre, gli ho già mostrato la validità delle spartizioni tra due giocatori stabilite tramite il metodo delle combinazioni. Non è forse vero che se due giocatori, vedendo che – secondo le condizioni delle nostre ipotesi – a uno di loro mancano due punti e all'altro tre, si accordano per giocare tutte e quattro le mani rimanenti (ossia, per lanciare insieme quattro dadi a due facce), non è forse vero, dicevo, che se qualcosa impedisce loro di fare i quattro lanci, la spartizione dovrebbe avvenire, come abbiamo detto, in accordo con le combinazioni favorevoli a ciascuno dei due? Egli si è detto d'accordo con me su questo punto, che può di fatto considerarsi dimostrato. Tuttavia, ha negato che la stessa cosa valga anche quando i giocatori non sono obbligati a fare i quattro lanci. Gli ho quindi risposto in questi termini.
Non è forse chiaro che gli stessi giocatori, che ora non sono costretti a fare i quattro lanci, ma vogliono terminare la partita prima che uno di loro abbia ottenuto il punteggio pieno, potrebbero, senza che vi siano perdite o guadagni, essere obbligati a giocare tutte e quattro le mani, e che questo accordo non cambierebbe in alcun modo la loro condizione? Infatti, se il primo giocatore vince i primi due dei quattro punti in gioco, colui che ha vinto si rifiuterà forse di fare latri due tiri, vedendo che se vince i primi due dei quattro punti in gioco, colui che ha vinto si rifiuterà forse di fare altri due tiri, vedendo che se vince queste altre due mani non vincerà di più di quanto abbia già fatto e che se le perde avrà nondimeno vinto? In quest'ultimo caso, infatti, i due punti vinti dal secondo giocatore non gli sarebbero comunque sufficienti per ottenere la vittoria finale, dato che gliene mancano tre, e in quattro lanci non gli sarebbero comunque sufficienti per ottenere la vittoria finale, dato che gliene mancano tre, e in quattro lanci non ci sono abbastanza punti perché ciascuno dei due partecipanti possa ottenere quelli che gli mancano.

È certamente opportuno considerare che è assolutamente uguale e indifferente per ciascuno dei due gareggiare seguendo la condizione naturale del gioco, cioè finire non appena uno di loro raggiunge il punteggio che gli serve per vincere la partita, oppure fare tutti e quattro i lanci. Pertanto, dato che queste due condizioni sono uguali e indifferenti, la spartizione della posta dovrebbe essere la stessa in entrambi i casi. Ma visto che quando sono obbligati a giocare tutte e quattro le mani è giusto dividere la posta nel modo che ho indicato, ne segue che è giusto dividerla in questo stesso modo anche nell'altro caso.

È così che l'ho dimostrato; e, come sapete, questa dimostrazione si basa sull'uguaglianza delle due condizioni, quella naturale e quella assunta riguardo ai due giocatori; la spartizione della posta è la stessa in entrambi i metodi e, se un giocatore vince o perde secondo un metodo, vincerà o perderà an-

che secondo l'altro, e il risultato ottenuto dai due sarà comunque sempre il medesimo. Applichiamo ora il medesimo ragionamento a tre giocatori e assumiamo che al primo manchi un punto, al secondo due a al terzo due. Per fare la spartizione seguendo lo stesso metodo delle combinazioni, è necessario innanzitutto scoprire in quante mani la partita risulterà decisa, così come abbiamo fatto quando c'erano due giocatori. Essa sarà decisa in tre mani, dato che è impossibile che i partecipanti disputino tre mani senza che ne esca necessariamente il vincitore.
Occorre ora vedere in quanti modi tre lanci possono essere combinati fra tre giocatori, e quanti di questi lanci sono favorevoli al primo, quanti al secondo e quanti al terzo, per poi seguire questa medesima proporzione nel distribuire la posta, come abbiamo fatto nell'ipotesi dei due giocatori.
È facile vedere quante combinazioni ci sono in tutto. Il numero che cerchiamo è 3 alla terza potenza, ossia 3 al cubo, cioè 27. Infatti, se si lanciano insieme tre dadi (dato che è necessario lanciare ognuno di essi tre volte), e questi dadi hanno tre facce ciascuno (dato che ci sono tre giocatori), una marcata con una a (l'esito favorevole al primo giocatore), l'altra con una b (favorevole al secondo) e l'altra con una c (favorevole al terzo), è evidente che questi tre dadi lanciati assieme possono fermarsi in 27 modi differenti, e cioè:

