

Esistono delle forme geometriche che sono in grado, per complessi fattori psicologici non del tutto chiariti, di comunicarci un senso d'equilibrio, di gradimento e di benessere. Tra queste analizzeremo le spirali e le eliche. Nell'arte e nell'architettura queste forme hanno suscitato interesse sin dall'antichità. Infatti sia le spirali sia le eliche risultano delle forme ricorrenti nelle diverse culture e nei diversi periodi storici.

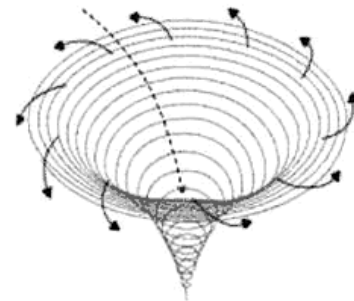
Hanno origini simboliche molto antiche, che sembrano risalire al Neolitico. Più precisamente la spirale era una figura che l'uomo neolitico associava a specifici animali, in particolare al serpente che, arrotolato su se stesso forma una doppia spirale.

Gli importanti simbolismi che le spirali e le eliche hanno assunto nelle diverse culture, si possono spiegare col fatto che queste forme geometriche sono le più diffuse in natura: dai fiori alle corna di alcuni animali, dalla molecola del DNA alle galassie,...

SPIRALE:

curva asimmetrica aperta generata da un punto che si arrotola intorno ad un'origine fissa, detta *polo*, aumentando (o diminuendo, secondo il verso) in modo continuo la distanza da essa. La curva spirale è dunque la traiettoria disegnata da un punto P mobile su una semiretta che ruota attorno al suo centro O; OP è detto *raggio vettore* (*r*) della spirale e i tratti curvilinei sono detti *spire*. Le curve spirali si differenziano in bidimensionali e tridimensionali (ad esempio l'elica o il vortice).

Uno dei più antichi trattati matematici sulle spirali si fa risalire ad Archimede (287-212 a.C) che definì la spirale come la traiettoria di un punto che si sposta uniformemente lungo una semiretta che è in moto rotatorio intorno alla sua origine fissa. Esistono diversi tipi di spirale, tra le più note ricordiamo: la spirale di Archimede, la spirale di Fibonacci, la spirale aurea, la spirale logaritmica, la spirale iperbolica, la spirale di Fermat, ...

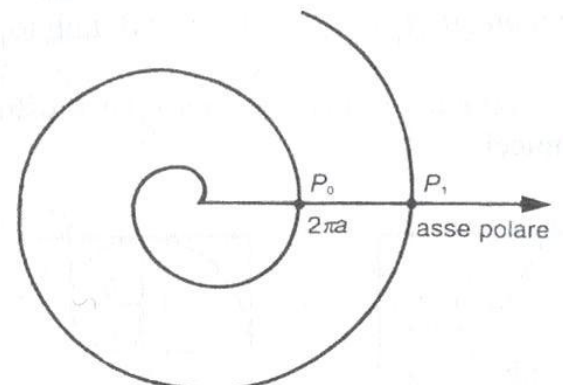


► La spirale di Archimede:

È una curva piana, tracciata da un punto che si sposta uniformemente lungo una semiretta, mentre questa a sua volta ruota uniformemente attorno al suo estremo. L'equazione è espressa in coordinate polari, ed è del tipo:

$$r = a \cdot \sigma \text{ con } a > 0$$

la spirale di Archimede possiede una proprietà: la distanza tra due punti successivi, allineati su una stessa retta passante per il polo, è costante e vale 2π



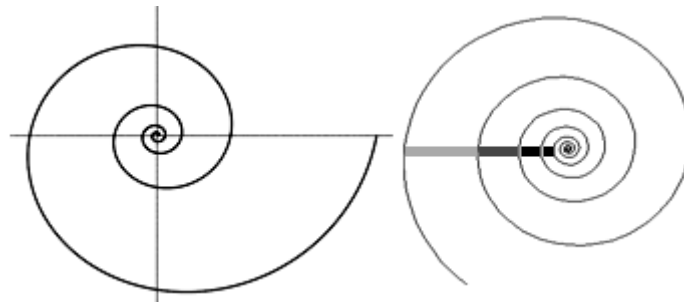
► La spirale logaritmica:

Fu studiata per la prima volta nel 1638 da René Descartes (1596 – 1650): “(...) è detta spirale logaritmica ogni figura piana che proceda da un punto fisso tale che l’area vettoriale di qualsiasi settore sia sempre una proporzione aggiunta della figura precedente”.

