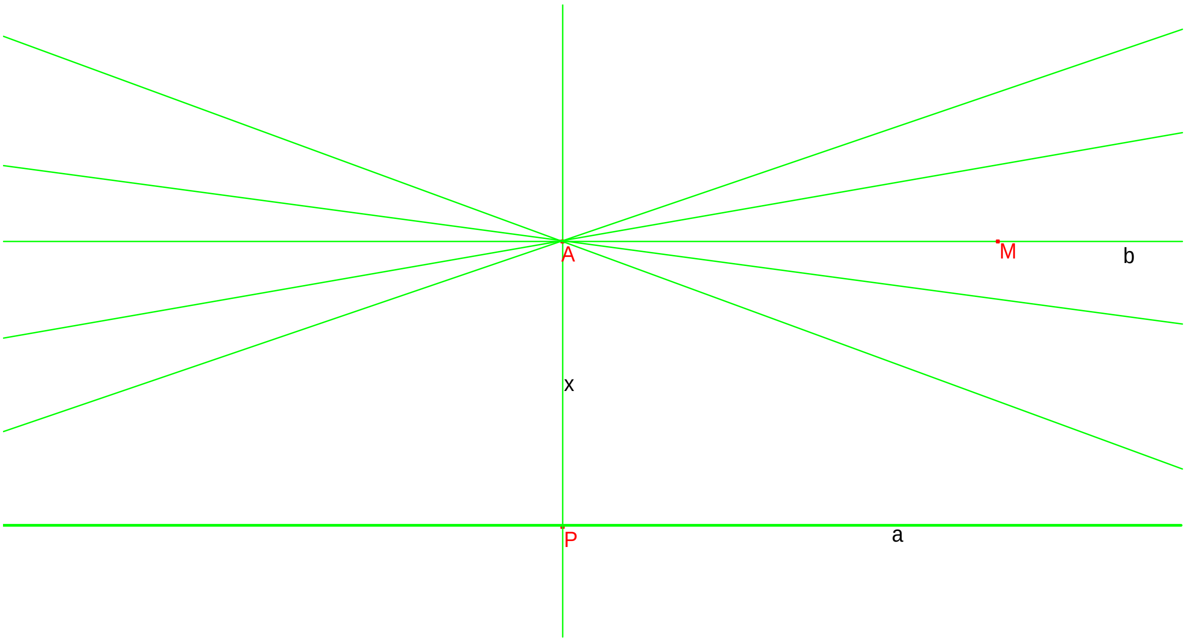
LA GEOMETRIA NON EUCLIDEA SECONDO LOBACEVSKIJ

Nel lavoro di Lobacevskij il V postulato euclideo viene sostituito dall'assunzione:

data una retta *a* qualunque, per un punto esterno ad essa passano infinite rette complanari ad *a* che non hanno punti in comune con essa.



Fra queste infinite rette non secanti, solo due vengono definite parallele da Lobacevskij.

Consideriamo la retta *a* ed il punto ed essa esterno A. Sia il segmento AP sulla perpendicolare ad *a* passante per A. Già Euclide dimostrò che la perpendicolare *b* ad AP passante per A non incontra la retta *a* senza servirsi del V postulato, pertanto questo risultato appartiene alla geometria assoluta.

Si considerino, fra le rette appartenenti al fascio per A, quelle che passano internamente all'angolo $P\hat{A}M$, esse possono essere ripartite in due classi contigue: una classe contiene le rette che incontrano *a*, mentre l'altra contiene quelle che non incontrano *a*.

Esisterà una retta *p* che funge da elemento separatore delle due classi, tale è la parallela secondo Lobacevskij nel verso fissato.

La retta *p* determina l’angolo α, detto angolo di parallelismo relativo alla distanza AP, in modo tale che $0<\alpha<90°$.

Si dimostra che l’angolo di parallelismo dipende unicamente dalla distanza del punto A dalla retta *a*, ed è funzione decrescente di tale distanza tendendo a zero quando essa tende all’infinito e a π/2 quando la distanza tende a zero.

In questa geometria la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre minore di un angolo piatto, e decresce all’aumentare dell’area del triangolo. Tale area, è bene sottolinearlo, non può essere arbitrariamente grande.

Affrontando poi l’aspetto trigonometrico della sua geometria, Lobacevskij giunge all’uguaglianza: $\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} = e^{-x}$

Essendo α l’angolo di parallelismo relativo alla distanza x, distanza fra il punto A e la retta a.

Lobacevskij inoltre introdusse le relazioni che legano i lati e gli angoli dei triangoli piani della sua geometria, che risultavano molto simili alle analoghe formule della trigonometria sferica; il suo obbiettivo era quello di rendere la trigonometria indipendente dalla geometria euclidea.