a	a	a	a	a	a	a	a	a	b	b	b	b	b	b	b	b	b	c	c	c	c	c	c	c	c	c
a	a	a	b	b	b	c	c	c	a	a	a	b	b	b	c	c	c	a	a	a	b	b	b	c	c	c
a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1			1			1	1	1	1			1		
				2						2		2	2	2		2						2				
								3									3			3			3	3	3	3

Dato che al primo manca soltanto un punto, ne segue che tutti gli esiti in cui c'è almeno una a sono a lui favorevoli. Ce ne sono 19. Al secondo mancano due punti, così che tutti gli esiti in cui ci sono almeno due b sono a suo favore. Ce ne sono 7. Al terzo mancano due punti, pertanto tutti gli esiti in cui compaiono almeno due c sono a lui favorevoli. Ce ne sono 7. Se da questo concludiamo che è necessario spartire la posta dando a ciascuno secondo il rapporto di 19-7-7, stiamo però commettendo un grave errore, ed esito a credere che voi lo fareste. Ci sono infatti diversi casi favorevoli sia al primo sia al secondo, come abb, dove ci sono sia la a che manca al primo, sia le due b che servono al secondo. Allo stesso modo, il risultato acc è favorevole al primo e al terzo.

I risultati che portano alla vittoria di due giocatori non dovrebbero quindi essere contati come esiti che valgono l'intera posta in gioco, ma soltanto la metà di essa. Infatti, se si verifica l'esito acc, il primo e il terzo avranno il medesimo diritto alla somma, dato che ognuno ha raggiunto il punteggio che gli serve. Di conseguenza, dovrebbero dividersi la posta a metà. Ma se esce il risultato aab, vince soltanto il primo. È necessario fare questa assunzione. Ci sono 13 esiti che assegnano l'intera posta al primo, 6 che gliene danno la metà e 8 che non gli danno nulla. Pertanto, se l'intera somma ammonta a una pistola, ci sono 13 esiti che gli assegnano una pistola, 6 che gliene fruttano mezza e 8 che non gli portano nulla.

Quindi, in questo caso di spartizione, dobbiamo moltiplicare:

	13	per una pistola, che fa		13
	6	per mezza, che fa		3
	8	per zero, che fa		0
Totale	27		Totale	16

e dividere la posta dei valori, cioè 16, per la somma degli esiti possibili, cioè 27, ottenendo così la frazione 16/27. Questa sarà quindi la parte della posta che dovrà andare al primo giocatore nel caso di una spartizione: 16 pistole su 27. Al secondo e al terzo giocatore andranno due quote identiche:

Ci sono	4	esiti che valgono una pistola, che moltiplicato fa	4
Ci sono	3	esiti che valgono 1/2 pistola che moltiplicato fa	$1\frac{1}{2}$
E ci sono	20	esiti che non valgono nulla, che moltiplicato fa	0
Totale	27	Totale	$5\frac{1}{2}$

Pertanto, al secondo giocatore andranno cinque pistole e mezza su ventisette, e lo stesso al terzo. E la somma di $5\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{2}$ e 16 fa appunto 27.

Mi sembra che questo sia il modo in cui è necessario fare la spartizione seguendo il vostro metodo delle combinazioni, a meno che su questo argomento non ci sia qualche altro elemento di cui non sono ancora a conoscenza. Ma, se non mi sbaglio, questa spartizione non è giusta.