Il matematico svizzero Jakob Bernoulli (1654 – 1705) definì la curva “*Spira mirabilis*”, spirale meravigliosa, disponendo che essa fosse scolpita sulla sua tomba accanto alla frase “*Eadem mutata resurgo*”, ovvero “sebbene diversa, rinasco ugualmente”. In onore al matematico la curva viene anche chiamata *di Bernoulli*. Per quanto riguarda la pietra tombale, la spirale che ancora oggi è visibile sulla lapide del matematico a Basilea è purtroppo una spirale di Archimede, forse l’unica che lo scalpello riuscì a riprodurre.

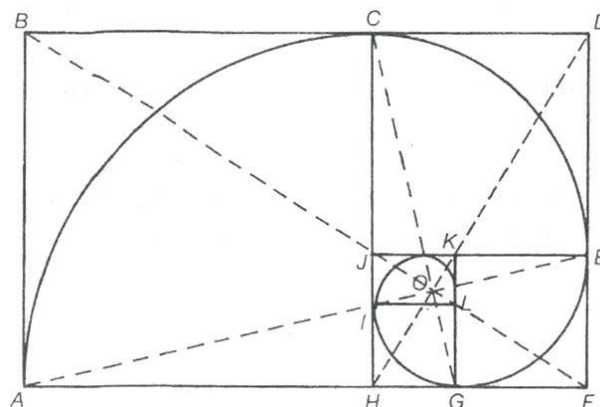


La spirale logaritmica è la traiettoria di un punto che si muove di moto uniformemente accelerato su una semiretta, semiretta che ruota uniformemente intorno alla sua origine. Il segmento di distanza tra spire successive (Il *passo* della spira) non è costante ma aumenta secondo una progressione geometrica. Ogni raggio vettore sarà più ampio del precedente secondo un rapporto costante perciò la curva crescendo non cambia forma ed è chiamata spirale *Geometrica o Proporzionale*. Tale spirale non raggiunge mai il polo, poiché il centro della spirale è un punto *asintotico*. Proseguendo l’ingrandimento verso il centro si ritrovano infinite spirali identiche in scala ridotta. L’aggettivo “meravigliosa” di Bernoulli si riferisce proprio al fatto di non avere né inizio né fine.



► La spirale aurea:

È direttamente connessa al rettangolo aureo. Infatti se all’interno di un rettangolo aureo si disegna un quadrato con lato uguale al lato minore del rettangolo, il rettangolo differenza sarà anch’esso un rettangolo aureo. Ripetiamo l’operazione per almeno cinque volte. Si centri il compasso nei vertici dei quadrati ottenuti e si tracci un arco di ampiezza corrispondente al lato del quadrato. Procedendo in questo modo si ottiene una linea continua che definisce la spirale



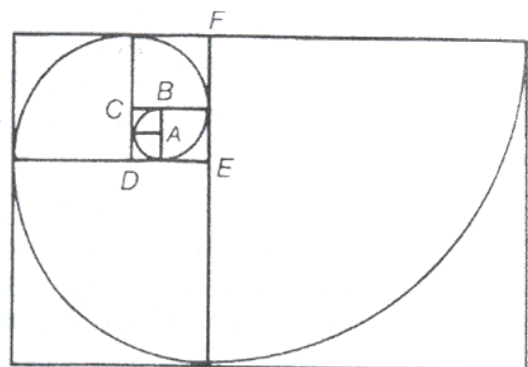
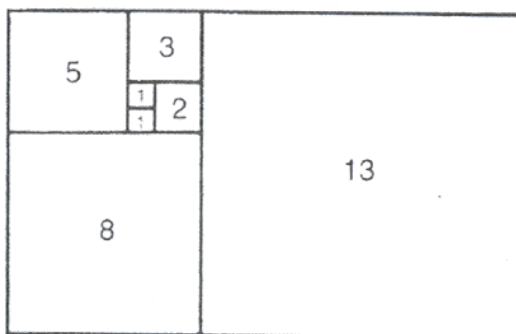
► La spirale di Fibonacci:

È possibile costruire una spirale nella quale compaiono come elementi di base dei quadrati i cui lati sono i numeri di Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13. Si consideri la disposizione costituita dai seguenti quadrati:

- Due quadrati di lato 1 sono posti uno sull'altro
- Affiancati ai precedenti quadrati ce n'è uno di lato 2
- Sopra i tre quadrati ottenuti se ne trova uno di lato 3

