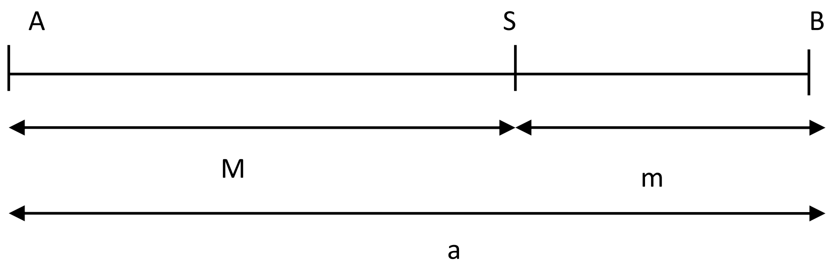
La teoria delle proporzioni, che è alla base di tutta l’arte e l’architettura greca, ha radici molto profonde che probabilmente risalgono all’antica civiltà egizia. Nel mondo greco l’ideale di bellezza era espresso sotto forma di numeri e di proporzione e il concetto di relazione si esprimeva come rapporto a : b (a/b). Dalla combinazione di due o più relazioni si originavano o la proporzione espressa dall’equazione generale a : b = c : d (proporzione disgiunta) o, a : b = b : c (proporzione continua) nel caso in cui le grandezze intermedie b e c fossero uguali. I Greci definirono una proporzione molto speciale, la proporzione geometrica più semplice, la proporzione continua per eccellenza: $ab=(a+b)a$ che utilizzava due sole grandezze a e b, e la loro somma a + b come terzo termine. Tale proporzione origina il rapporto della sezione aurea che è la divisione di una qualsiasi lunghezza in due parti a e b tali che il rapporto tra la somma a + b delle due grandezze e la più grande di esse, sia uguale al rapporto tra quest’ultima e la più piccola.

SEGMENTO AUREO:

La sezione aurea di un segmento è la parte di un segmento che è media proporzionale fra l’intero segmento e la parte restante.



Dato un segmento AB ed un suo punto interno S, si dice che S divide AB secondo la sezione aurea se:

$$\frac{AB}{AS} = \frac{AS}{SB}$$

quindi:

$$(AS)^2 = AB \cdot SB.$$

Se si pone:

$$M = AS,\ m = SB,\ a = AB$$

si ottiene:

$$M^2 = a \cdot m$$

Si ha che:

$$a = AB = m + M$$

sostituisco:

$$M^2 = m^2 + M \cdot m$$

Divido tutto per m^2:

$$M^2 = m^2 + M \cdot m$$

Pongo:

$$x = \frac{M}{m}$$

Ottengo un equazione di secondo grado:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

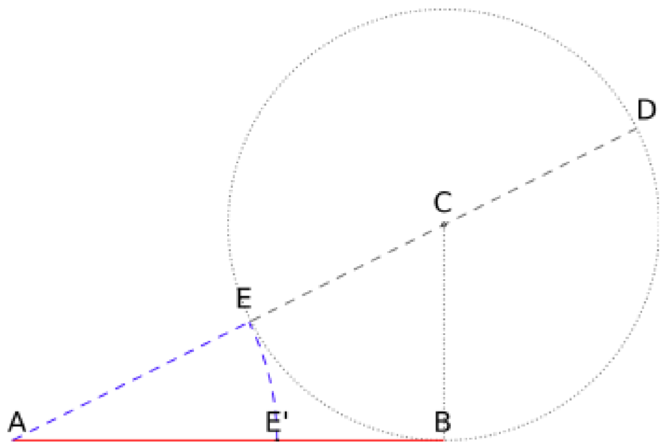
Risolvendola ottengo due soluzioni, una negativa da escludere e una positiva, definita dalla quantità:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

che si indica con la lettera greca ϕ (dalla lettera iniziale del nome greco dello scultore Fidia). Se si calcola il valore della frazione si trova il numero irrazionale approssimato alla quinta cifra 1,61803. Questo valore è detto sezione aurea (o numero d'oro) è una delle costanti matematiche più antiche che esistano. Tale denominazione fu coniata nel XIX secolo eLuca Pacioli la definì Divina proporzione.

