Ipotesi del continuo

Insiemi non numerabili

Cantor affronta il problema dell'infinito affermando che due insiemi infiniti sono equivalenti quando tra i due insiemi esiste una relazione biunivoca (cioè una relazione che associa ad ogni elemento di un insieme uno ed un solo elemento dell'altro). Vediamo ora un esempio di un insieme non numerabile: l'insieme dei numeri reali.

Dopo aver dimostrato che $\mathbb{Q}$, l'insieme dei numeri razionali, è numerabile, proviamo a vedere come si comporta $\mathbb{R}$, l'insieme dei numeri reali.

Cantor procede per assurdo, e assume che di fatto esista una successione numerabile di numeri reali, che li comprenda tutti. Assumiamo cioè che $\mathbb{R}$ sia numerabile. A maggior ragione saranno numerabili i numeri reali compresi tra 0 ed 1. Sia $f(n)$ la relazione biunivoca che fa corrispondere ad ogni $n \in \mathbb{N}$ un $f(n) \in \mathbb{R}$ con $0 < f(n) < 1$ e questi $f(n)$ "esauriscano" tutti i numeri reali compresi tra zero ed uno. Sia $f_m(n)$ la m-esima cifra dopo la virgola di $f(n)$. Applichiamo ora la diagonalizzazione, cioè costruiamo un numero che abbia come n-esima cifra dopo la virgola $f_n(n) + 1$: si vede subito che questo nuovo numero non può essere compreso tra gli $f(n)$ che avevamo supposto esaurire tutti i numeri reali tra 0 ed 1, infatti ne differisce almeno per l'n-esima cifra! Questa contraddizione dimostra che non si possono porre in relazione biunivoca i numeri reali con i numeri naturali, quindi si deve porre:

$$card(\mathbb{R}) = \boldsymbol{c} > \aleph_0$$

Qui si scrive $\boldsymbol{c}$ per rappresentare la cardinalità di $\mathbb{R}$ perché si dice che $\mathbb{R}$ ha la potenza del continuo, dove "continuo" è un altro nome dato all'insieme dei numeri reali. Si può giustificare tale nome con il fatto che i numeri reali coprono davvero, in modo "continuo", la retta dei numeri. Si può in effetti utilizzare questa proprietà (che apparentemente anche i numeri razionali posseggono) per mostrare in modo spettacolare come in effetti i numeri reali siano davvero "di più" dei numeri razionali. Si procede così: in modo intuitivo possiamo senz'altro affermare che il segmento di retta da 0 ad 1 "è lungo" 1. Se prendiamo tutti i numeri razionali compresi tra 0 ed 1 e racchiudiamo ciascun numero razionale in un piccolo intervallino, viene naturale aspettarsi che, sommando la lunghezza di ognuno di questi intervallini, si ottenga infine almeno 1 come risultato. E invece no: proviamo a racchiudere l'n-esimo numero razionale in un intervallino di lunghezza $1/10^n$. Sommiamo ora questi intervallino e si vede che:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = \frac{1}{9} < 1$$

Insomma, i numeri razionali tra zero ed uno, pur essendo infiniti, sono "così pochi" che, anche se ciascuno di loro viene circondato da un intervallino di lunghezza non nulla, non riescono a "ricoprire" per intero il segmento di lunghezza unitaria!

Questo è il punto di partenza della cosiddetta teoria della misura.

Ora, ci si potrebbe aspettare che i punti di una superficie, ad esempio del quadrato di lato 1, siano "di più" di quelli di un segmento, ma Cantor riuscì a porre questi due insiemi di punti in corrispondenza biunivoca.

Viene da chiedersi a questo punto cosa vuol dire che il segmento ha dimensione 1 e una superficie dimensione 2, se questi due insiemi di punti sono equivalenti. In effetti quello di "dimensione" è un concetto topologico per cui è importante la continuità della corrispondenza tra i punti: una figura A è topologicamente equivalente a B se esiste una corrispondenza biunivoca tra i punti di A e quelli di B e se tale corrispondenza è continua, cioè se punti in A la cui distanza tende a zero vengono trasformati in punti di B la cui distanza tende pure a zero e viceversa. È quest'ultima condizione di continuità che non viene soddisfatta dalla corrispondenza biunivoca trovata da Cantor che stabilisce l'equivalenza tra una superficie ed un segmento.

Quindi l'equivalenza nel senso della teoria degli insiemi non è equivalenza topologica. In effetti non esistono due figure di dimensioni diverse che siano equivalenti topologicamente (e questo è un teorema, detto della "invarianza della dimensionalità").