Procedendo in modo ripetitivo si ottiene la disposizione dei quadrati come in figura, dove ciascun lato ha una misura corrispondente a quella di un numero di Fibonacci. La spirale di Fibonacci è costruita nel seguente modo:

- Dal punto A si tracci una prima semicirconfenza di raggio 1
- Dal punto B si tracci un quarto di circonferenza di raggio 2
- Dal punto C si tracci un quarto di circonferenza di raggio 3
- Dal punto D si tracci un quarto di circonferenza di raggio 5
- Dal punto E si tracci un quarto di circonferenza di raggio 8
- Dal punto F si tracci un quarto di circonferenza di raggio 13

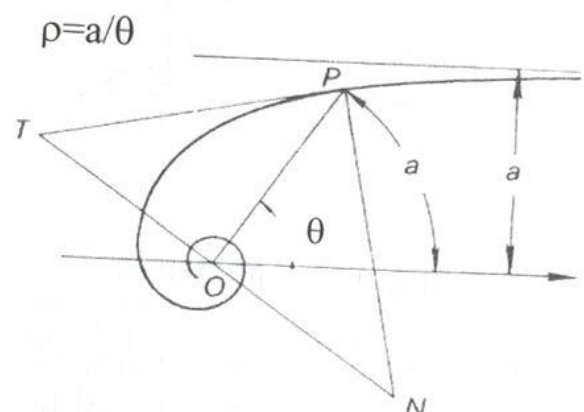


► La spirale iperbolica:

Fu descritta per la prima volta da Pierre Varignon (1654-1722). L'equazione, espressa in coordinate polari, è del tipo:

$$\rho = \frac{a}{\theta} \quad \text{con } a > 0$$

La curva si avvolge infinite volte intorno al polo senza mai raggiungerlo. Infatti a mano a mano che θ aumenta, il raggio ρ diminuisce, assumendo valori sempre più vicini allo zero.

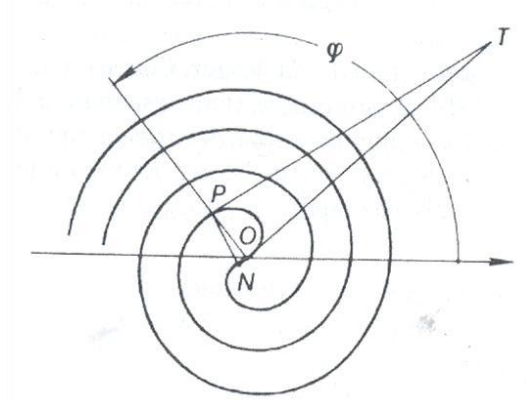


► La spirale di Fermat:

È una spirale doppia la cui equazione polare è del tipo:

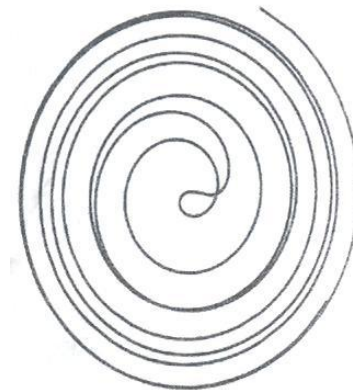
$$r^n = a\theta$$

I due bracci della spirale si sviluppano in direzioni opposte, senza mai intersecarsi (le spirali di Fermat sono un caso particolare delle spirali paraboliche).



► La spirale parabolica:

È una spirale doppia; possiede due rami illimitati che si intersecano anche infinite volte.