Platone considerava la sezione aurea la chiave della fisica del cosmo. La costruzione geometrica che porta all'individuazione della sezione aurea era stata proposta da Euclide nei suoi *Elementi.*

La costruzione geometrica di un segmento in proporzioni auree è molto semplice: dato un segmento AB, sulla perpendicolare in B ad AB si prenda un segmento BC uguale alla metà di AB. Descritta la circonferenza di centro C e raggio CB, sia E il punto in cui il segmento AC interseca la circonferenza suddetta. Si centri in A e si tracci un arco di circonferenza con raggio AE. Detto poi E' il punto in cui il segmento AB interseca la circonferenza di centro A e raggio AE, si dimostra che il segmento AE' è la parte aurea del segmento AB.



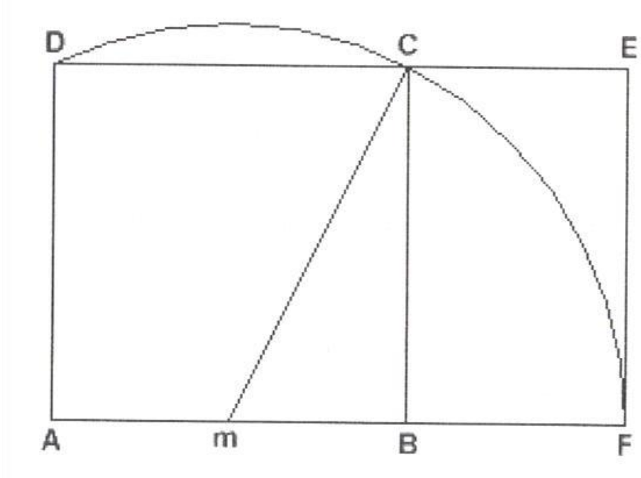
Nell'ambito della geometria si studia quello che viene definito il "rettangolo aureo", che ha le seguenti caratteristiche:

- Il rapporto tra il lato più lungo (base) e quello più corto (altezza) è la sezione aurea
- Se si divide la base in proporzione aurea, si ricavano un quadrato e un altro rettangolo con le stesse caratteristiche di quello di partenza
- Se in questo nuovo rettangolo si suddivide di nuovo la base in proporzioni auree si ottengono un quadrato e un rettangolo aureo ecc.

RETTANGOLO AUREO:

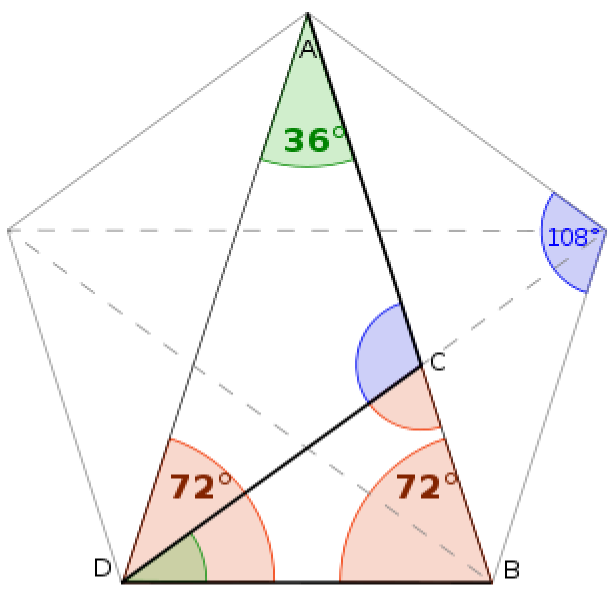
Costruzione del Rettangolo aureo:

- Si disegna un quadrato di dimensioni arbitrarie (ABCD)
- Sia m il punto medio di AB
- Con il compasso si centri in m con raggio mC e si tracci un arco di circonferenza che incontra nel punto F il prolungamento del lato AB
- Si disegni dal punto F la perpendicolare al lato AB, che incontra il prolungamento del lato DC nel punto E



TRIANGOLO AUREO:

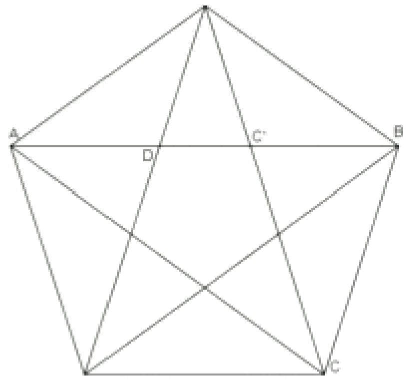
Un'altra figura geometrica che trova molte applicazioni, connessa alla sezione aurea, è il triangolo isoscele con angolo al vertice di 36° e i due angoli alla base di 72° ciascuno. Se tracciamo la bisettrice dell'angolo alla base ADB, otteniamo un triangolo isoscele DCA con angolo al vertice di 108° e due angoli alla base ciascuno di 36°, e un triangolo isoscele DCB con angolo al vertice di 36° e due angoli alla base di 72° ciascuno. Il triangolo CDB è simile al triangolo ADB. Il lato AB è diviso dal punto C in proporzioni auree. Se tracciamo la bisettrice dell'anglo DCB, otteniamo un triangolo che è simile ai triangoli DCB e ADB. In generale la base del triangolo più grande risulta sempre uguale al lato opposto del triangolo più piccolo ottenuto. Si instaura una progressione continua che si può far procedere all'infinito, in cui compare costantemente la sezione aurea.

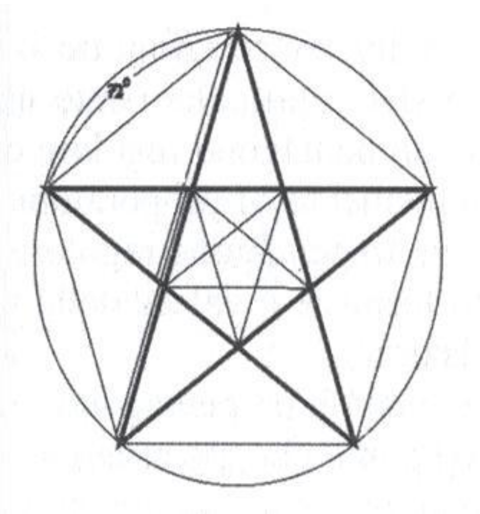


IL PENTAGONO:

La sezione aurea è legata anche al pentagono regolare. Infatti esistono molte relazioni tra il pentagono e la seziona aurea, relazioni che sono state particolarmente utilizzate nell'arte e nell'architettura.
Ad esempio:

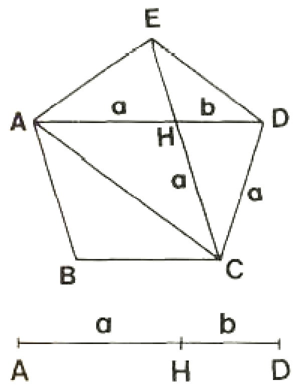
In un pentagono regolare due diagonali senza vertici in comune si tagliano mutuamente in proporzioni auree.
In un pentagono regolare la misura della sua diagonale e il lato sono in proporzioni auree.





Le diagonali di un pentagono regolare, incrociandosi formano una stella e cinque punte e un pentagono regolare più piccolo. Le diagonali di questo secondo pentagono formeranno un terzo pentagono regolare, ancora più piccolo. Questo processo può essere continuato indefinitamente, dando luogo a pentagoni sempre più piccoli.
Questa dimostrazione fu fatta da Ippaso di Metaponto (attivo verso il 400 a.C). Può aiutare a dimostrare l'incommensurabilità della sezione aurea.

Consideriamo il pentagono ABCDE, i segmenti a e b in cui la diagonale AD del pentagono è divisa dalla diagonale EC stanno infatti nella relazione richiesta dalla sezione aurea:



(a + b) : a = a: b

Per verificarlo basta osservare che i triangoli CAD e HCD sono isosceli e simili, e il triangolo AHC è isoscele. La proporzione si ricava dai triangoli simili CAD e HCD.
E quindi possiamo scrivere:

$$\frac{(a+b)}{a} = \frac{a}{b}$$

cioè:

$$\frac{a}{a} + \frac{b}{a} = \frac{a}{b}$$

ovvero:

$$1+\frac{1}{\varphi}=\varphi \rightarrow \varphi^2-\varphi-1=0$$

Esistono due bellissime formule che forniscono esattamente il numero aureo, utilizzando solo il più semplice dei numeri, l'1. Una è basata su una frazione continua infinita:

$$\varphi = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}}}$$

mentre l'altra usa una serie infinita di radici:

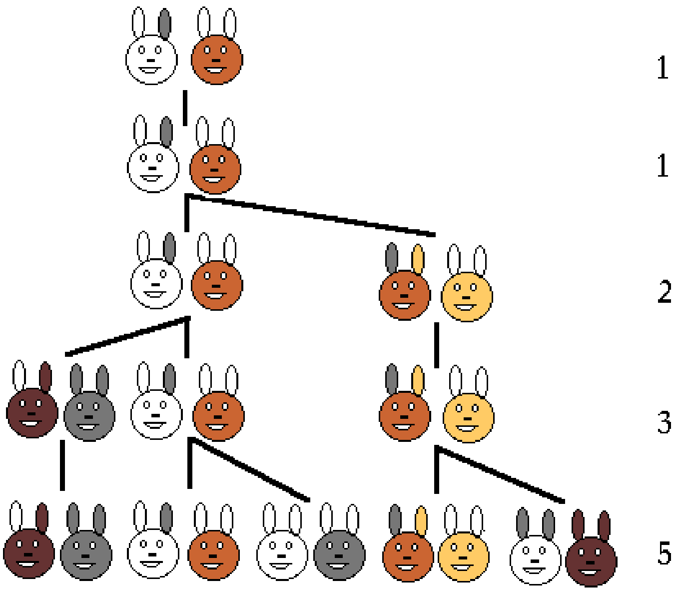
$$\varphi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}}}$$

LA SUCCESSIONE DI FIBONACCI:

Leonardo Pisano, noto anche con il nome di Fibonacci, visse tra il XII il XIII secolo e fu uno dei più grandi matematici del Medioevo. Dopo avere assimilato, durante numerosi viaggi, le conoscenze matematiche del mondo arabo, pubblicò intorno al 1202 la sua opera fondamentale, il *Liber Abaci*, con cui si propose di diffondere nel mondo scientifico occidentale le regole di calcolo note agli Arabi, cioè il sistema decimale ancora oggi in uso in Europa. Nato in Italia e vissuto in Nord Africa, con i suoi numerosi viaggi a fianco del padre ha avuto occasione di riconoscere i vantaggi offerti dai sistemi matematici in uso presso gli arabi. Nel *Liber Abaci* ("Il Libro dell'Abaco") Fibonacci espone il seguente problema.

Un contadino chiuse nella sua conigliera una coppia di conigli per avviare un allevamento. La coppia prese a prolificare il secondo mese una nuova coppia di conigli. Nei mesi che seguirono la coppia capostipite continuò a generare regolarmente una coppia al mese, e altrettanto fece ciascuna delle coppie generate, ciascuna però a partire dal secondo mese dopo la propria nascita.

Quante coppie di conigli popolarono la conigliera dopo il decimo mese se nel frattempo non morì nessun coniglio?. Il popolamento della conigliera può essere descritto più chiaramente con un grafico.



Si capisce che durante il primo mese nella conigliera c'è una sola coppia, e così nel secondo mese. Ma allo scadere del secondo mese nasce una nuova coppia, e le coppie sono così due.
La successione di numeri che viene generata dal "problema dei conigli" è una serie numerica che porta il suo nome e che si chiama "successione di Fibonacci". Tra i numeri di questa successione esiste una particolare relazione per cui ogni termine successivo è uguale alla somma dei due termini immediatamente precedenti. Il termine n-esimo della successione di Fibonacci è espresso dalla seguente relazione:

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

Esiste un legame tra i numeri di Fibonacci e la sezione aurea. È interessante notare sperimentalmente che se si esegue il rapporto tra il termine n-esimo della successione di Fibonacci e quello che lo precede, il rapporto tende ad avvicinarsi al numero d'oro, quando n diventa sempre più grande.

Numero	Rapporto a_{n+1}/a_n
1	
1	1
2	2
3	1,5
5	1,666667
8	1,600000
13	1,625000.
21	1,615386
34	1,619048
55	1,617647

La tabella illustra i primi dieci numeri di Fibonacci e il valore del rapporto di due numeri di Fibonacci successivi.

Esiste un'altra relazione tra la successione di Fibonacci e ϕ, che è stata determinata da Jacques Binet (1786-1856). Il valore n-esimo di una successione di Fibonacci può essere calcolato utilizzando la seguente relazione:

$$a_n = \frac{\varphi^n - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n}{\sqrt{5}}$$