<u>I numeri cardinali transfiniti</u>

Cantor, ancora utilizzando il suo metodo diagonale, con il quale aveva già dimostrato la non numerabilità di $\mathbb{R}$, dimostra anche il seguente fatto notevole:
L'insieme $\boldsymbol{\mathcal{P}(D)}$ formato da tutti i sottoinsiemi di un insieme dato $\boldsymbol{D}$ non si può porre in relazione biunivoca con $\boldsymbol{D}$.
Questo è banalmente vero per D finito, ma Cantor dimostra questo risultato anche per D infinito.
L'insieme $\mathcal{P}(D)$si chiama *insieme potenza* di D, e quindi per ogni insieme D vale:

$$card(\mathcal{P}(D)) > card(D)$$

Dunque Cantor dimostra che non esistono i soli due tipi di infinito che avevamo indicato con $\aleph_0$ e con $\boldsymbol{c}$, ma addirittura una serie <u>infinita</u> di modi essenzialmente <u>differenti</u> di "essere infinito". Chiaramente, il solito simbolo ∞ è insufficiente a rappresentarli tutti. Tali modi di essere infinito si indicano con:

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2 \dots$$

e questi strani oggetti si chiamano *numeri cardinali transfiniti* di Cantor.

<u>L'ipotesi del continuo</u>

Viene naturale chiedersi a quale numero cardinale transfinito corrisponda $\boldsymbol{c}$: sicuramente non ad $\aleph_0$, ma si può affermare che $\boldsymbol{c} = \aleph_1$?
Si può cioè dire che non esistono cardinali transfiniti "intermedi" tra $\aleph_0$ e $\boldsymbol{c}$?
Questa è la famosa ipotesi del continuo, che Cantor tentò in tutti i modi di dimostrare. Non ci riuscì e consegnò la questione ai suoi successori e la storia è abbastanza interessante: nel 1900 Hilbert cita questo problema come primo di una lista di problemi irrisolti la cui soluzione avrebbe rappresentato un significativo avanzamento delle conoscenze matematiche; nel 1938 Gödel dimostra che se la teoria degli insiemi senza l'ipotesi del continuo è consistente, lo è anche la teoria che si ottiene aggiungendo tale ipotesi come "assioma" aggiuntivo e Cohen dimostra nel 1963 che si trovano nella stessa situazione anche le teorie che si ottengono negando l'ipotesi del continuo. Dunque, unendo i risultati di Gödel e Cohen, non si può dare una risposta definitiva ai quesiti qui posti, poiché sia che $\boldsymbol{c} = \aleph_1$, sia che esistano cardinali transfiniti "intermedi" tra $\aleph_0$ e $\boldsymbol{c}$, la teoria degli insiemi risulta comunque coerente.

<u>Il principio di buon ordinamento e l'assioma della scelta</u>

Cantor aveva capito che per poter dimostrare che ogni numero cardinale infinito ha il suo posto all'interno della successione $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2 \dots$, aveva bisogno di un modo per confrontare l'uno con l'altro i membri di ogni possibile coppia di numeri cardinali, dovette perciò definire una particolare proprietà degli insiemi: il principio di buon ordinamento. Tale principio dice che ogni insieme può essere ben ordinato, e un insieme si definisce tale se ognuno dei suoi sottoinsiemi non vuoti ha un elemento più piccolo.
Cantor non riuscì a dimostrare il principio di buon ordinamento, più successo ebbe invece Zermelo: la dimostrazione iniziava associando un "punto rappresentativo" a ogni sottoinsieme non vuoto di un dato insieme, scelto semplicemente tra tutti i punti del sottoinsieme. Chiamò tale punto "l'elemento distinto" del sottoinsieme. Per effettuare questa scelta, Zermelo si baso su un principio di selezione che chiamò "assioma di scelta".
Ma già pochi giorni dopo la pubblicazione della sua dimostrazione, numerosi matematici sollevarono una serie di obiezioni riguardanti l'assioma della scelta: in un mondo finito, fare una

scelta è una procedura semplice, non è più così quando si entra nel regno dell'infinito. Zermelo non offriva alcun metodo per effettuare la scelta un numero infinito di volte, non era sufficiente dire che una tale scelta poteva essere fatta: bisognava produrre una regola precisa che stabilisse come una tale successione infinita di scelte possa essere fatta.

La controversia riguardante l'assioma della scelta non è mai cessata, e i matematici hanno scoperto che diversi principi matematici, tra cui lo stesso principio di buon ordinamento, sono equivalenti a tale assioma.