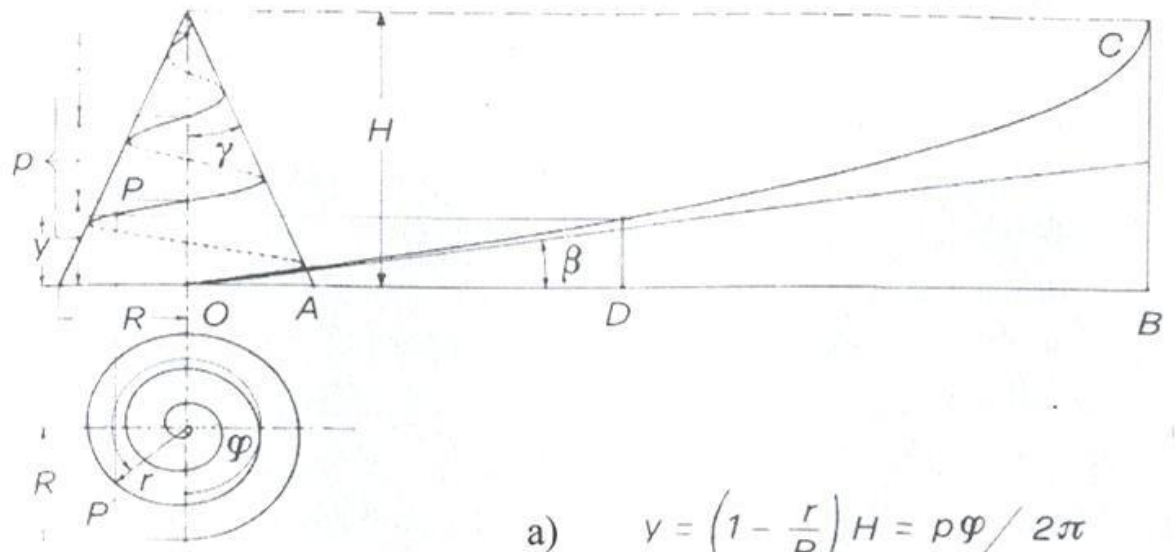


LE ELICHE:

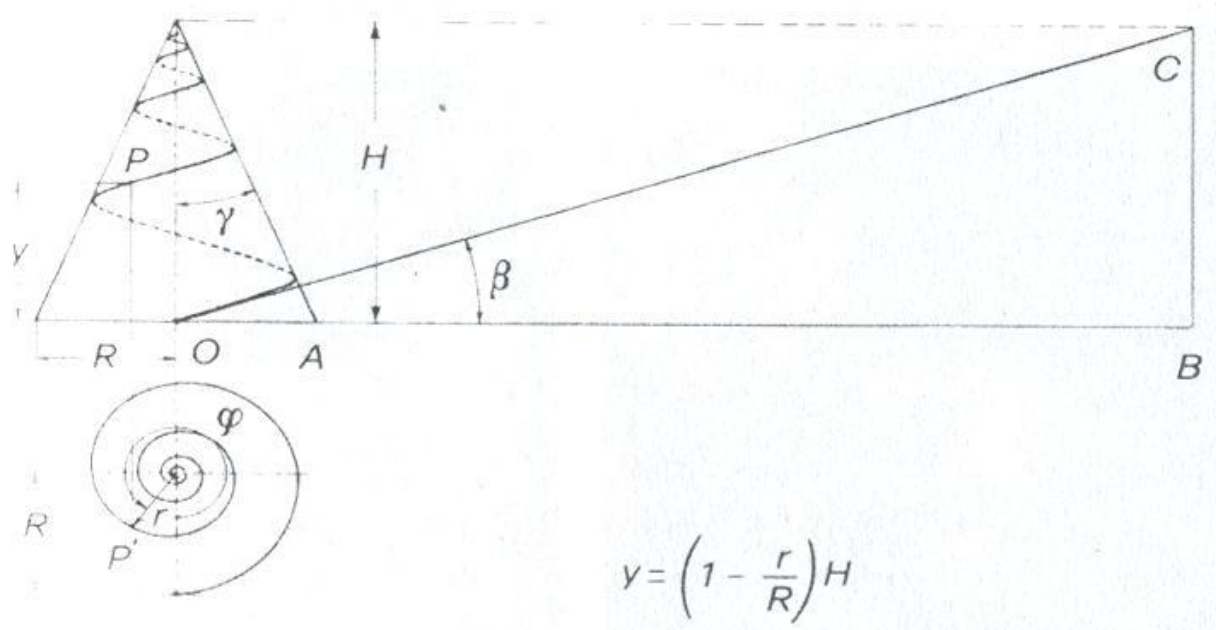
Sono curve nello spazio a tre dimensioni rappresentate da una linea avvolta con un angolo costante attorno ad un cilindro.

La spirale di Archimede e la spirale logaritmica si ottengono come proiezioni ortogonali di eliche avvolte su un cono rotondo in modo che se ne conservino rispettivamente il passo e l'inclinazione. Nel primo caso, si nota che la proiezione y sull'asse del cono del tratto d'elica compreso tra il punto d'origine O della circonferenza di base e quello P generico è proporzionale all'angolo fino a questo descritto.

Nel secondo caso, invece, è costante il rapporto tra la lunghezza y e quella del tratto di spirale proiettata sul piano di base.



a)
$$y = \left(1 - \frac{r}{R}\right) H = \frac{p\varphi}{2\pi}$$



$$y = \left(1 - \frac{r}{R}\right) H$$