La ragione è che stiamo facendo una supposizione falsa: stiamo cioè ipotizzando che essi faranno sempre e comunque tre lanci anzichè attenerci alla

condizione naturale di questo gioco, che prevede che essi giocheranno soltanto fino a quando uno di loro non abbia ottenuto il numero di punti che gli serve per vincere, dopodichè la partita avrà fine.
Ciò non significa che non possa succedere che essi giochino tutte e tre le mani, bensì che può capitare che ne disputino solo una o due e che poi non abbiano più bisogno di proseguire.

Ma, direte voi, perchè non è possibile fare anche in questo caso la medesima assunzione che abbiano fatto nel caso di due giocatori? La ragione è questa.
Stando alla vera condizione naturale del gioco con tre partecipanti, solo uno di loro potrà vincere, dato che in base ad essa la partita terminerà non appena uno di loro avrà vinto. Stando invece alla falsa condizione presupposta, due partecipanti potrebbero raggiungere il punteggio richiesto per vincere, dato che il primo potrebbe ottenere il punto che gli manca e uno degli altri due potrebbe conquistare i due punti che mancano a lui, visto che faranno in tutto tre lanci. Quando ci sono soltanto due giocatori, invece, la condizione presupposta e quella vera sono in sintonia, non avvantaggiando nessuno a discapito degli altri. Questa è la causa dell'estrema differenza tra la condizione presupposta e quella naturale.

Se i giocatori si ritrovano nella situazione data nell'ipotesi (ossia, se al primo manca un punto, al secondo due e al terzo due), e se si accordano nel decidere che disputeranno tutte e tre le mani, e che chi conquista i punti che gli mancano prenderà l'intera posta se è l'unico a vincere, mentre la dividerà a metà con un altro se saranno in due a ottenere i punti di cui hanno rispettivamente bisogno; allora, in questo caso, la spartizione dovrebbe essere fatta nei termini che ho indicato prima. Delle 27 pistole, il primo ne riceverà 16, il secondo $5\frac{1}{2}$ *e il terzo* $5\frac{1}{2}$*, cosa che risulterà dimostrata in base all'assunzione della suddetta condizione.*

Se però essi giocano attenendosi semplicemente alla condizione per cui non dovranno necessariamente fare tre lanci, ma giocheranno soltanto finchè uno di loro non abbia conquistato i punti che gli mancano, e a quel punto la partita si chiuderà senza che venga data a un altro giocatore l'opportunità di ottenere quelli che mancano a lui, allora al primo andranno 17 delle 27 pistole, al secondo 5 e al terzo 5. E a tale risultato sono arrivato attraverso il mio metodo generale, che determina anche che, alla precedente condizione, il primo giocatore dovrebbe ricevere 16 pistole, il secondo $5\frac{1}{2}$ *e il terzo* $5\frac{1}{2}$*, il tutto senza fare ricorso alle combinazioni, dal momento che questo metodo funziona in tutti i casi senza nessun problema.*

Queste, monsieur, sono le mie riflessioni su tale argomento, riguardo al quale non ho nessun altro vantaggio su di voi se non quello di avervi meditato più a lungo. Ma si tratta di un vantaggio ben piccolo, dato che una vostra *rapida occhiata è più penetrante dei miei prolungati sforzi.*

Non mi soffermo a esporvi le ragioni per cui attendo con impazienza il vostro giudizio. Penso che abbiate da questo che la teoria delle combinazioni va accidentalmente bene per il caso di due giocatori, ma non è un metodo generale e va bene solo nei casi in cui è necessario disputare esattamente un certo numero di mani.

Di conseguenza, dato che quando mi avete mandato la divisione tra più giocatori non avevate il mio metodo, ma solo quello delle combinazioni, temo che su questo argomento avremo opinioni differenti.
Vi prego di farmi sapere come procedereste nella vostra ricerca su questo problema. Riceverò la vostra replica con rispetto e gioia, anche se le vostre opinioni dovessero essere contrarie alle mie.

Vostro, eccetera.
Pascal